

Конспект лекций  
по  
высшей математике

Дифференциальное  
исчисление

## Лекция 18. Производная, её геометрический и механический смысл

*Важнейшим понятием математического анализа является производная, которая определяет скорость изменения функции.*

- ★ Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

**Пример 1.** Вычислить производную функции  $f(x) = x^2$  в точке  $x = 5$ .

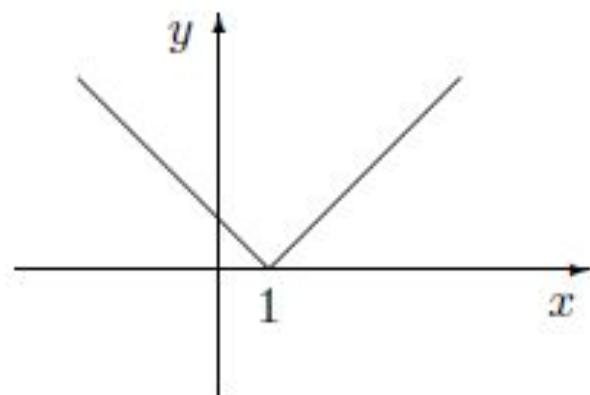
$$\begin{aligned} \triangleright \Delta f(5) &= f(5 + \Delta x) - f(5) = 10\Delta x + \Delta x^2, \\ f'(5) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(10 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (10 + \Delta x) = 10. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

## Производная справа и слева

★ Правой (левой) производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел справа (слева) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\Delta f(x_0 \pm 0)}{\Delta x} = f'(x_0 \pm 0).$$

Пример 2. Вычислить производную функции  $f(x) = |x - 1|$  в точке  $x = 1$ .



$$\triangleright |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{при } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{при } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-x+1}{x-1} = -1.$$

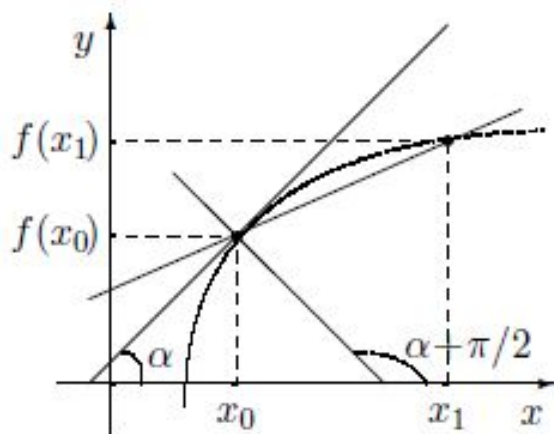
$f'(1+0) \neq f'(1-0) \implies f'(1)$  — не существует  $\triangleleft$

## Геометрический смысл производной

### Задача 1

Получить уравнение касательной.

- ★ Касательной называется предельное положение секущей при стремлении второй точки секущей к первой.



► Запишем уравнение секущей

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

и устремим вторую точку секущей к первой, тогда поскольку

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

то вычисление предела даёт

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad \text{— уравнение касательной}$$

где угловой коэффициент касательной  $k_{кас} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$  ◀

- ★ Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции.

## ЗАДАЧА 2

Получить уравнение нормали.

★ Нормалью называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной.

►  $y - f(x_0) = k_{\text{норм}}(x - x_0)$ , где

$$k_{\text{норм}} = \operatorname{tg}(\alpha + \pi/2) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \quad \text{— уравнение нормали} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти уравнения касательной и нормали для функции  $f(x) = x^2$  в точке  $x = 5$ .

▷  $f'(5) = 10$ ,  $f(5) = 25$ , и очевидно

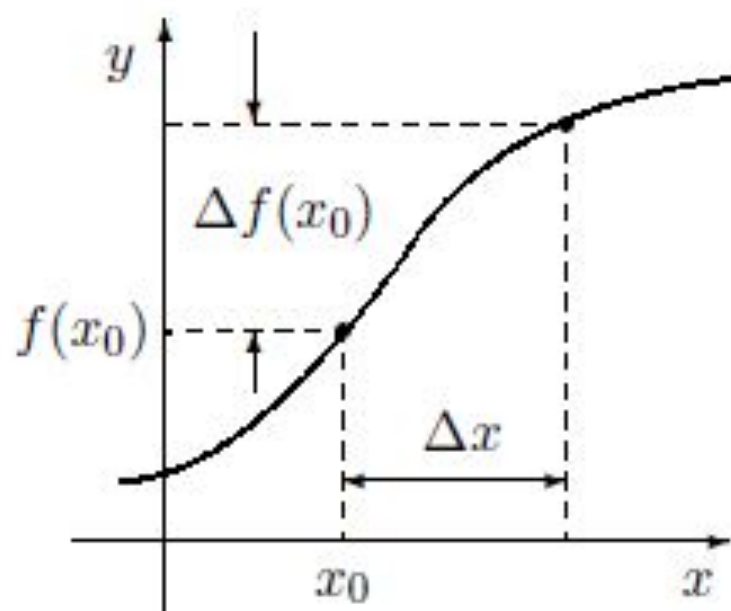
$$y_{\text{кас}} - 25 = 10(x - 5), \quad y_{\text{норм}} - 25 = -0.1(x - 5) \quad \blacktriangleleft$$

### ЗАДАЧА 3

Показать, что если производная положительна, то функция возрастает, а если отрицательна, то убывает.

★ Функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x_0 \in (a, b)$  выполняется:

$$\Delta f(x_0) > 0 \quad (\Delta f(x_0) < 0) \quad \text{при } \Delta x > 0.$$



► Пусть  $f'(x_0) > \varepsilon > 0$ , тогда из определения производной как предела следует

