Кафедра «КРЭМС»

Основы теории СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Зырянов

Юрий Трифонович

доктор технических наук

профессор

Основные понятия теории вероятностей

Все сигналы и *все* помехи являются случайными, то есть непредсказуемыми.

Математическими моделями случайных сигналов и помех служат *случайные процессы.*

В основе лежит понятие *случайного события*

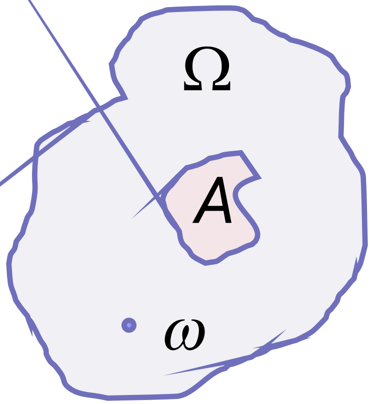
Пространство элементарных событий (генеральная совокупность) Ω

элементарное событие $\omega \in \Omega$

A – случайное событие

$$A \subset \Omega$$

Основные понятия теории вероятностей



A – случайное событие

$$A \subset \Omega$$

ω – элементарное случайное событие $\omega \in \Omega$

$\mathrm{P}\{\cdot\}$ – вероятностная мера (функция множеств)

$$\mathrm{P} : 2^{\Omega} \to [0;1]$$

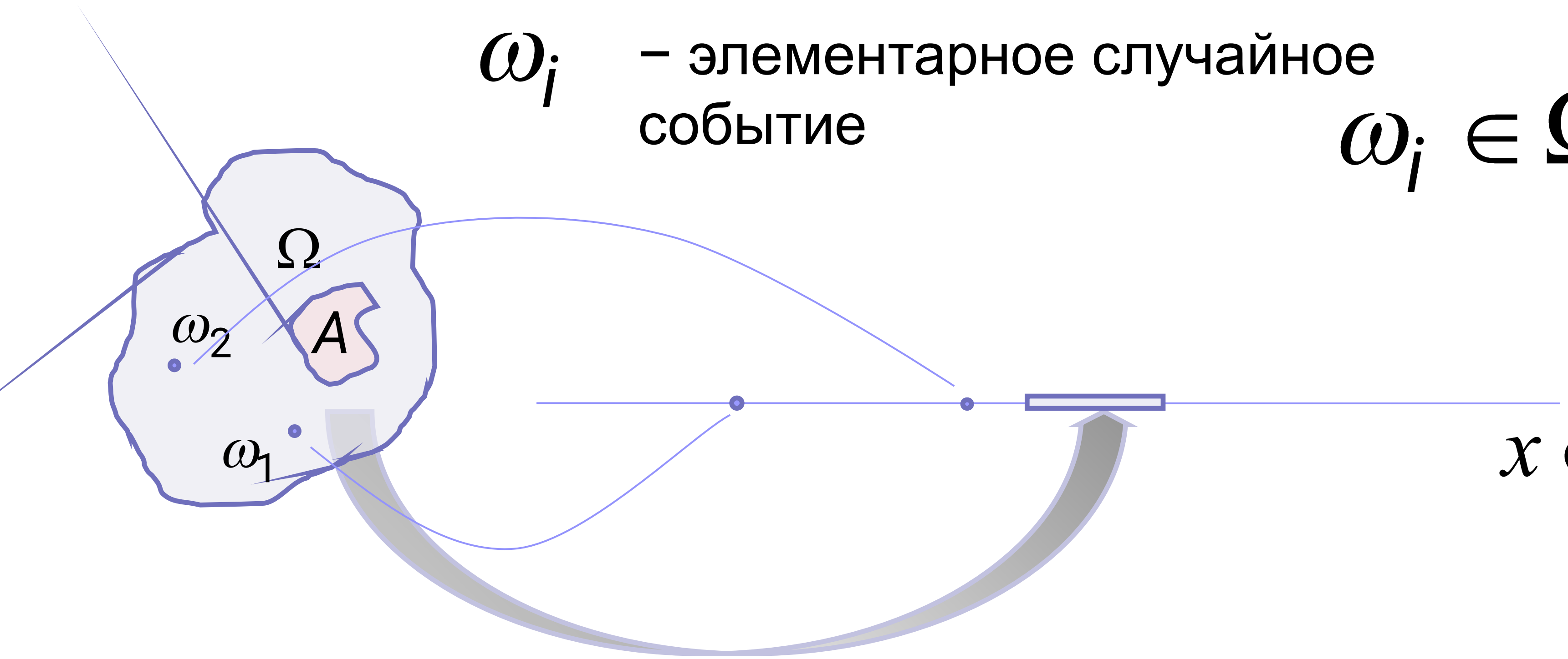
$\mathrm{P}\{A\}$ – вероятность случайного события A

$\mathrm{P}\{\Omega\} = 1$ *достоверное* событие

Случайная величина

ω_i – элементарное случайное событие

$\omega_i \in \Omega$

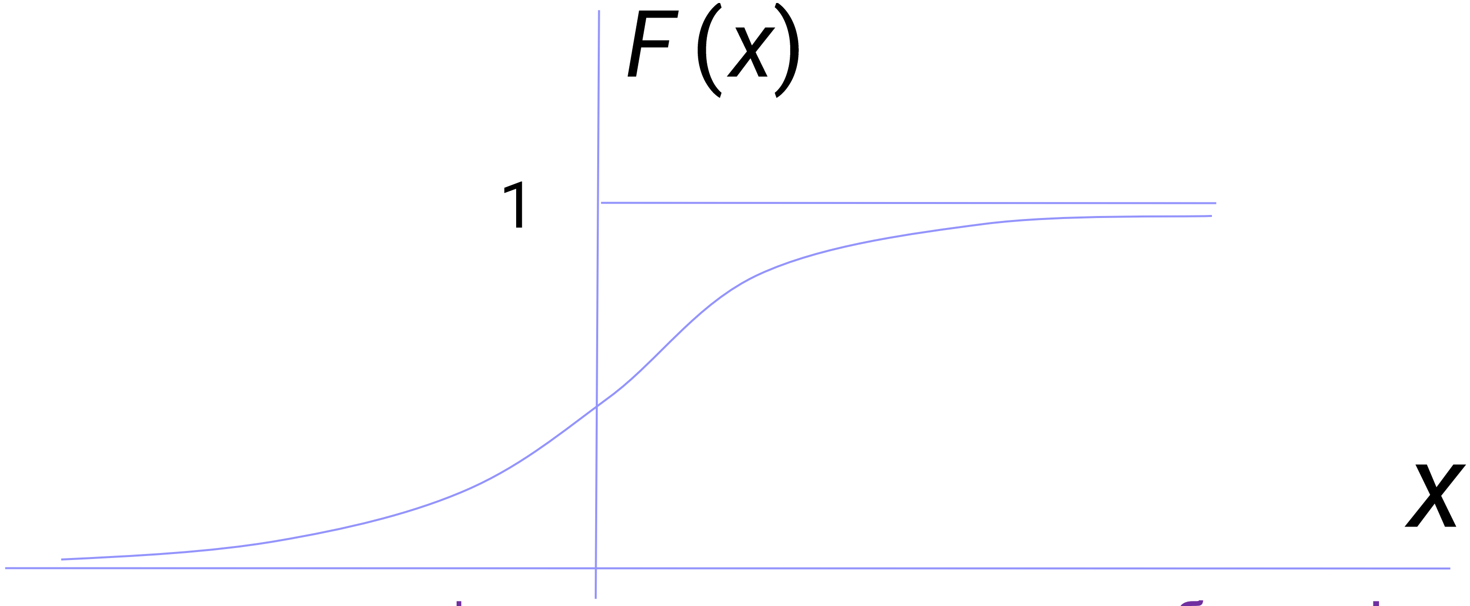


$\mathrm{P}\{\cdot\}$ – вероятностная мера (функция множеств) неудобна

Случайная величина

$\mathrm{P}\{\cdot\}$ – вероятностная мера (функция множеств) неудобна

$F(x) = \mathrm{P}\{\xi \le x\}$ – функция распределения с.в.

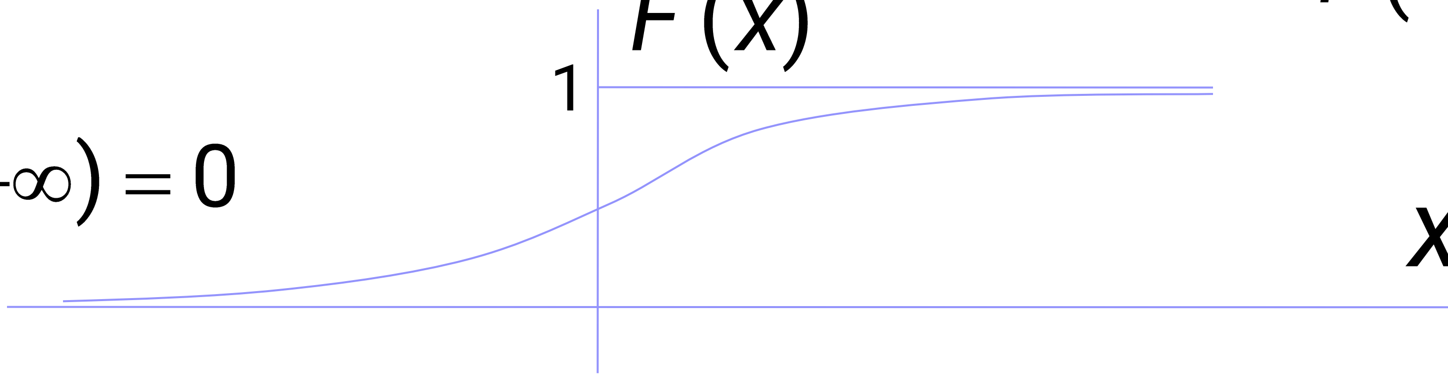


функция распределения не убывает !

