

Кафедра «КРЭМС»

Основы теории СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Зырянов

Юрий Трифонович

доктор технических наук

профессор

Основные понятия теории вероятностей

Все сигналы и *все* помехи являются случайными, то есть непредсказуемыми.

Математическими моделями случайных сигналов и помех служат *случайные процессы*.

В основе лежит понятие *случайного события*

Пространство элементарных событий (*генеральная совокупность*) Ω

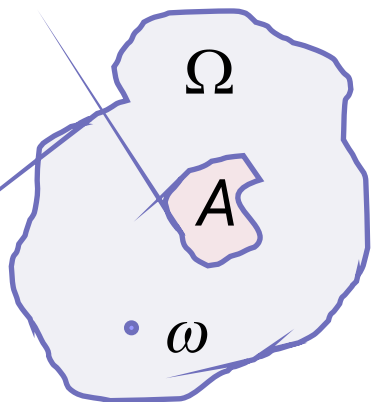
элементарное событие $\omega \in \Omega$

A – случайное событие

$A \subset \Omega$



Основные понятия теории вероятностей



A – случайное событие

$$A \subset \Omega$$

ω – элементарное случайное событие

$$\omega \in \Omega$$

$P\{\cdot\}$ – вероятностная мера (функция множеств)

$$P: 2^{\Omega} \rightarrow [0; 1]$$

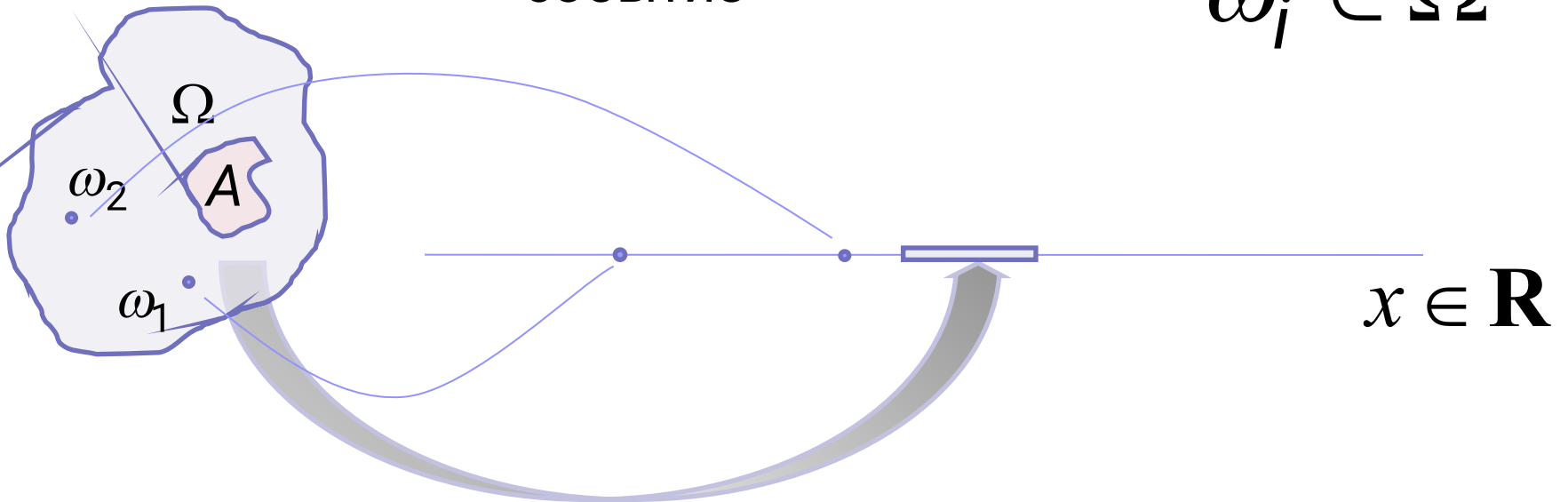
$P\{A\}$ – вероятность случайного события A