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon,$$

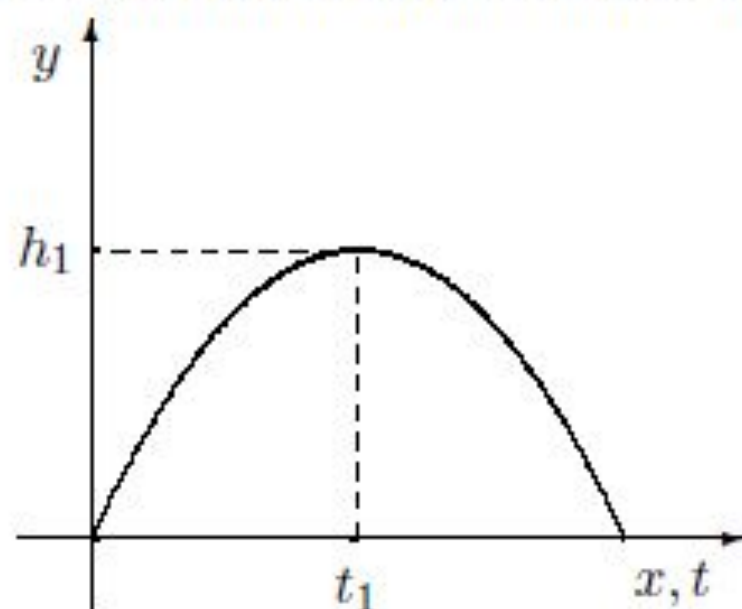
откуда

$$\Delta f(x_0) > 0 \quad \text{при } \Delta x > 0. \quad \blacktriangleleft$$

## Механический смысл производной

### Задача 4

Известно, что траекторией брошенного камня является парабола. Найти его скорость и ускорение.



► Поскольку горизонтальное движение равномерное, то вертикальная координата равна:

$$h(t) = -\frac{g}{2}(t - t_1)^2 + h_1, \quad \text{тогда}$$

$$h'(t) = -g(t - t_1) \quad \text{— скорость}$$

$$h''(t) = -g \quad \text{— ускорение} \quad \blacktriangleleft$$

• Вычисление производной позволило нам “получить” известный физический закон, что всякое брошенное тело испытывает постоянное ускорение свободного падения.

## Основные правила дифференцирования

- ★ Функция  $f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если она имеет производную в этой точке.

Вопрос: Является ли непрерывной дифференцируемая функция?

Ответ: Да, поскольку для существования предела, определяющего производную, необходимо  $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

### ЗАДАЧА 5

Показать, что производные суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

1.  $(u + v)' = u' + v'$
2.  $(uv)' = u'v + v'u$
3.  $(u/v)' = (u'v - v'u)/v^2$



$$\begin{aligned}
\blacktriangleright 1. \quad (u+v)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v' \\
2. \quad (uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - uv}{\Delta x} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u(x_0 + \Delta x) = u + \Delta u \\ v(x_0 + \Delta x) = v + \Delta v \end{array} \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta uv + \Delta vu + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u + u' \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v}_{=0} = u'v + v'u. \\
3. \quad (u/v)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \left\{ \Delta \frac{u}{v} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \right\} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta uv - \Delta vu}{\Delta xv(v + \Delta v)} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

## Лекция 19. Вывод таблицы производных

Так же, как при умножении чисел используют не определение действия умножения, а таблицу умножения, так и при вычислении производных используют не определение производной, а таблицу производных.

### Задача 1

Показать, что производная сложной функции равна произведению производных составляющих функций, т.е.

$$f'_x = f'_u u'_x, \quad \text{где } f = f[u(x)]$$

$$\blacktriangleright f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \Delta u}{\Delta x \Delta u} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u u'_x \blacktriangleleft$$

- Прежде чем вычислять производную функции, необходимо определить число составляющих её функций.

## ЗАДАЧА 2

Используя определение производной, вычислить производные элементарных функций.

► 1.  $C' = ?$

$$C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

2.  $(x^n)' = ?$

Поскольку  $(x)' = 1$ ,  $(x^2)' = 2x$ , то можно предположить, что  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . Последнее верно, если при этом предположении выполняется  $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ . Докажем это равенство

$$(x^{n+1})' = (xx^n)' = x'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Следовательно  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

• Доказательство дано методом математической индукции.

$$3. (e^x)' = ?$$

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \\ &= \left\{ e^{\Delta x} \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\simeq} 1 + \Delta x \right\} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.\end{aligned}$$

*Найдём производную показательной функции*

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^{x \ln a})' = \\ &= \{f'_x = f'_u \cdot u'_x\} = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.\end{aligned}$$

$$4. (\ln x)' = ?$$

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \left\{ \ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\simeq} u \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$$5. (\sin x)', (\cos x)' = ?$$

*Вычислить производную синуса через производную экспоненты.*

$$(\sin x)' = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)' = \frac{e^{ix}(i) - e^{-ix}(-i)}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x.$$

*Вычислить производную косинуса через производную синуса.*

$$(\cos x)' = \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) (-1) = -\sin x.$$

$$6. (\operatorname{tg} x)', (\operatorname{ctg} x)' = ?$$

*Вычислить производную тангенса через производные синуса и косинуса.*

$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

*Вычислить производную котангенса через производную тангенса.*

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right)} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - x \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$7. \quad (\operatorname{ch} x)', (\operatorname{sh} x)' = ?$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Для завершения таблицы производных потребуется решить следующую задачу.

### Задача 3

Найти связь производной функции с производной обратной функции.

► Пусть обе функции: прямая  $y = y(x)$  и обратная  $x = x(y)$  — непрерывны и дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ , тогда

$$x_y' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y_x'}.$$

$$\boxed{x_y' = 1/y_x'} \quad \blacktriangleleft$$

Продолжим решение Задачи 2.

Продолжим решение Задачи 2.

$$8. (\arcsin x)', (\arccos x)' = ?$$

Пусть  $y = \arcsin x$ , тогда  $x = \sin y$ .

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Аналогично получим, что  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

$$9. (\operatorname{arctg} x)', (\operatorname{arccotg} x)' = ?$$

Пусть  $y = \operatorname{arctg} x$ , тогда  $x = \operatorname{tg} y$ .

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Нетрудно показать, что  $(\operatorname{arccotg} x)'_x = -\frac{1}{1 + x^2}$  ◀

Таблица производных		
$N$	$f(x)$	$f'(x)$
1	$C$	0
2	$x^n$	$nx^{n-1}$
3	$e^x$ $a^x$	$e^x$ $a^x \ln a$
4	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
5	$\sin x$ $\cos x$	$\cos x$ $-\sin x$
6	$\operatorname{tg} x$ $\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ $-\frac{1}{\sin^2 x}$
7	$\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$
8	$\arcsin x$ $\arccos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\operatorname{arctg} x$ $\operatorname{arcctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$ $-\frac{1}{1+x^2}$



## Лекция 20. Дифференциал функции

*Дифференциал функции — понятие столь же часто используемое в математике, как и производная.*

### Теорема о дифференцируемой функции

#### ТЕОРЕМА

*Чтобы функция  $f(x)$  была дифференцируема в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно выполнения равенства:*

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).} \quad (*)$$

#### ДОСТАТОЧНОСТЬ

*Докажем, что если формула (\*) выполняется, то функция дифференцируема, т.е. имеет производную. Поделим обе части равенства (\*) на  $\Delta x$ , тогда*

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

## НЕОБХОДИМОСТЬ

Исходим из определения производной. Поскольку

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то согласно определения предела

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\approx} f'(x_0).$$

или

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} o(1),$$

и далее

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} o(1)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} o(\Delta x),$$

что и требовалось доказать.