$F(x) = \mathrm{P}\{\xi \le x\}$ – функция распределения с.в.

$$F(\infty) = 1$$

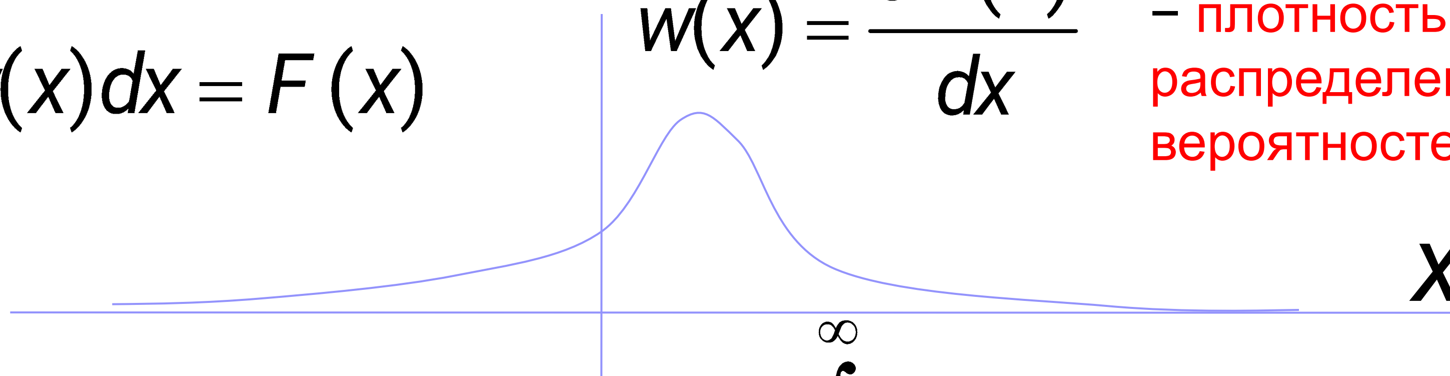
$$F(-\infty) = 0$$



не убывает, но может оставаться постоянной на участках оси

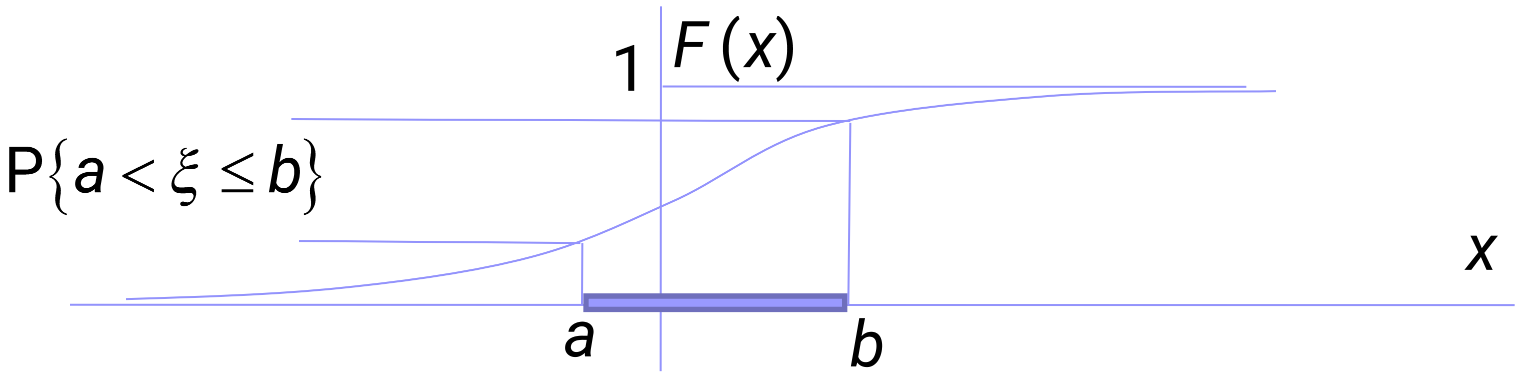
$$\int_{-\infty}^{x} w(x)dx = F(x)$$

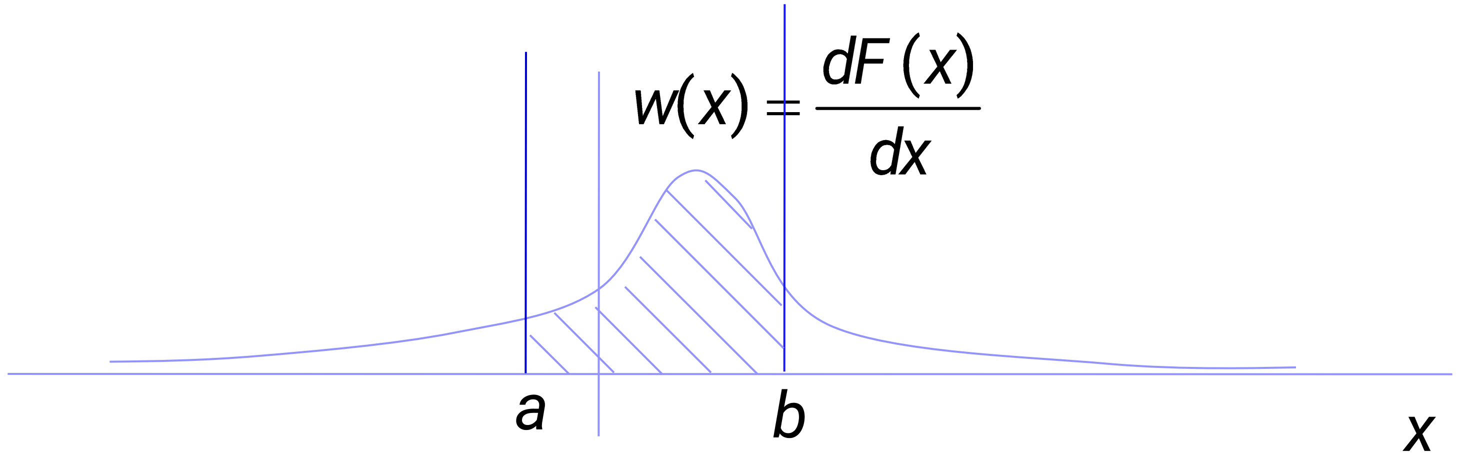
$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$ – плотность распределения вероятностей



$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$$

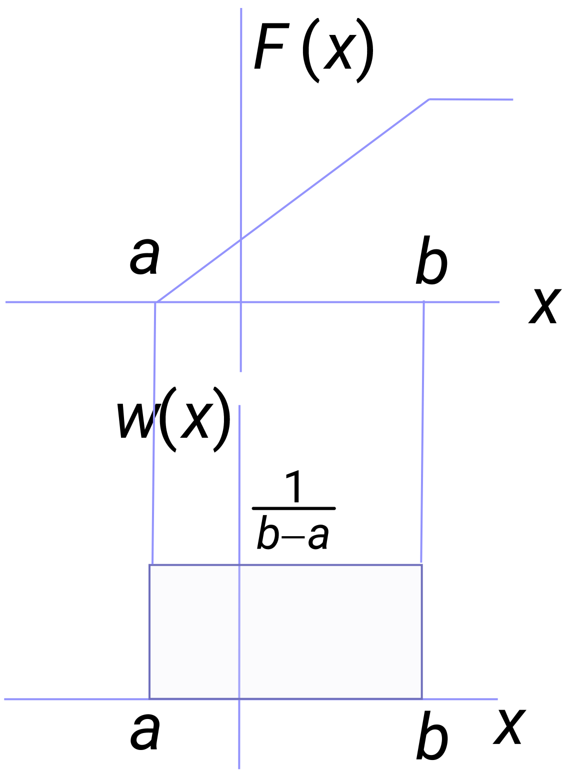
$$F(b) - F(a) = \mathrm{P}\{a < \xi \le b\}$$