$$P\{\Omega\} = 1 \quad \text{достоверное событие}$$

Случайная величина

ω_j – элементарное случайное событие

$$\omega_j \in \Omega$$

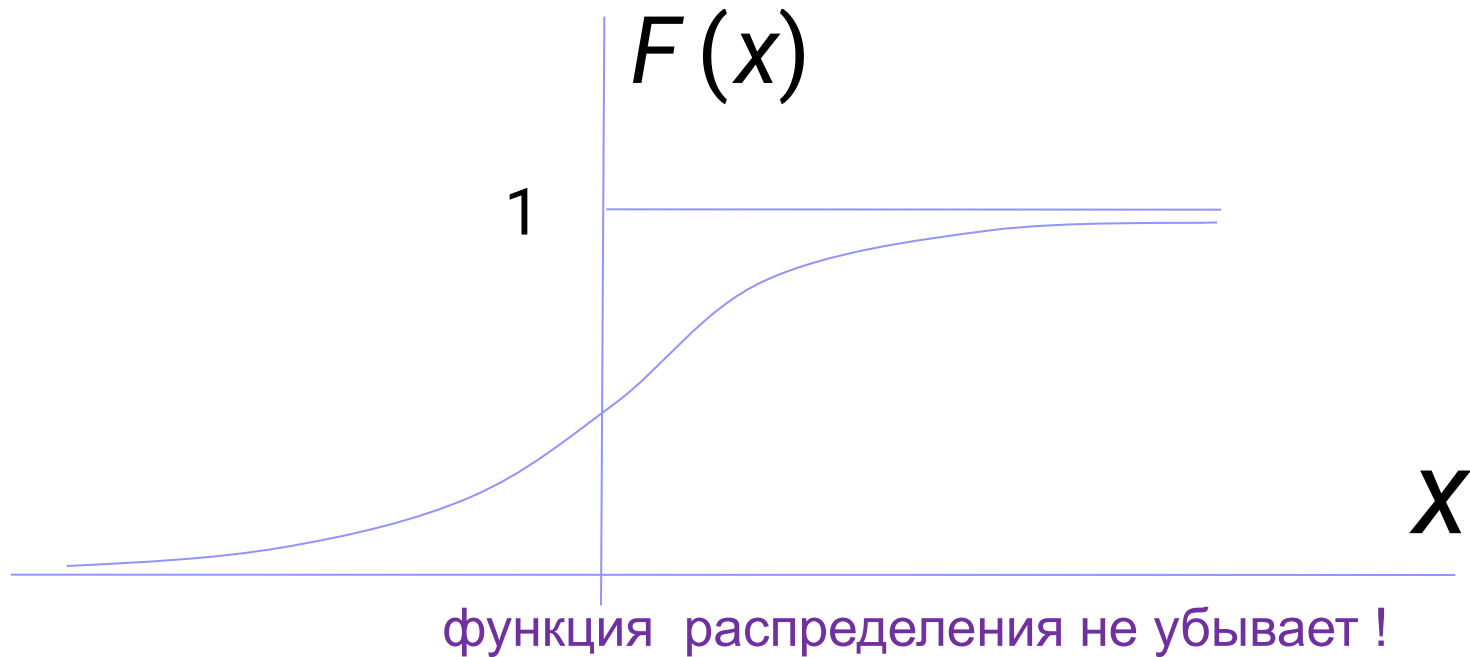


$P\{\cdot\}$ – вероятностная мера (функция множеств) неудобна