Вопрос: Что является эквивалентной приращению функции?

- ★ Согласно доказанному равенству (\*), эквивалентной приращению функции является произведение производной функции на приращение аргумента, т.е.

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x} \text{ — дифференциал функции.}$$

Вопрос: Чему равен дифференциал аргумента?

$$dx = x' \Delta x = \Delta x.$$

- ★ Приращение аргумента тождественно равно дифференциалу аргумента:

$$\boxed{dx = \Delta x} \text{ — дифференциал аргумента.}$$

Вопрос: Как выразится производная функции через дифференциалы функции и аргумента?

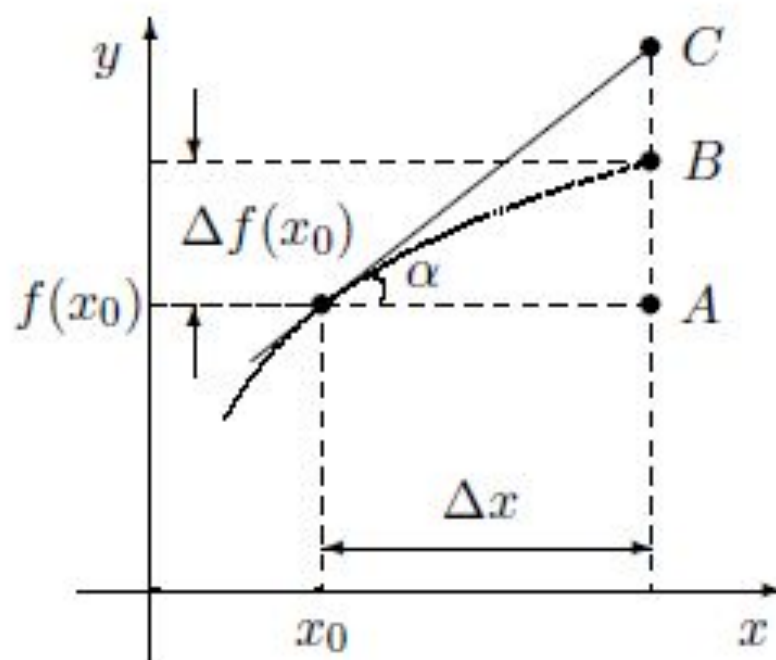
★ Производная функции равна частному дифференциалов функции и аргумента:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}} \quad \text{— производная функции.}$$

## Геометрический смысл дифференциала

### ЗАДАЧА 1

Выяснить геометрический смысл дифференциала.



► Согласно рисунку  
 $AB = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$   
— приращение функции, а  
 $AC = \operatorname{tg} \alpha \Delta x = f'(x_0) \Delta x =$   
 $= df(x_0)$   
— приращение ординаты касательной. ◀

★ Дифференциал функции  
— это приращение ординаты касательной.

## ЗАДАЧА 2

Самостоятельно показать, что дифференциалы суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

1.  $d(u + v) = du + dv$
2.  $d(uv) = vdu + udv$
3.  $d(u/v) = (vdu - u dv)/v^2$

### Дифференциал и приближённое вычисление

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Пример 1. Вычислить  $\sqrt{0.9}$ .

$$\begin{aligned} \triangleright \sqrt{0.9} = \sqrt{1 - 0.1} &\approx \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1, \quad \Delta x = -0.1 \\ f(x_0) = 1, \quad f'(x_0) = 1/2 \end{array} \right\} \approx \\ &\approx 1 - 0.1/2 = 0.95 \quad \triangleleft \end{aligned}$$

## Производные и дифференциалы высших порядков

- ★ Производной или дифференциалом второго порядка называется производная производной или дифференциал дифференциала первого порядка.

$$f''(x) = (f'(x))', \quad d^2 f(x) = d(df(x))$$

### Задача 3

Выразить дифференциал и производную  $n$ -го порядка.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad d^2 f(x) &= d(df(x)) = d(f'(x)\Delta x) = \\ &= d(f'(x))\Delta x + f'(x) \underbrace{d(\Delta x)}_{=0} = \left\{ \begin{array}{l} (\Delta x)' = 0 \text{ т.к. } \Delta x \\ \text{не зависит от } x \end{array} \right\} = \\ &= f''(x)\Delta x\Delta x = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2. \end{aligned}$$

В последнем равенстве круглые скобочки подразумеваются: это тот редкий случай, когда математики пишут одно, а подразумевают другое. Отсюда

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad \blacktriangleleft$$

#### Задача 4

Проверить инвариантность формы дифференциала первого порядка.

$$df = f'_x dx = f'_u du, \quad \text{где } f = f[u(x)] \text{ — сложная функция}$$

- $f'_x dx = f'_u u'_x dx = f'_u du$ . Самостоятельно показать, что  
 $d^2 f = f''_{xx} dx^2 \neq f''_{uu} du^2$ , где  $f''_{xx} = (f'_x)'_x$  ◀



## Лекция 21. Формула Тейлора

*Если дифференциал функции описывает приращение функции в первом приближении, то многочлен Тейлора описывает приращение функции со сколь угодно точностью.*

### ЗАДАЧА 1

*Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и  $n + 1$  раз дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Найти эквивалентную приращения функции в окрестности точки  $x_0 \in [a, b]$  в виде многочлена  $n$ -ой степени.*

► Согласно предыдущей лекции

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0),$$

а требуется найти такой  $P_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k(x - x_0)^k$ , чтобы

$$f(x) - f(x_0) = P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Для нахождения  $A_k$  необходимо  $n$  раз продифференцировать равенство

$$f(x) - f(x_0) = A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \dots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