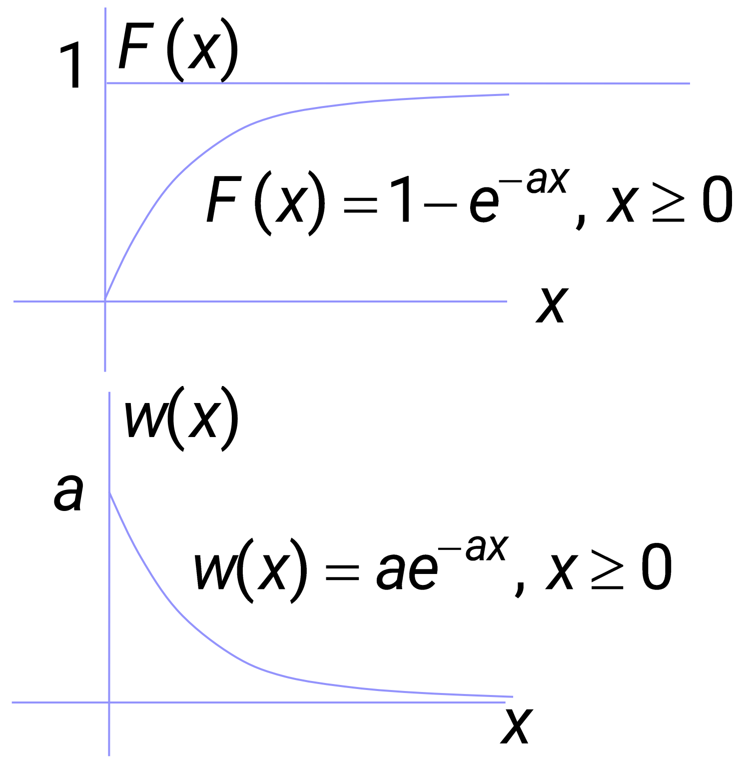


$$\int_a^b w(x)dx = F(b) - F(a) = \mathrm{P}\{a < \xi \le b\}$$

Примеры ФР и ПРВ



равномерное распределение



экспоненциальное распределение

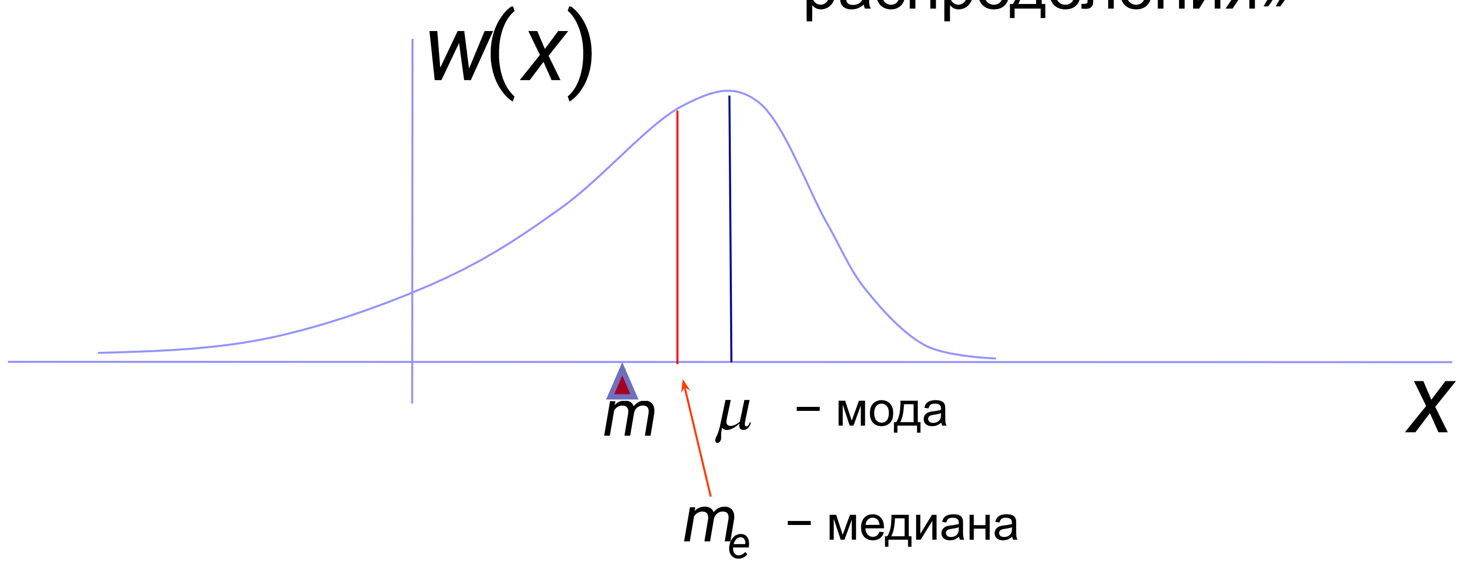
Числовые характеристики с.в.

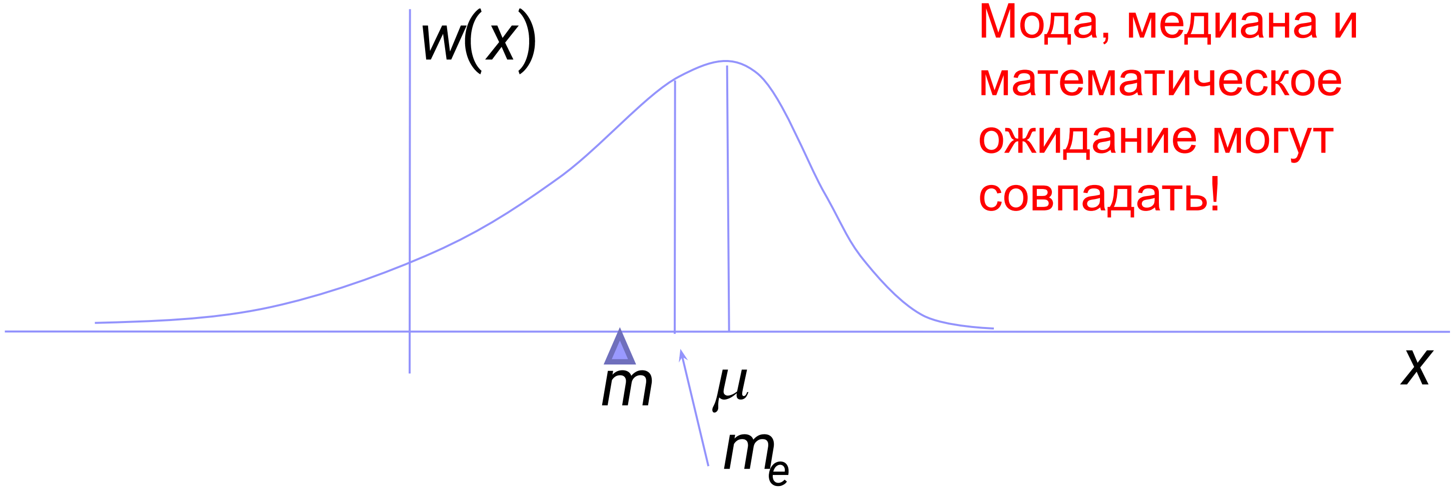
$$m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)dx = \overline{x^k} = \mathbf{E}\left\{x^k\right\}$$

– начальный момент k-го порядка

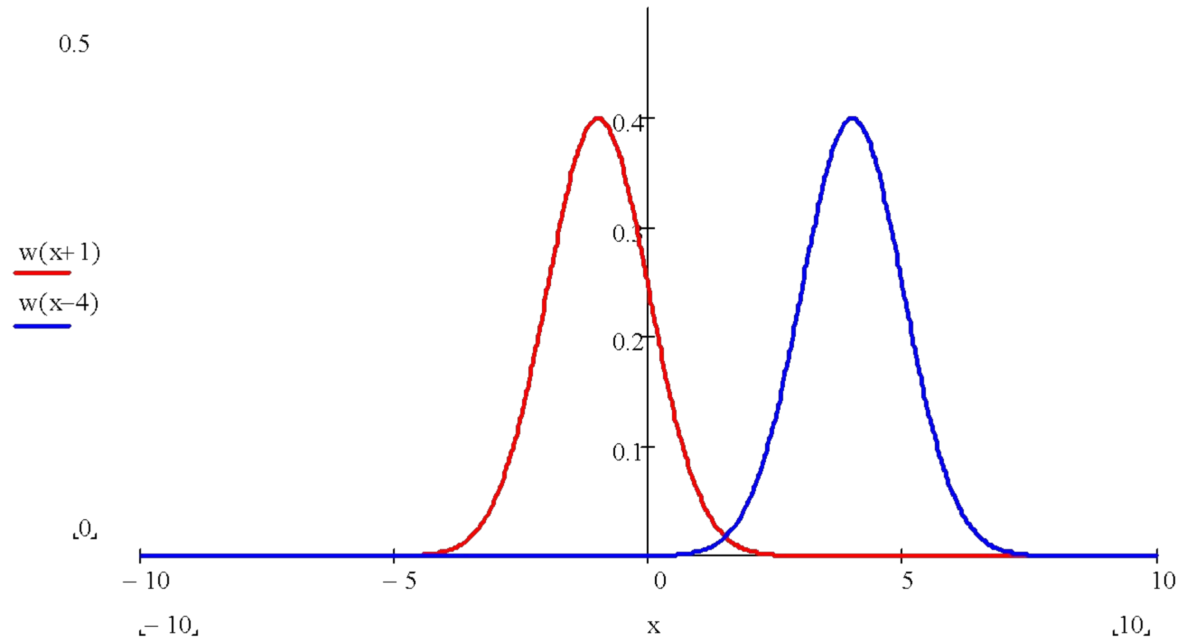
$$m = m_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx = \overline{x}$$

– начальный момент 1-го порядка, математическое ожидание, «центр распределения»