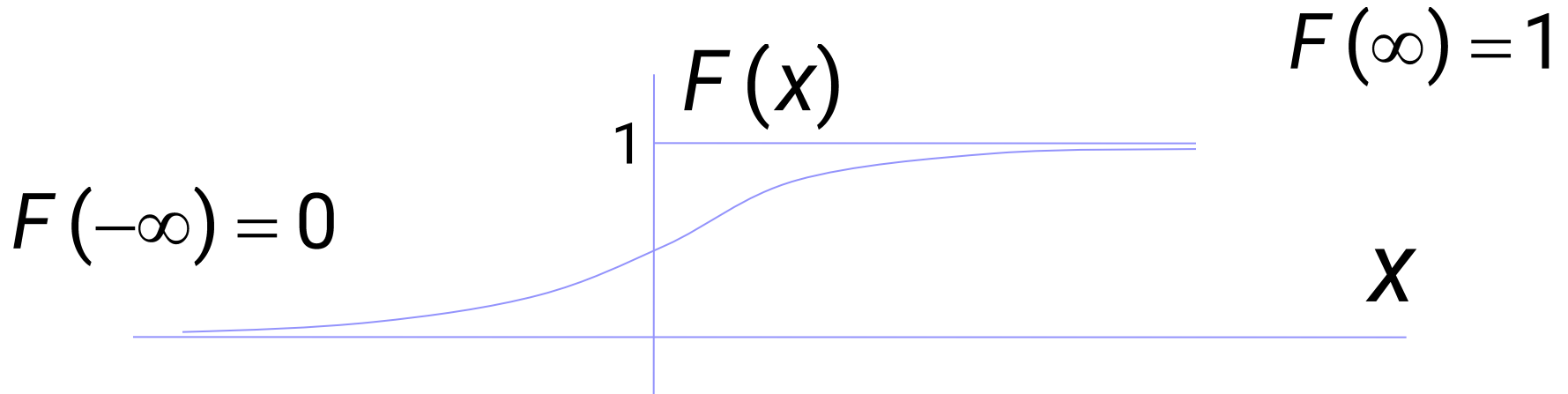
Случайная величина

$P\{\cdot\}$ – вероятностная мера (функция множеств) неудобна

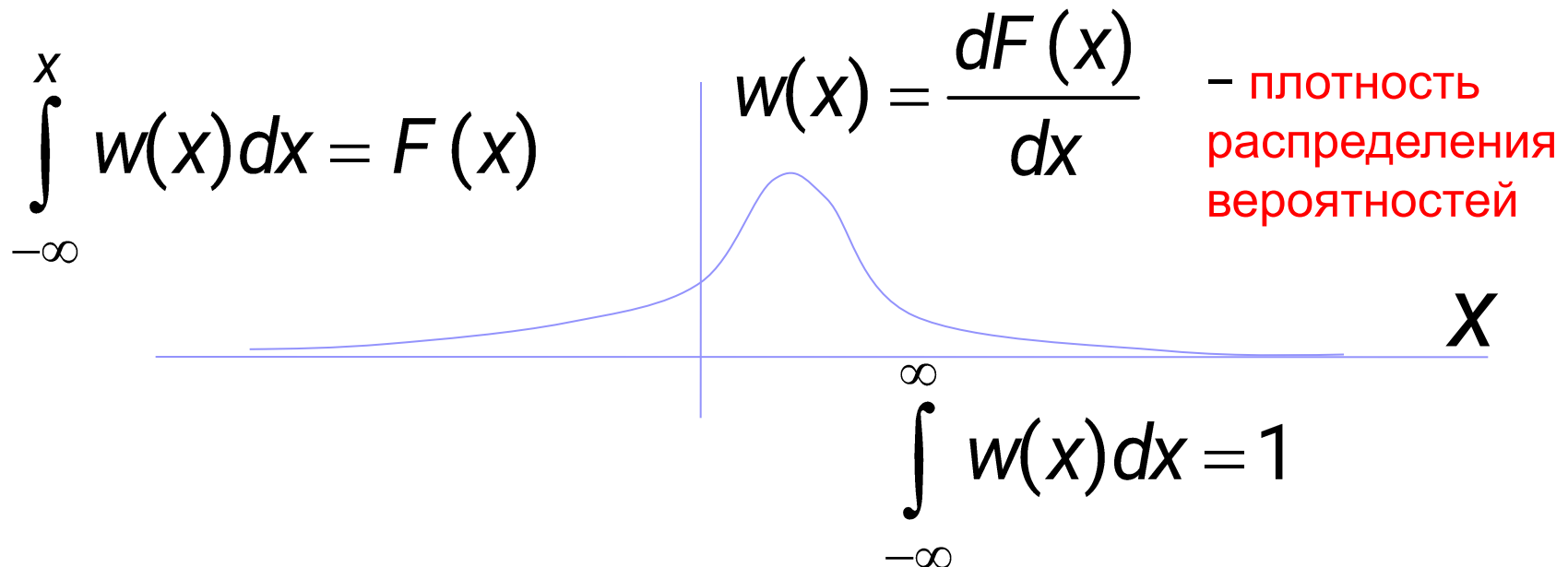
$F(x) = P\{\xi \leq x\}$ – функция распределения с.в.