*В результате получим*

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1} + o(n(x - x_0)^{n-1}),$$

$$f''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + \dots + n \cdot (n - 1)A_n(x - x_0)^{n-2} + o(n \cdot (n - 1)(x - x_0)^{n-2}),$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1A_3 + \dots + n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)A_n(x - x_0)^{n-3} + o(n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)(x - x_0)^{n-3}),$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1A_n + o(n \cdot (n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1).$$

*Положим  $x = x_0$ , тогда*

$$\underbrace{f'(x_0) = A_1, f''(x_0) = 2A_2, f'''(x_0) = 3!A_3, \dots, f^{(n)}(x_0) = n!A_n}_{\downarrow}$$

$$\boxed{A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} \quad \text{— коэффициенты Тейлора}$$

Итак, приращение функции в точке  $x_0$  в виде многочлена  $n$ -ой степени имеет вид

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

где второе слагаемое дает погрешность многочлена Тейлора. То же равенство можно записать иначе

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)} \quad \text{— формула Тейлора} \quad \blacktriangleleft$$

## ЗАДАЧА 2

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и  $n + 1$  раз дифференцируема в окрестности точки  $x = 0$ . Представить её в виде многочлена  $n$ -ой степени в окрестности этой точки.

► Согласно Задаче 1

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)} \quad \text{— формула Маклорена} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 1. Представить  $e^x$  в виде многочлена Маклорена.

▷  $f^{(k)}(0) = ?$  Очевидно  $e^{(k)}(0) = 1$  и

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \triangleleft$$

**Пример 2.** Представить  $(a+x)^n$  в виде многочлена Маклорена.

$$\begin{aligned} \triangleright \quad f^{(0)}(0) &= a^n, \quad f^{(1)}(0) = na^{(n-1)}, \quad f^{(2)}(0) = n(n-1)a^{(n-2)}, \quad \dots \\ f^{(k)}(0) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{(n-k)}, \quad \dots \\ f^{(n)}(0) &= n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 a^0 = n! \end{aligned}$$

Поскольку все последующие производные равны нулю, то подстановка производных в формулу Маклорена даст точное равенство

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= a^n + na^{(n-1)}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{(n-2)}x^2 + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{(n-k)}x^k + \dots + nax^{(n-1)} + x^n \quad \triangleleft \end{aligned}$$

- Полученный результат можно записать иначе

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{(n-k)} b^k} \quad \text{— бином Ньютона}$$

**Пример 3.** Известно, что  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\approx} x$ .

*Найти следующее приближение.*

$$\triangleright \sin^{(0)} 0 = 0, \quad \sin^{(1)} 0 = \cos 0 = 1, \quad \sin^{(2)} 0 = -\sin 0 = 0,$$

$$\sin^{(3)} 0 = -\cos 0 = -1 \implies \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \triangleleft$$

## Дифференцирование параметрически заданных функций

### ЗАДАЧА 3

Найти производные первого и второго порядка для параметрически заданных функций.

- ★ Функция  $y = y(x)$  задана параметрически, если  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in T$ , где  $T$  — область определения функции.

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \quad y'_x &= \frac{dy}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} dy = \psi'(t)dt \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \boxed{\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y'_x} ; \quad y''_{xx} = \frac{d}{dx} y'_x = \\
 &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) = \frac{\left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'}{\varphi'(t)} = \boxed{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = y''_{xx}} . \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 4. Найти производные функции  $\begin{cases} y = b \sin t \\ x = a \cos t \end{cases}$ .

$$\begin{aligned}
 \triangleright \quad y'_x &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t, \\
 y''_{xx} &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t} . \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$



Пример 4. Найти производные функции  $\begin{cases} y = b \sin t \\ x = a \cos t \end{cases}$ .

$$\triangleright y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}. \triangleleft$$

### Дифференцирование неявно заданных функций

★ Функция задана неявно, если она определена уравнением  $F(x, y) = 0$ .

Пример 5. Найти производные функции  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

• Можно догадаться, что задача дифференцирования неявно заданных функций решается простым дифференцированием уравнения по переменной  $x$ .

$$\triangleright \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \implies y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2y'^2 + 2yy''}{b^2} = 0 \implies y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \triangleleft$$

Пример 6. Выразив для эллипса явную зависимость  $y$  от  $x$  вычислить  $y'$  и  $y''$ . Полученный результат сравнить с результатами Примеров 4 и 5. Оценить какое задание функции быстрее приводит к результату (самостоятельно).

## Лекция 22. Теоремы о среднем

*В этой лекции будут получены некоторые важные соотношения между производной функции и самой функцией.*

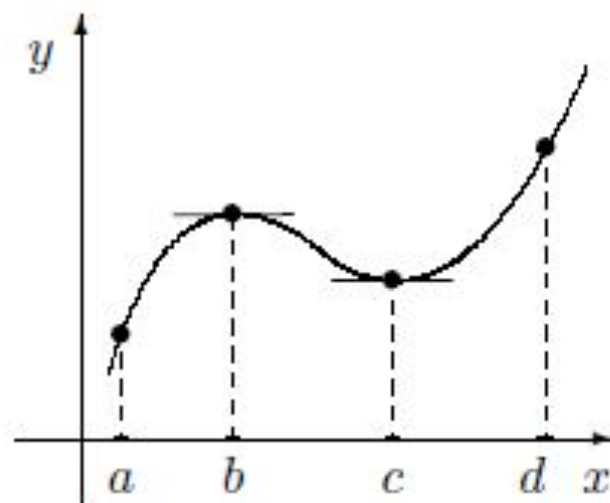
### Экстремум функции

- ★ Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $f(x)$ , если в некоторой  $\delta$ -окрестности этой точки  $f(x)$  непрерывна и удовлетворяет неравенству:

$$\left( \begin{array}{l} f(x) < f(x_0) \text{ — max} \\ f(x) > f(x_0) \text{ — min} \end{array} \right) \text{ при } x \neq x_0.$$

- ★ Локальный максимум или минимум называют локальным экстремумом.

Пример 1. Указать точки локального экстремума функции, заданной на отрезке  $[a, d]$ .



▷ Очевидно, что

$$f(b) \text{ — max,}$$

$$f(c) \text{ — min;}$$

в то время как

$$f(d) \text{ — наибольшее,}$$

$$f(a) \text{ — наименьшее} \triangleleft$$

- Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке могут не быть локальными экстремумами.