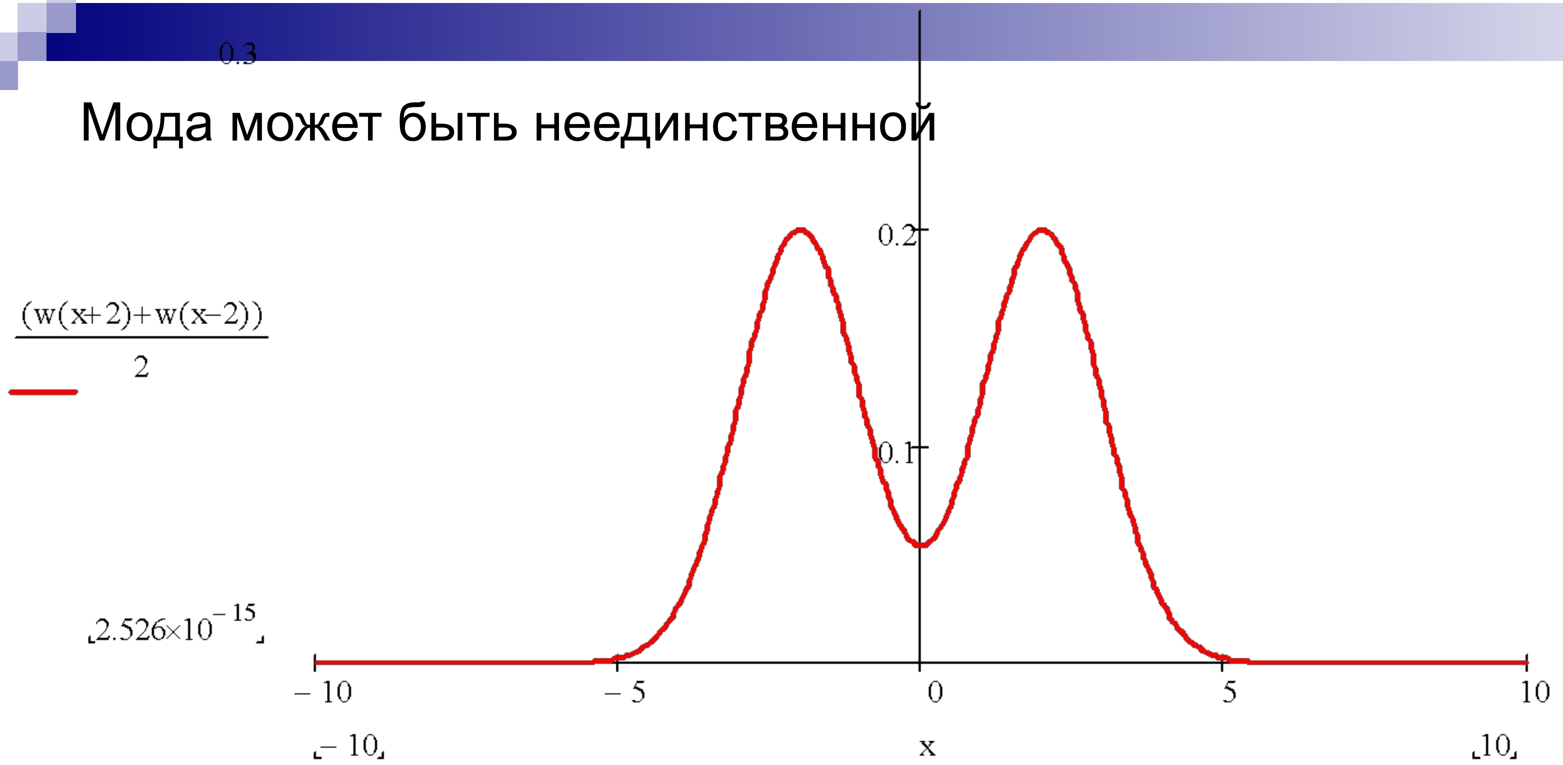




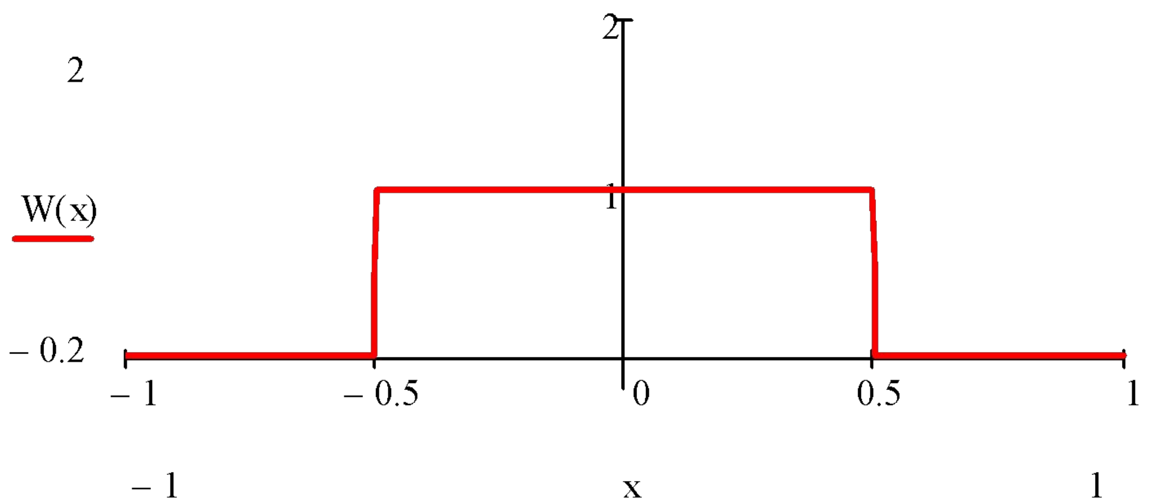
Мода, медиана и математическое ожидание могут совпадать!