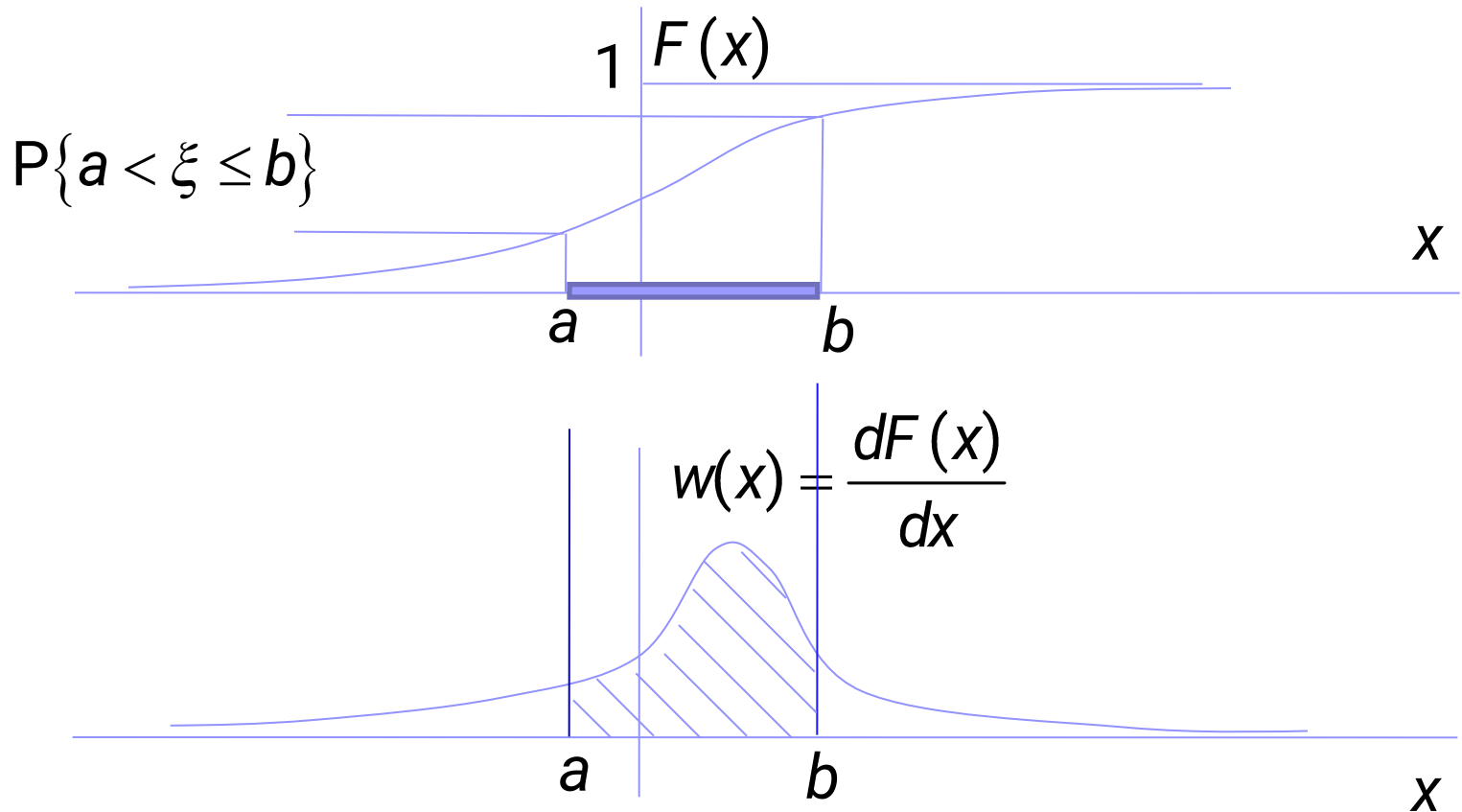
$F(x) = P\{\xi \leq x\}$ – функция распределения с.в.