## ТЕОРЕМА ФЕРМА

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и имеет в этой точке локальный экстремум, то тогда её производная в этой точке равна нулю.

► Если функция дифференцируема в точке  $x_0$ , то её левая и правая производные равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Пусть для определённости в точке  $x_0$  — макс. Тогда

$$\underbrace{f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ при } x \leq x_0 \text{ и при } x \geq x_0}$$

↓

$$\boxed{f'(x_0) = 0} \quad \blacktriangleleft$$

## ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b)$ , то существует хотя бы одна точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что  $f'(\xi) = 0$ .

► 1. Если  $f(x) \equiv f(a) \equiv f(b)$  при  $x \in (a, b)$ ,  
тогда  $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a, b)$ .

2. Если  $f(x) \neq const$ , то на интервале  $(a, b)$  найдётся хотя бы одна точка  $\xi$  локального экстремума. Но тогда в этой точке, согласно теореме Ферма,  $f'(\xi) = 0$ . ◀

## ТЕОРЕМА КОШИ

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$ :

- непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ,
- дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,
- $g'(x) \neq 0$ ,

тогда найдётся такая точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой выполняется соотношение

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}} \quad (*)$$

► Для доказательства вводится вспомогательная функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы Ролля

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

а значит, найдётся такая точка  $\xi \in (a, b)$ , что  $F'(\xi) = 0$ . Итак

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) = 0 \implies (*) \blacktriangleleft$$

## ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Если функция  $f(x)$ :

— непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,

— дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ,

тогда найдётся такая точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой выполняется соотношение

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)} \quad (**)$$

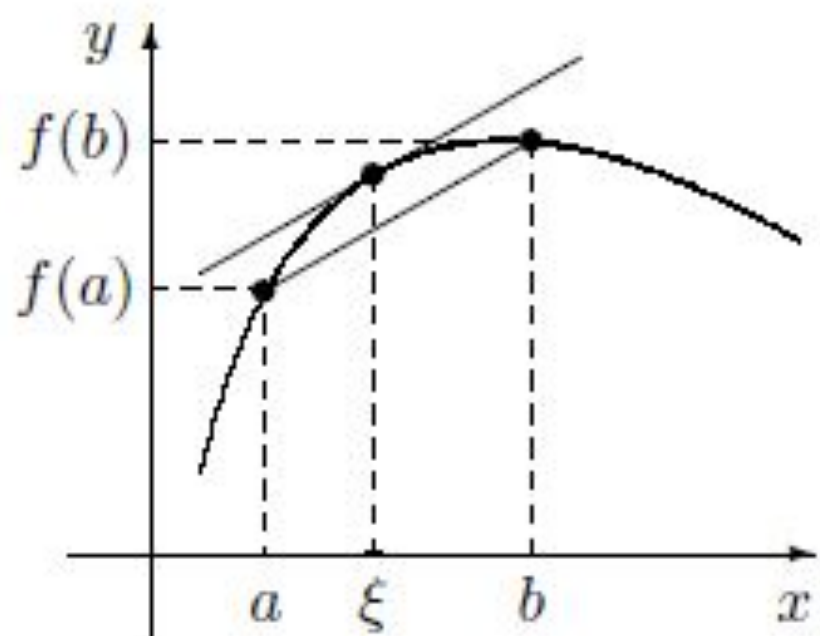
► Вопрос: Как с помощью соотношения (\*) получить (\*\*)?

Ответ: Ввести функцию  $g(x) = x$ . Поскольку

$$g'(\xi) = 1, \quad g(b) - g(a) = b - a, \quad \text{то } (*) \implies (**) \quad \blacktriangleleft$$

## ЗАДАЧА 1

Определить геометрический смысл теоремы Лагранжа.



► Так как  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \varphi$  тангенс угла наклона секущей, а  $f'(\xi)$  — тангенс угла наклона касательной, то согласно теоремы Лагранжа найдётся такая точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой они равны. ◀



## ЗАДАЧА 2

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и имеет на этом отрезке  $n$  нулей. Показать, что  $f'(x)$  имеет на этом отрезке нулей не меньше чем  $n - 1$ .

► По условию

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0, \text{ где } x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b].$$

Тогда на отрезках

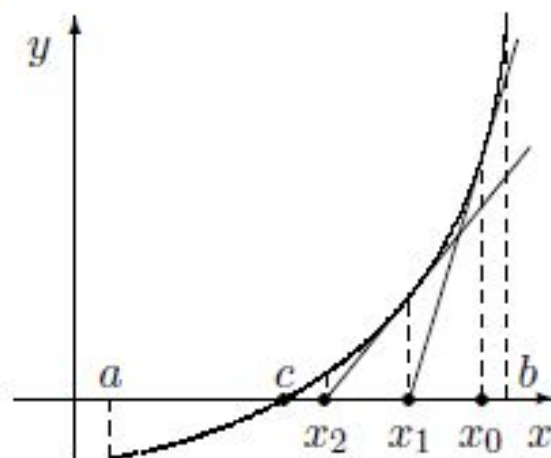
$$[x_i, x_{i+1}] \in [a, b], \text{ где } i = \overline{1, n-1}$$

выполнены условия теоремы Ролля, а значит найдутся точки

$$\xi_i \in [a, b], \text{ где } f'(\xi_i) = 0. \quad \blacktriangleleft$$

### ЗАДАЧА 3 (метод Ньютона)

Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную знакопостоянную производную на отрезке  $[a, b]$  и  $f(c) = 0$ , где  $a < c < b$ . Получить с помощью уравнения касательной алгоритм нахождения нуля функции.



► Проведём касательную к кривой в точке  $x_0 \in [a, b]$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

которая пересечет ось абсцисс в точке

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Теперь проведём касательную к кривой в точке  $x_1$ , которая пересечет ось абсцисс в точке

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, получим искомый алгоритм:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_c \text{ при } n \rightarrow \infty$$

метод  
касательных



## Лекция 23. Правило Лопитала

*Доказанные в предыдущей лекции теоремы имеют важные приложения, в частности, теорема Коши приводит к новому для нас методу вычисления пределов.*

ЗАДАЧА 1 (правило Лопитала)

*Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$ , причём*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad g'(x) \neq 0.$$

*Показать, что*

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}. \quad (*)$$

► Доопределим заданные функции в точке  $x_0$ , а именно,  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Тогда согласно теореме Коши найдётся такая точка  $\xi \in (x, x_0)$ , в которой выполняется соотношение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Вычисление предела от этого соотношения

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow x_0, \\ \xi \rightarrow x_0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

приводит к правилу Лопиталя (\*). ◀

• Предел частного дифференцируемых функций, в случае неопределённости вида  $\{0/0\}$ , равен пределу частного производных функций, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

Пример 1. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \triangleleft$$

Пример 2. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos 1/x}{x}$ .