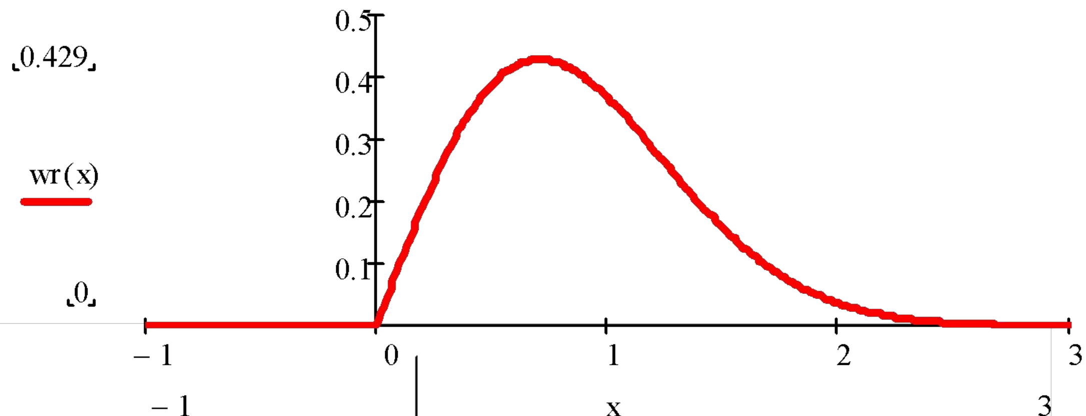
Мода может быть неединственной

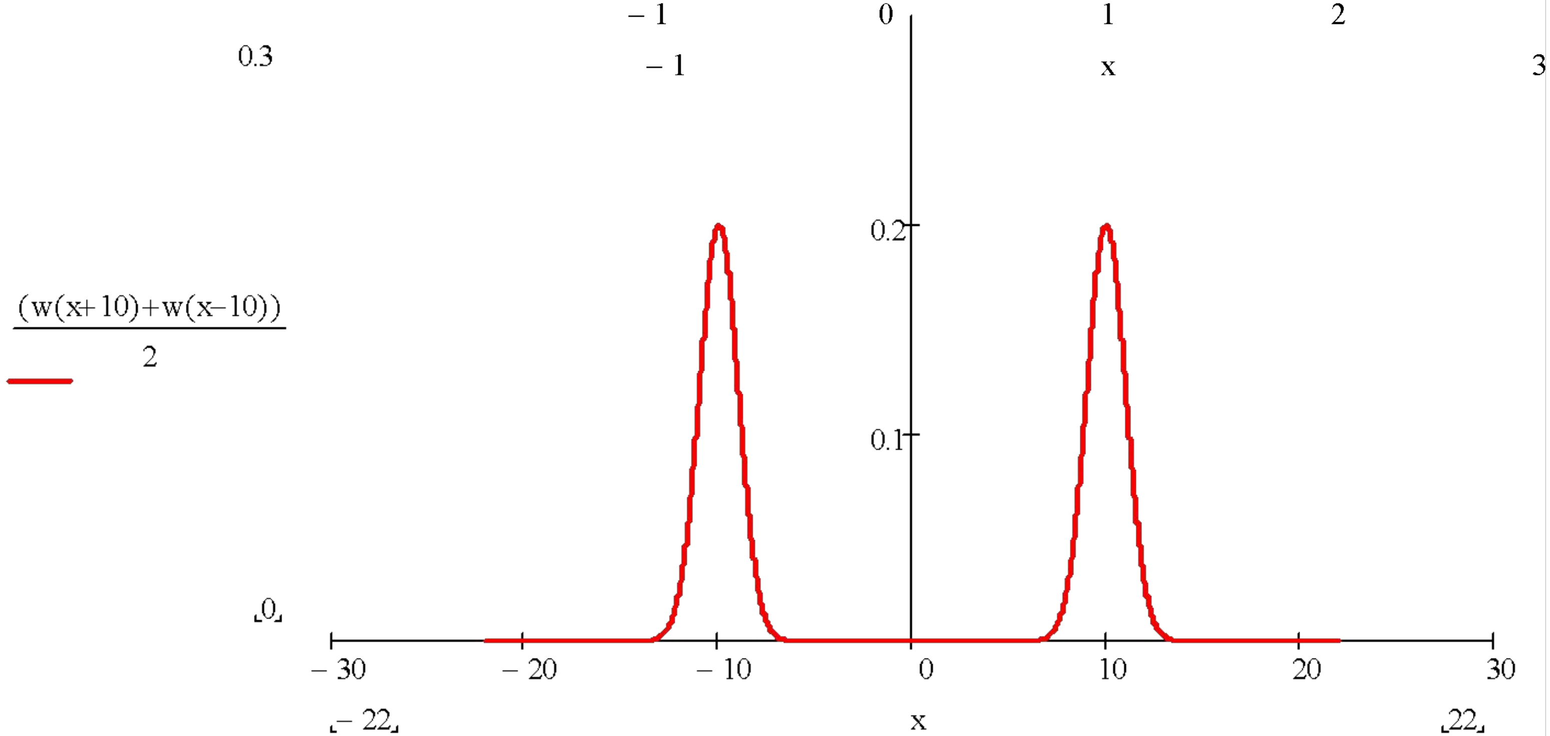


Мода может представлять собой интервал



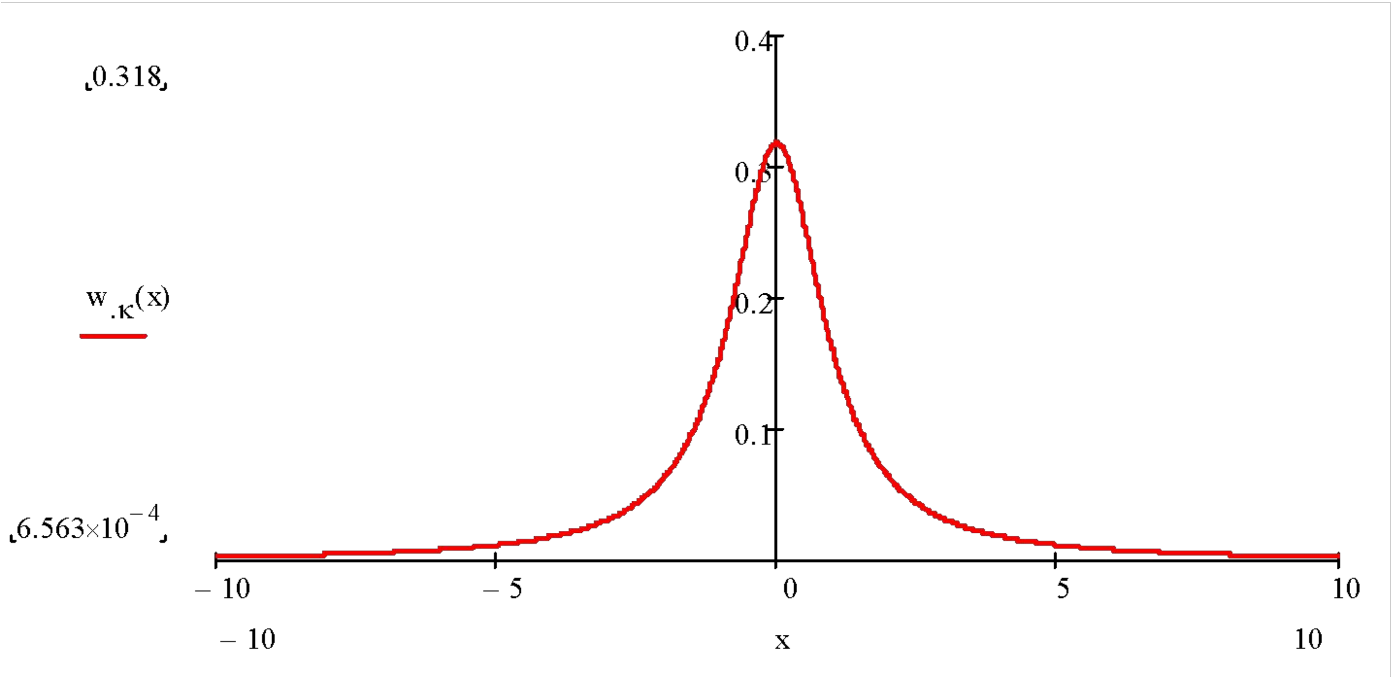
Медиана всегда существует, но может быть неединственна





Математическое ожидание (и другие моменты) существуют не всегда
(пример – распределение Коши)

$$w(x) = \frac{1}{\pi b\left\{\left[(x-a)/b\right]^2+1\right\}}$$



$$M_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k w(x)dx = \overline{(x-m)^k} = \mathbf{E}\left\{(x-m)^k\right\}$$

– центральный момент k-го порядка

$$D = M_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 w(x)dx = \overline{(x-m)^2} = \mathbf{E}\left\{(x-m)^2\right\}$$

– центральный момент 2-го порядка (дисперсия)

$\sigma = \sqrt{D}$ – среднеквадратическое отклонение (СКО)

$$D = M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 w(x)dx = \overline{(x-m)^2} = \mathbf{E}\left\{(x-m)^2\right\}$$

– центральный момент 2-го порядка (дисперсия)

$$\sigma = \sqrt{D}$$

– среднеквадратическое отклонение (СКО)

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)dx = \overline{x^2} = \mathbf{E}\left\{x^2\right\}$$

– средний квадрат

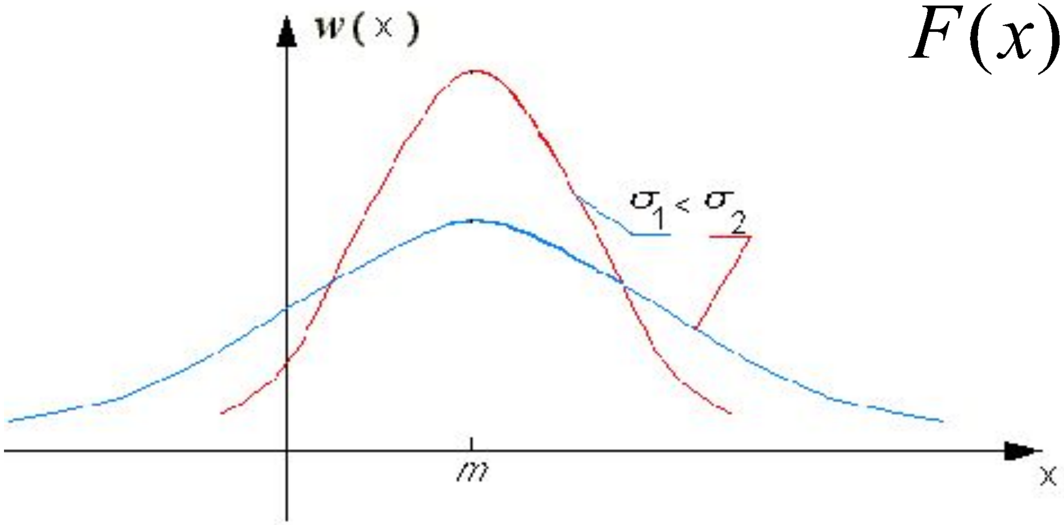
$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2mx + m^2)w(x)dx =$$

$$= m_2 - 2m^2 + m^2 = m_2 - m^2$$

Гауссово (нормальное) распределение

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{D}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