не убывает, но может оставаться постоянной на участках оси

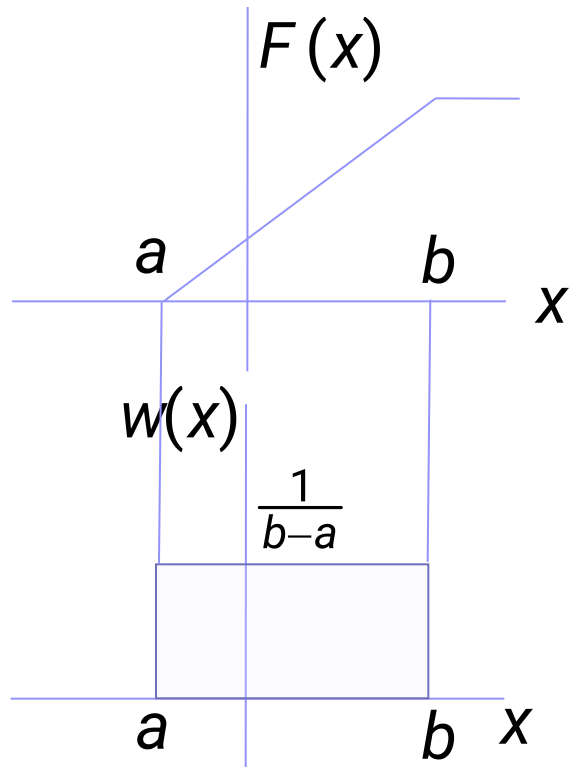


$$F(b) - F(a) = P\{a < \xi \leq b\}$$

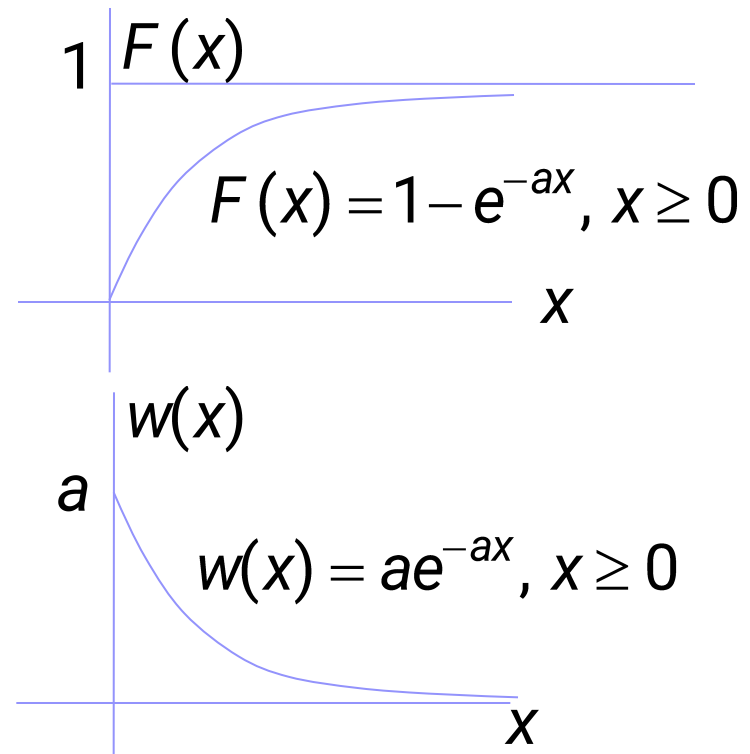


$$\int_a^b w(x) dx = F(b) - F(a) = P\{a < \xi \leq b\}$$

Примеры ФР и ПРВ



равномерное распределение



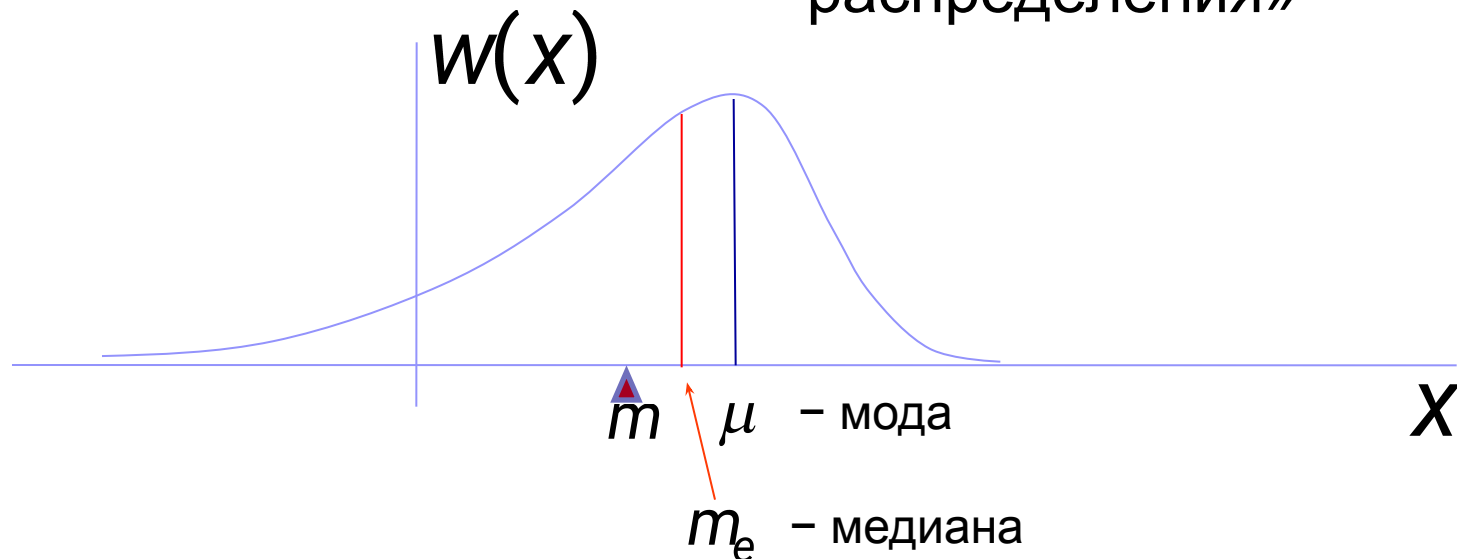
экспоненциальное распределение

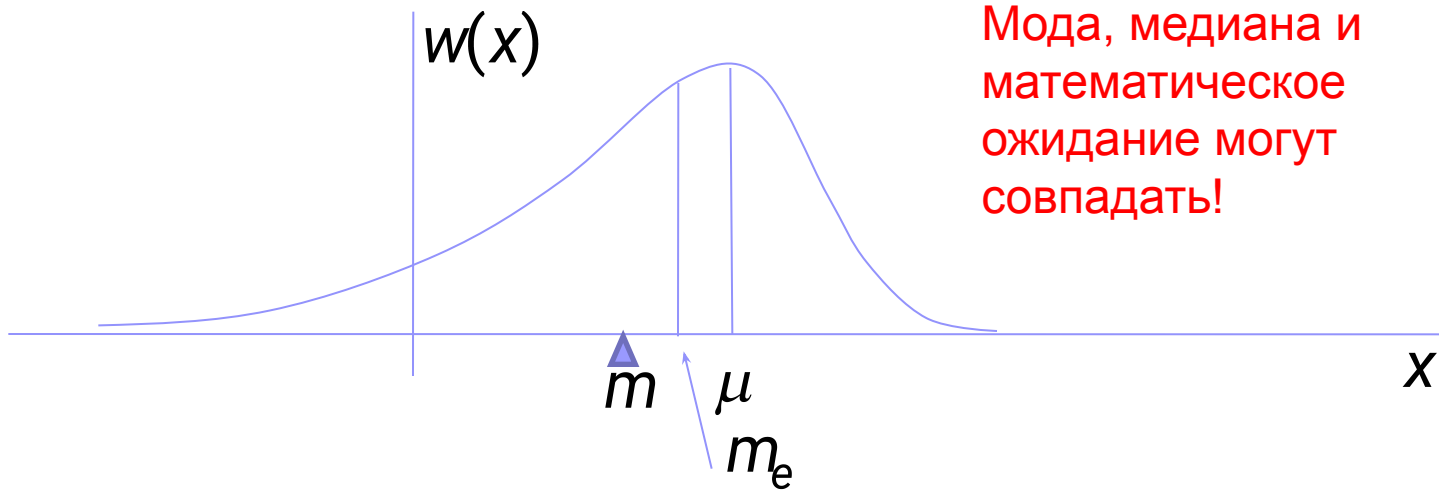