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos 1/x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 1/x + \sin 1/x}{1} =$$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \sin 1/x = \sin \infty$  — не существует, а значит, правило Лопиталья не применимо. Правильное решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos 1/x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos 1/x = 0 \quad \triangleleft$$

Замечание 1. Если отношение функций представляет собой неопределённость вида  $\{\infty/\infty\}$ , то правило Лопиталья применимо (без показательства).

Пример 3. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \frac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x}$ .

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \frac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \frac{1/(x - \pi/2)}{1/\cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \frac{\cos^2 x}{(x - \pi/2)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \frac{\sin 2x}{1} = 0 \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Замечание 2. Правило Лопиталья можно применять повторно, если вновь приходим к неопределённости.

Пример 4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$ .

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{6x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{6} = \frac{1}{3} \\ \triangleleft \end{aligned}$$

Замечание 3. Правило Лопиталья можно применять для вычисления предела в бесконечно удалённой точке.

Пример 5. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{100}}$ .

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{100}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{100x^{99}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{100!} = \infty \triangleleft$$

## ЗАДАЧА 2

Свести неопределённость вида  $\{0 \cdot \infty\}$  к неопределённости вида  $\{0/0\}$  или  $\{\infty/\infty\}$ .

► Пусть  $\begin{cases} f(x) \rightarrow 0 \\ g(x) \rightarrow \infty \end{cases}$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Тогда очевидны следующие соотношения

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (0 \cdot \infty) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \end{cases} \text{ ИЛИ } \blacktriangleleft$$

Замечание 4. Правило Лопиталя после простого преобразования можно применять для раскрытия неопределённости вида  $\{0 \cdot \infty\}$ .

Пример 6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \ln(x-1)$ .

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \ln(x-1) &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{1/\ln x} = \{\infty/\infty\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-x \ln^2 x}{x-1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \quad \triangleleft \end{aligned}$$

### Задача 3

Свести неопределённость вида  $\{\infty - \infty\}$  к неопределённости вида  $\{0/0\}$ .

► Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \{\infty - \infty\}$ . Тогда необходимо преобразовать разность к дроби

$$f - g = \frac{1}{1/f} - \frac{1}{1/g} = \frac{1/g - 1/f}{1/f \cdot 1/g} \xrightarrow[\substack{f \rightarrow \infty \\ g \rightarrow \infty}]{\quad} \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \quad \triangleleft$$

Замечание 5. Правило Лопиталю можно применять для раскрытия неопределённостей вида  $\{\infty - \infty\}$ , поскольку она сводится к неопределённости вида  $\{0/0\}$ .



Пример 7. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ .

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{\ln x(x-1)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \triangleleft \end{aligned}$$

#### Задача 4

Свести неопределённости вида  $1^\infty$ ,  $0^\infty$ ,  $\infty^0$  к неопределённости вида  $0 \cdot \infty$ .

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) \right\} = e^{(0 \cdot \infty)} \blacktriangleleft$$

Замечание 6. Правило Лопиталья после логарифмирования можно применять для раскрытия неопределённостей вида  $1^\infty$ ,  $0^\infty$ ,  $\infty^0$ .

Пример 8. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} &= \{1^\infty\} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} \right) = e^{\{0/0\}} = \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{tg} 2x}{2x} \right) = e^{-2} \quad \triangleleft \end{aligned}$$

## Лекция 24. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

*Чтобы найти экстремум функции, требуется определить, в каких точках он возможен, а затем выяснить, действительно ли он имеет место и каков его характер.*

*Вспомним определение экстремума функции:*

или	$f(x) < f(x_0)$	—	max	при	$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $x \neq x_0$
	$f(x) > f(x_0)$	—	min		

Необходимые условия экстремума:  
критические точки

- ★ *Критическими точками мы будем называть такие точки, в которых функция может иметь экстремум.*

## КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

1. Стационарной точкой является такая точка  $x_0$ , в которой производная (скорость) равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

2. Критической точкой для непрерывной функции  $f(x)$  является также такая точка  $x_0$ , в которой её производная не существует или обращается в бесконечность:

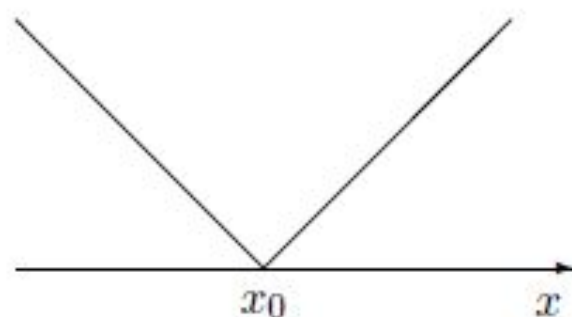
$$f'(x_0) \text{ — не существует или равна } \infty.$$

Вопрос: Привести три примера графиков, содержащих критические точки, но не имеющих экстремумов (самостоятельно).

## Первое достаточное условие

### ЗАДАЧА 1

Пусть непрерывная функция  $f(x)$  дифференцируема в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , за исключением, может быть, самой этой точки. Показать, что если в этой точке производная меняет знак, то имеет место локальный экстремум.



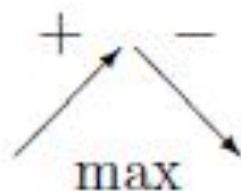
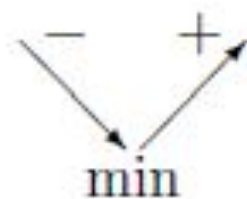
► Пусть для определенности  
 $f'(x_0 - 0) < 0$ , а  $f'(x_0 + 0) > 0$ .