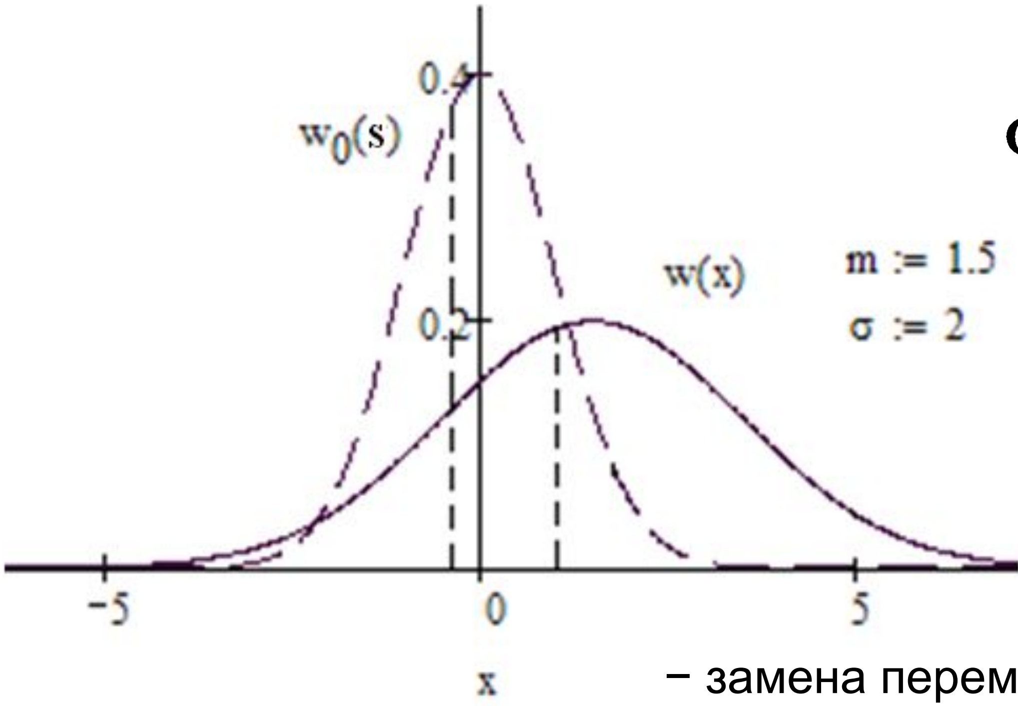


$$s = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

– стандартное нормальное распределение

Стандартное гауссово распределение



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} ds$$

– интеграл вероятностей

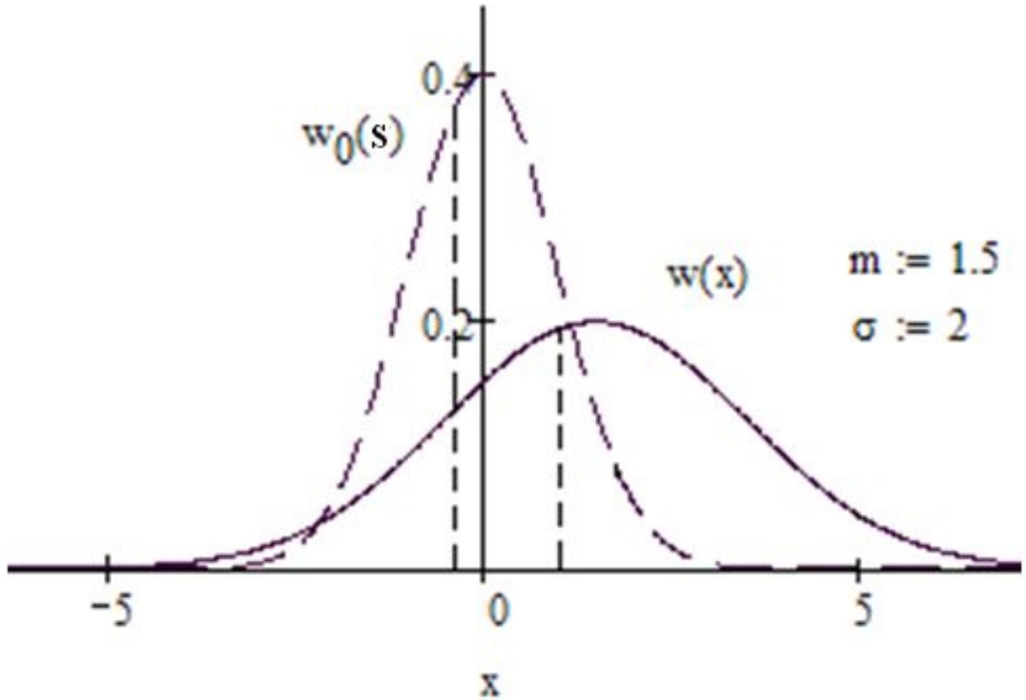
$$s = \frac{x-m}{\sigma}$$

– замена переменных, приводящая гауссову с.в. к стандартному нормальному распределению

$$F(5) = \mathrm{P}\{x \le 5\} = \mathrm{P}\{m + \sigma s \le 5\} = \mathrm{P}\left\{s \le \frac{5-m}{\sigma}\right\} =$$

$$= 0.5 + \Phi\left(\frac{5-m}{\sigma}\right)$$ (если порог больше МО)

Стандартное гауссово распределение



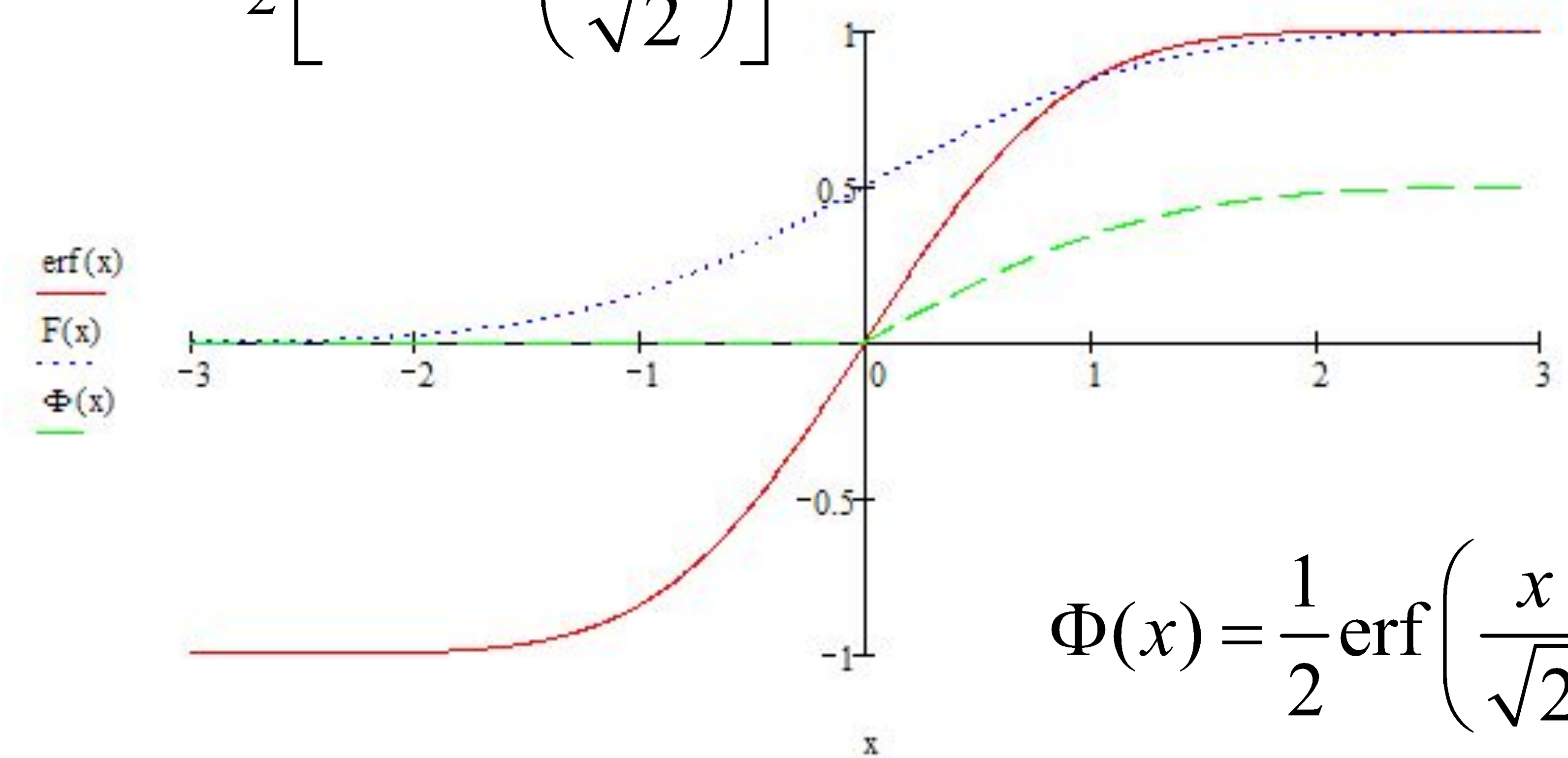
$$F(1) = \mathrm{P}\{x \le 1\} = \mathrm{P}\{m + \sigma s \le 1\} = \mathrm{P}\left\{s \le \frac{1-m}{\sigma}\right\} =$$

$$= 0.5 - \Phi\left(\frac{m-1}{\sigma}\right)$$ (если порог меньше МО)

Иногда используется *функция ошибок*

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$



$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Числовые характеристики с.в.