Числовые характеристики с.в.

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x) dx = \overline{x^k} = \mathbf{E} \left\{ x^k \right\}$$

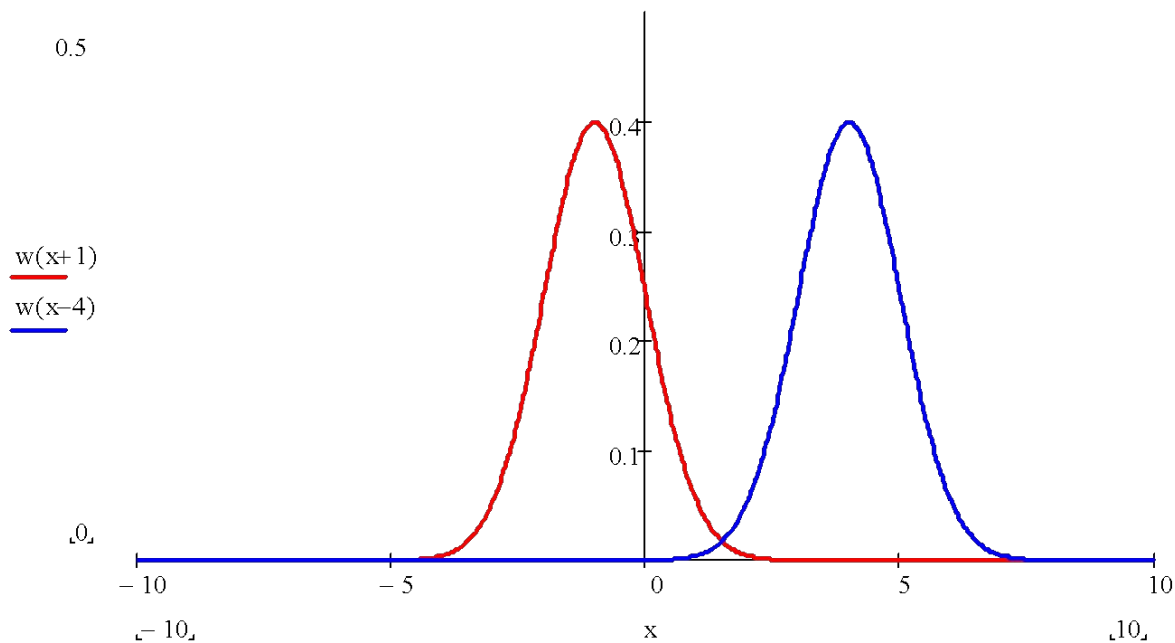
– начальный момент k -го порядка

$$m = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx = \bar{x} \quad \text{– начальный момент 1-го порядка, математическое ожидание, «центр распределения»}$$