Покажем, что в этом случае имеет место минимум. Воспользуемся соотношением

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x.$$

В левой окрестности:  $\Delta x < 0$ ,  $f'(x_0 - 0) < 0$ ,  
а значит  $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ .  
В правой окрестности:  $\Delta x > 0$ ,  $f'(x_0 + 0) > 0$ ,  
и значит  $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ .  
}  $\Rightarrow \min \blacktriangleleft$

- Изображённая на рисунке функция  $f(x) = |x - x_0|$  не имеет производной в точке минимума.
- Если в критической точке производная функции меняет знак с минуса на плюс, то имеет место минимум; а с плюса на минус — максимум.



- Первое достаточное условие годится для любых критических точек и является универсальным.

## Второе достаточное условие

### ЗАДАЧА 2

Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и имеет на этом отрезке стационарную точку ( $f'(x_0) = 0$ ).

Показать, что если в этой точке вторая производная отлична от нуля, то имеет место локальный экстремум.

► Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

в стационарной точке принимает вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Так как в любой окрестности  $x_0$  (правой и левой)  $(x - x_0)^2 > 0$ , то в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  выполняются неравенства:

если  $f''(x_0) > 0$ ,  $\cup$   $\min$       если  $f''(x_0) < 0$ ,  $\cap$   $\max$  ◀

• Если вторая производная в стационарной точке больше нуля, то имеет место минимум, а если меньше нуля, то максимум.

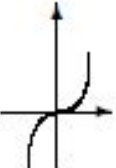
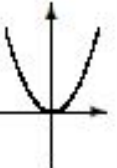

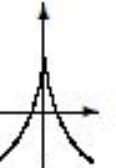
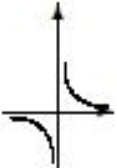
## Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке  $[a, b]$ , необходимо:

1. Найти критические точки на этом отрезке.
2. Подсчитать значения функции в этих точках и на концах отрезка.
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.



**Пример 1.** Исследовать на экстремум следующие функции:  
 $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$ ,  $1 - x^{\frac{2}{3}}$ ,  $x^{-1}$ . Решение представить в виде таблицы.

$f(x)$	$x^3$	$x^2$	$x$	$1 - x^{\frac{2}{3}}$	$x^{-1}$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$	$-x^{-2}$
$x_0$ крит. т.	0	0	нет	0	разрыв в нуле
$f'(x_0)$	0	0		не сущ.	
знак $f'(x_0)$ лев., прав.	+ + ↗ ↗	- + ↘ ↗		+ - ↗ ↘	
экстремум $f(x)$	нет	min	нет	max	нет
$f''(x)$	$6x$	2			
знак $f''(x_0)$	0	+			
графики					

**Пример 2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  на отрезке  $[-2, 2]$ .

$$\triangleright f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1. \text{ Далее}$$

$$f(-1) = 3, f(1) = -1, f(-2) = -1, f(2) = 3.$$

$f(2, -1) = 3$  — наибольшее, а  $f(1, -2) = -1$  — наименьшее.  $\triangleleft$

## Лекция 25. Выпуклость, точка перегиба и асимптоты кривой

*При исследовании функции и построении её графика, помимо экстремума, используется ещё несколько важных понятий.*

### Выпуклость вверх и вниз

- ★ *Функция  $f(x)$  имеет в точке  $(x_0, f(x_0))$  выпуклость вверх (вниз), если касательная в окрестности этой точки располагается выше (ниже) этой кривой.*

### Задача 1

*Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и имеет производные первого и второго порядка.*

*Показать, что по знаку производной второго порядка можно судить о том, функция в этой точке выпукла вверх или вниз.*



► Формулу Тейлора

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{y_{кас}} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

МОЖНО записать в следующем виде:

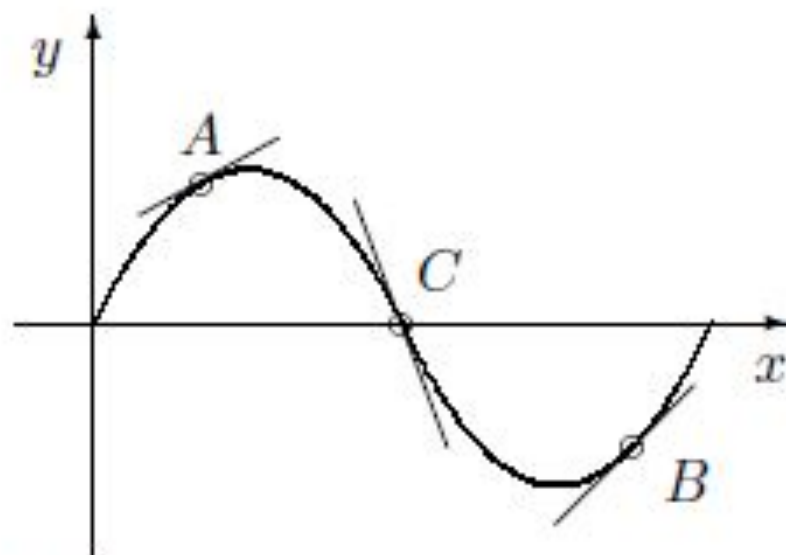
$$f(x) \simeq y_{кас} + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2. \quad (*)$$

По определению, если  $f(x) < y_{кас}$ , то функция выпукла вверх, а если  $f(x) > y_{кас}$ , то функция выпукла вниз. Таким образом из формулы (\*) следует:

$f''(x_0) > 0$		— выпуклость вниз
$f''(x_0) < 0$		— выпуклость вверх



- ★ Точкой перегиба называется такая точка, которая разделяет у непрерывной функции области выпуклости вверх и вниз, и в которой график функции имеет касательную.



Вопрос: Идентифицируйте точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , заданные на рисунке.

Ответ:  $A$  — точка выпуклости вверх,  
 $B$  — точка выпуклости вниз,  
 $C$  — точка перегиба.

- Проходящая через точку перегиба касательная, частично лежит выше кривой, а частично ниже.

## Необходимые условия точки перегиба: критические точки

Точка  $x_0$  является критической точкой относительно перегиба, если выполняется одно из двух условий:

1.  $f''(x_0) = 0$ ,
2.  $f''(x_0)$  — не существует или обращается в  $\infty$ .

## Достаточное условие точки перегиба

### ЗАДАЧА 2

Показать, что если в окрестности критической точки вторая производная меняет знак, то эта точка — точка перегиба.