Иногда используются дополнительные числовые характеристики, грубо описывающие форму ПРВ

Коэффициент эксцесса

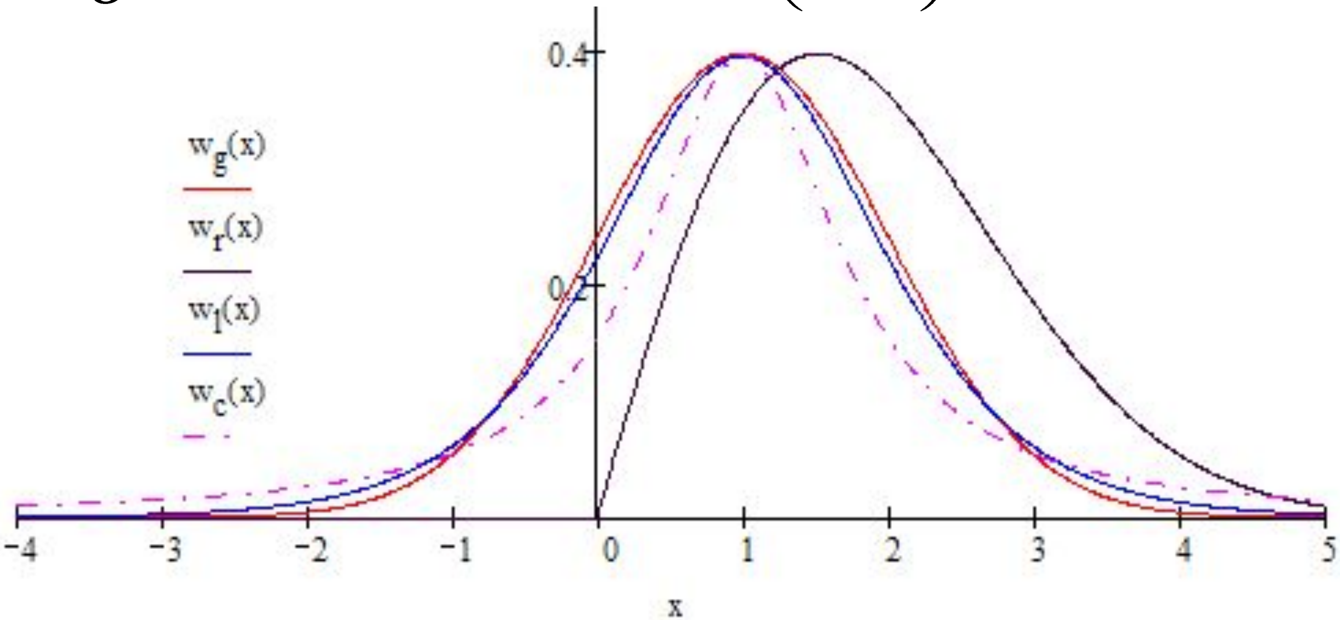
$$\beta_2 = \frac{M_4}{\sigma^4} \quad \text{(К. Пирсон)}$$

$$\gamma_2 = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3 \quad \text{(Р. Фишер)}$$

Коэффициент асимметрии

$$\gamma_1 = \frac{M_3}{\sigma^3} \quad \text{(Р. Фишер)}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{M_3}{\sigma^3}\right)^2 = \gamma_1^2 \quad \text{(К. Пирсон)}$$