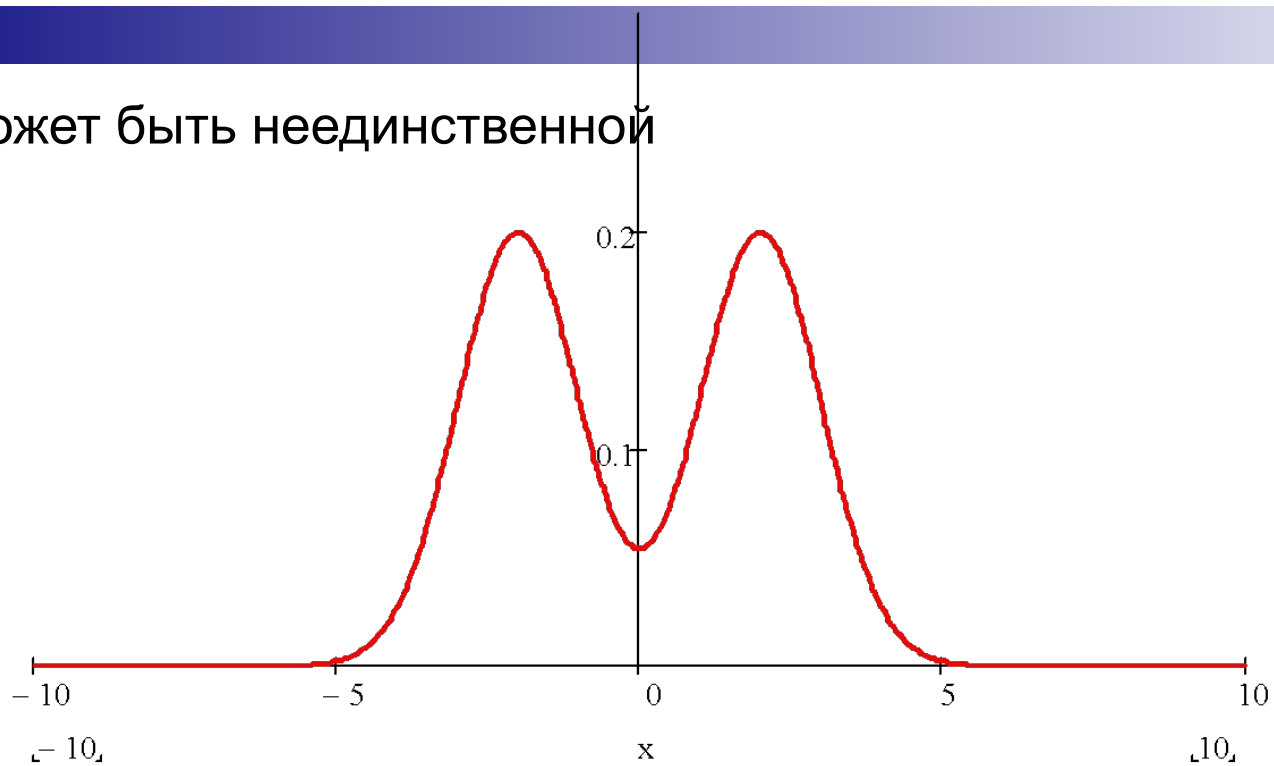


Мода, медиана и математическое ожидание могут совпадать!