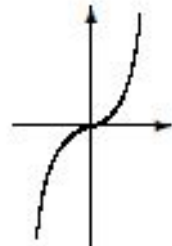
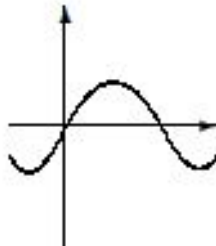
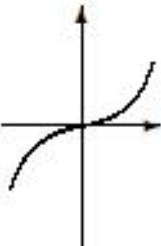
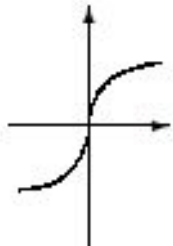
► Для двух вариантов смены знаков из Задачи 1 следует:

$$\begin{array}{l} f''(x_0 - 0) > 0 \text{ и } f''(x_0 + 0) < 0 \\ f''(x_0 - 0) < 0 \text{ и } f''(x_0 + 0) > 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{cc} \cup & \cap \\ \cap & \cup \end{array}} \text{ — точки перегиба} \blacktriangleleft$$

- Кроме смены знака второй производной в точке перегиба должна существовать касательная, которая может быть параллельна оси ординат.

Пример 1. Исследовать на перегиб следующие функции:  
 $x^3$ ,  $\sin x$ ,  $x^{\frac{5}{3}}$ ,  $x^{\frac{1}{3}}$ .

Решение представить в виде таблицы.

$f(x)$	$x^3$	$\sin x$	$x^{\frac{5}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}}$
$f''(x)$	$6x$	$-\sin x$	$\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$
$x_0$ крит. т.	0	$n\pi$	0	0
$f''(x_0)$	0	0	не суц.	не суц.
знак $f''(x_0)$ лев., прав.	$\cap \cup$	$\cup \cap \cup$	$\cap \cup$	$\cup \cap$
перегиб $f(x)$	да	да	да	да
графики				

## Асимптоты

*Графическое определение:*

- ★ Асимптотой называется прямая, к которой стремится кривая в бесконечно удалённой точке.

*Аналитическое определение:*

- ★ Асимптотой называется линейная функция, эквивалентная заданной функции или обратной функции в бесконечно удалённой точке.
- Если бесконечно удалённой точкой является  $x = \infty$ , то асимптоту называют наклонной, а если бесконечно удалённой точкой является  $y = \infty$  при  $x$  конечном, то асимптоту называют вертикальной.



**Пример 2.** Найти асимптоты функции  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1}$ , используя только определение асимптот через эквивалентные.

▷ 1. Наклонная асимптота:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} = x - 3 + \frac{8}{x + 1} = \underbrace{x - 3}_{y_{ac}} + o(1) \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

2. Вертикальная асимптота:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \Rightarrow x + 1 = \frac{x^2 - 2x + 5}{y} = 0 + o(1) \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Ответ:  $y_{ac} = x - 3$ ,  $x_{ac} = -1$  ◁

- |   |
|---|
| Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , то $x_{ac} = x_0$ |
|---|

 — вертикальная асимптота

### ЗАДАЧА 3

Пусть функция  $f(x)$  имеет наклонную асимптоту, т.е.

$f(x) = kx + l + o(1)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Найти  $y_{ac} = kx + l$ .

► 1. Делим  $f(x)$  на  $x$  и вычисляем предел:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{l}{x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{o(1)}{x} \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

2. Переносим в левую часть  $kx$  и вычисляем предел:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (l + o(1)) \Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \blacktriangleleft$$

• При построении графика функции находят её область определения, асимптоты, исследуют на экстремум и перегиб.

**Пример 3.** Построить график функции  $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}$ .

▷ 1. Находим область определения функции:

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ,  $x = 0$  — точка разрыва 2-го рода.

2. Выявляем характерные особенности функции (чётность, периодичность, знакопостоянство и т.д.):

$f(x) \geq 0$ ,  $f(1) = 0$  — функция не отрицательна.

3. Находим асимптоты функции:

$f(x) \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = 0$  — горизонтальная асимптота

$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty \Rightarrow x = 0$  — вертикальная асимптота

4. Исследуем функцию на экстремум

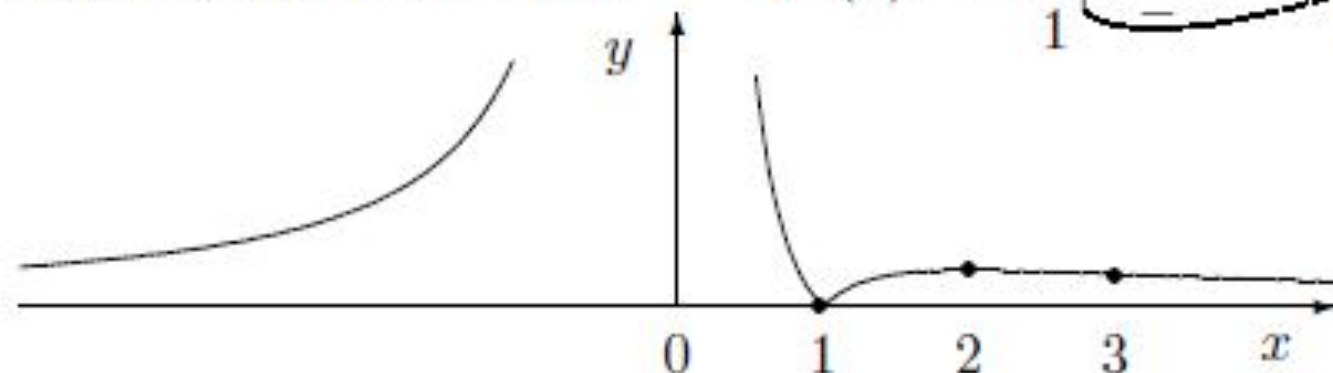
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{cases} \frac{x-1}{x^2} & \text{при } x > 1, \\ \frac{-x+1}{x^2} & \text{при } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-x+2}{x^3} & \text{при } x > 1, \\ \frac{x-2}{x^3} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Критические точки:  $x = 1, 2$ .  $f'(x)$ :

5. Исследуем функцию на перегиб

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \begin{cases} \frac{-x+2}{x^3} & \text{при } x > 1, \\ \frac{x-2}{x^3} & \text{при } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(x-3)}{x^4} & \text{при } x > 1, \\ \frac{2(3-x)}{x^4} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Критические точки:  $x = 1, 3$ .  $f''(x)$ :



- В точке  $x = 1$  нет перегиба, поскольку нет касательной.  $\triangleleft$