Системы случайных величин

совместная функция распределения

$$F(x,y) = \mathrm{P}\{\xi \le x, \eta \le y\}$$

совместная ПРВ

$$w(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} w(x,y)dxdy$$

Свойства ФР

$$F(-\infty,-\infty)=0$$

$$F(\infty,\infty)=1$$

не убывает по
каждому аргументу

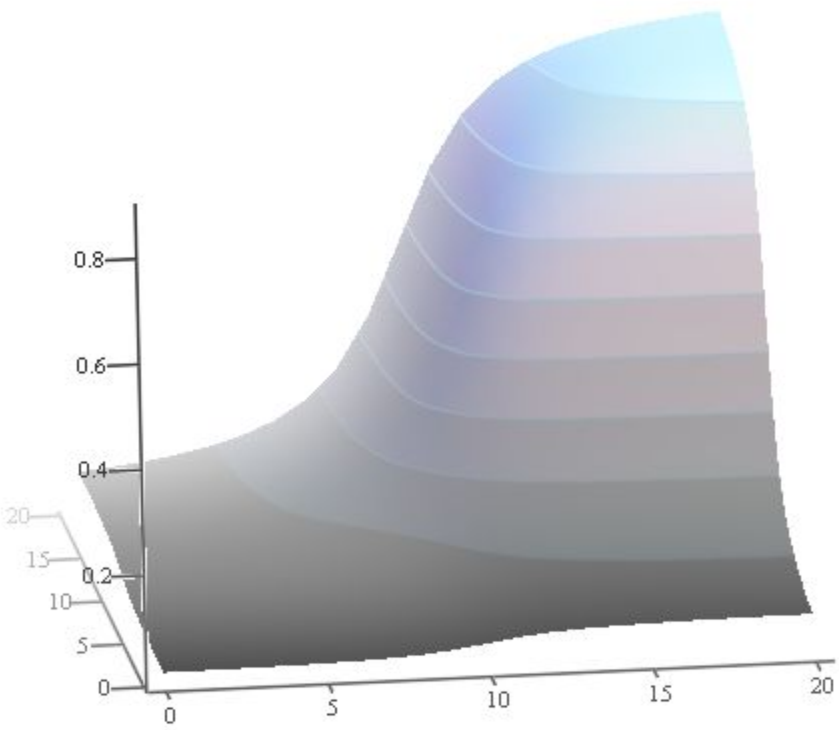
Свойства ПРВ

$$w(x,y)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)dxdy=1$$

Совместная (двумерная) функция распределения

$$F(x,y) = \mathrm{P}\{\xi \le x, \eta \le y\}$$

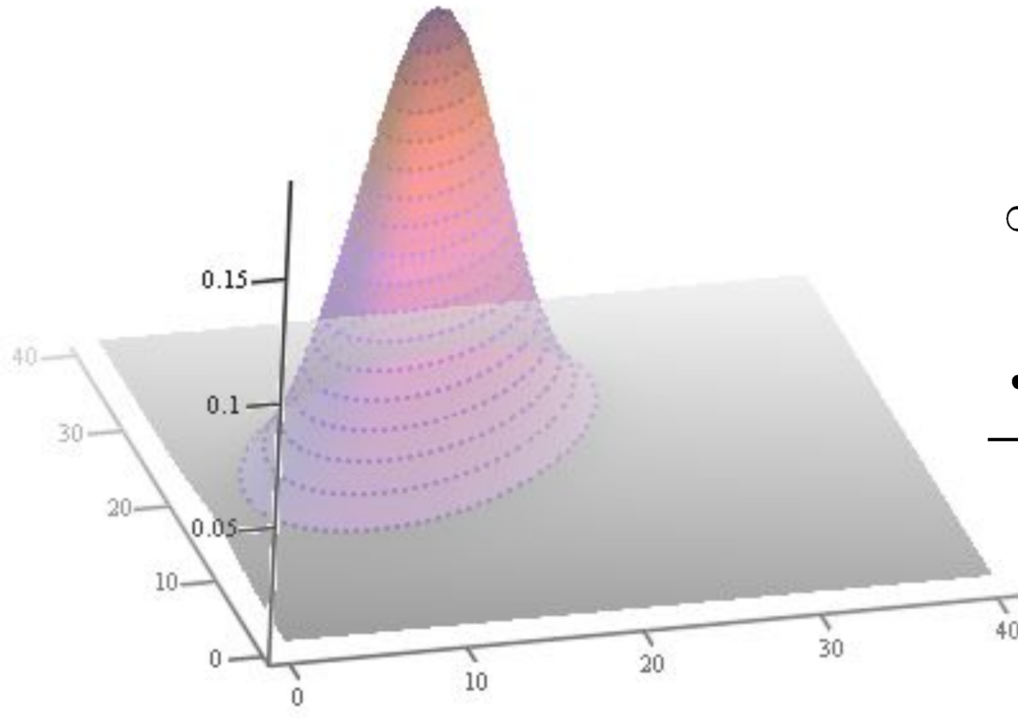


$$F(-\infty,-\infty) = 0$$

$$F(\infty,\infty) = 1$$

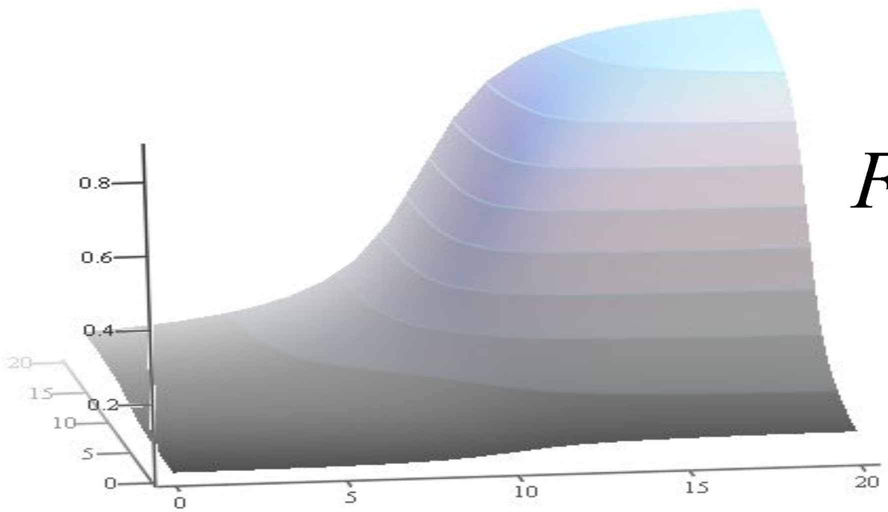
не убывает по каждому аргументу

Совместная (двумерная) плотность распределения вероятностей

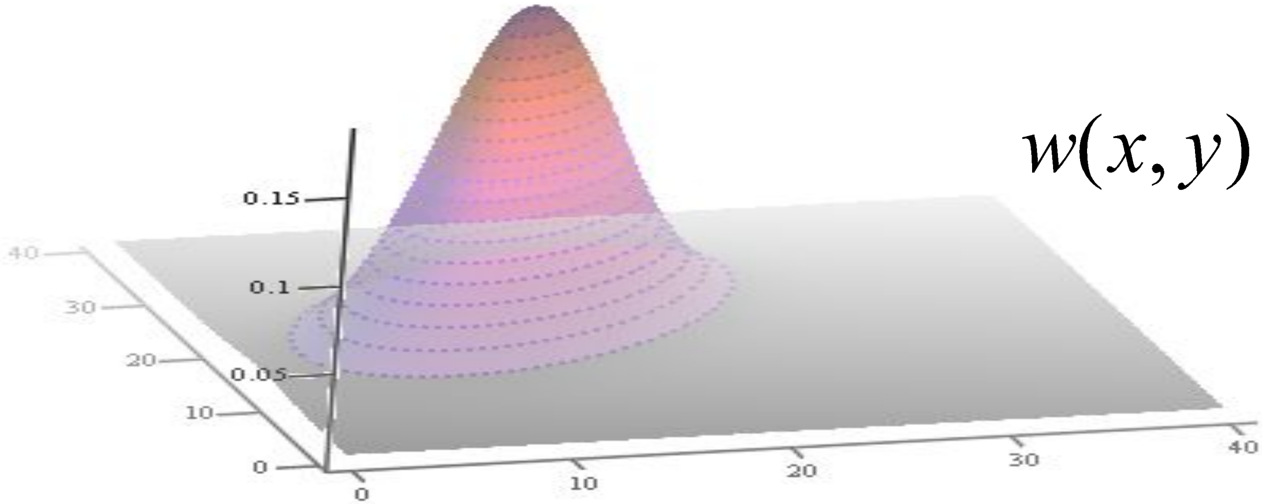


$$w(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)dxdy = 1$$



$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} w(x,y)\,dx\,dy$$



$$w(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Числовые характеристики системы 2 случайных величин

Начальные смешанные моменты

$$m_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n w(x,y)dxdy$$

Центральные смешанные моменты

$$M_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k (y-m_y)^n w(x,y)dxdy$$

$$m_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyw(x,y)dxdy = k_{xy}$$

корреляционный момент

$$M_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)w(x,y)dxdy = R_{xy}$$

ковариационный момент

Пример. Пара гауссовских случайных величин

$$w(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

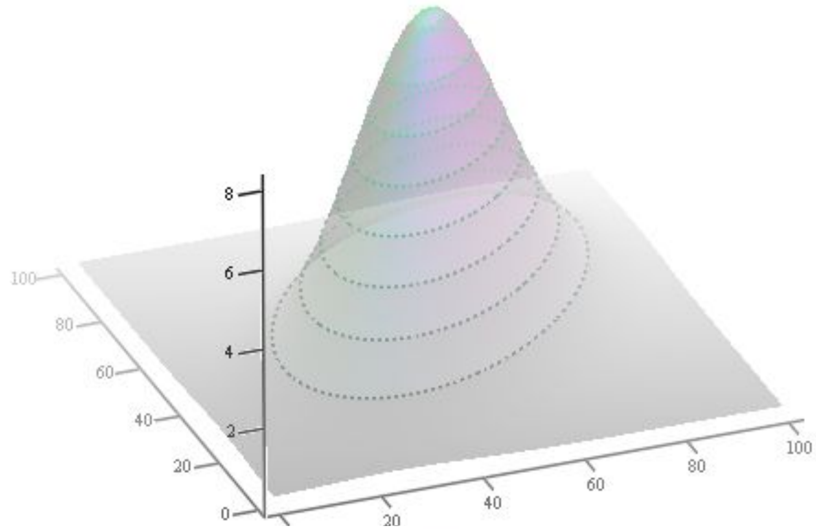
$$r=\frac{\overline{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{R_{x_1x_2}}{\sigma_1\sigma_2}$$

коэффициент корреляции

При нулевом коэффициенте корреляции

$$w(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}=w(x_1)w(x_2)$$

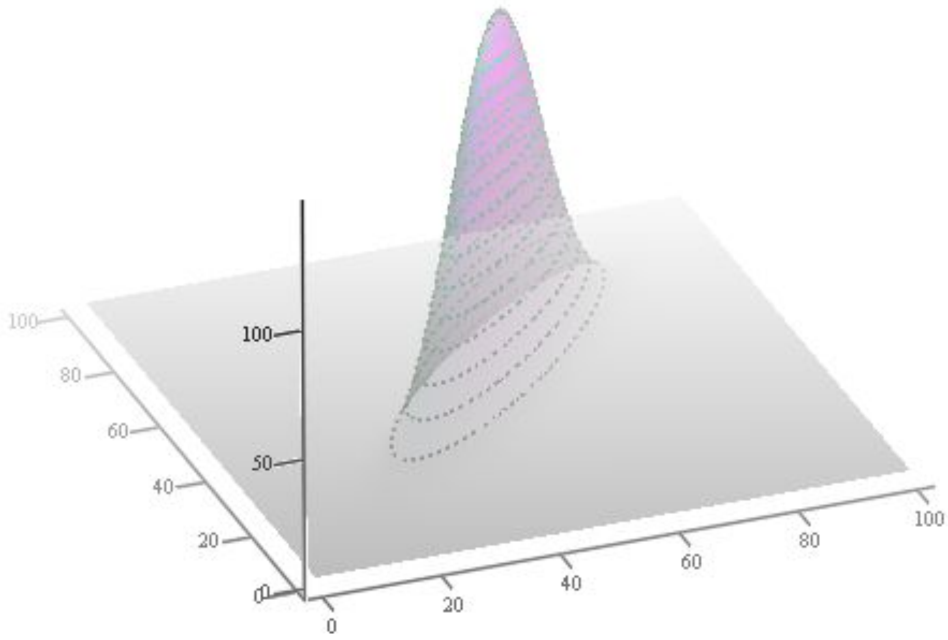
Некоррелированные гауссовские с.в. – *независимы*!



$$m_1 = m_2 = 0.5$$

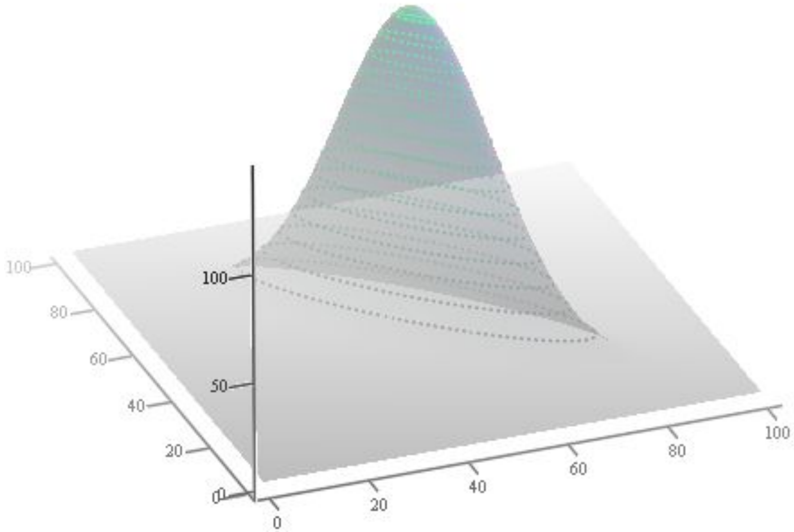
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.15$$

$$r = 0.5$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$$

$$r = 0.9$$



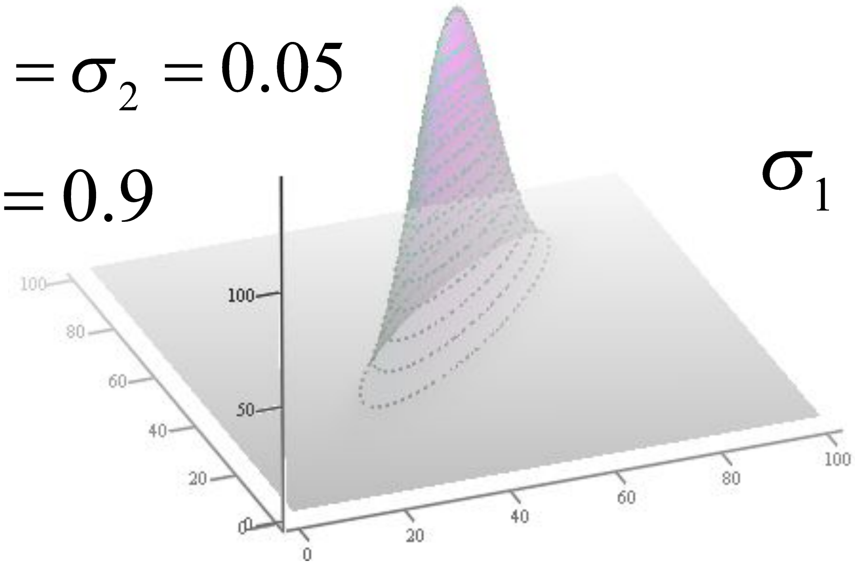
$$m_1 = m_2 = 0.5$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$$

$$r = -0.9$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$$

$$r = 0.9$$



$$r = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.15$$