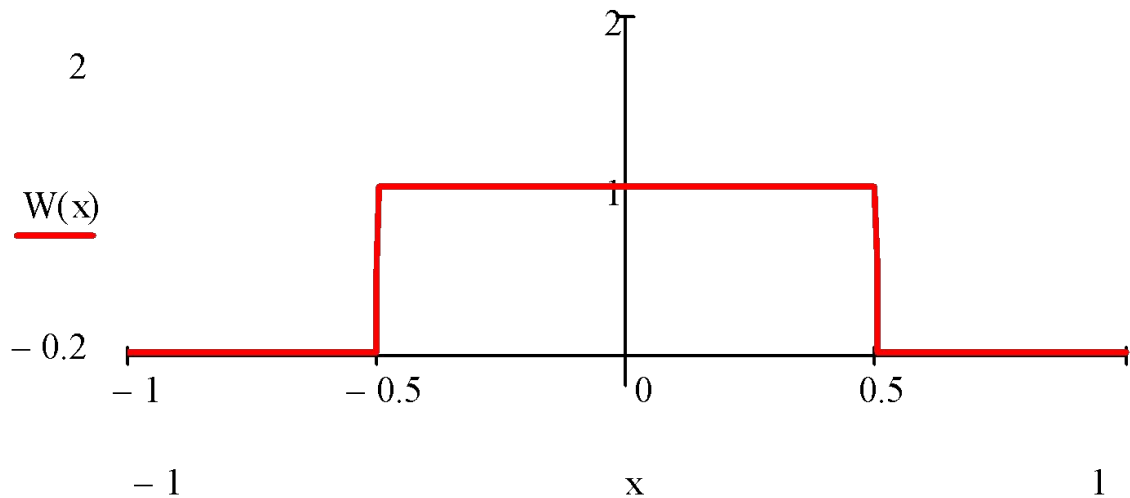


Мода может быть неединственной

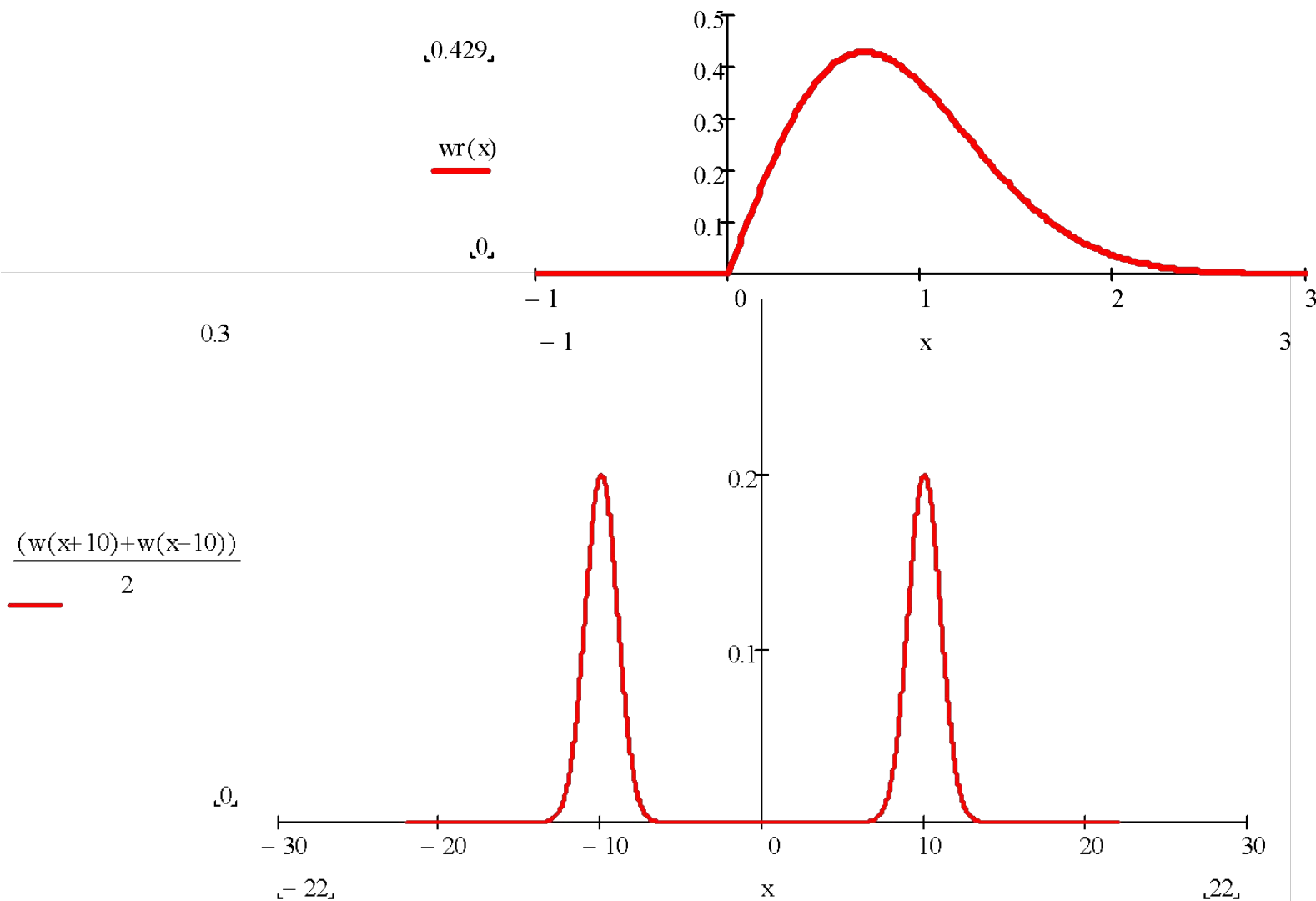
$$\frac{(w(x+2)+w(x-2))}{2}$$

 2.526×10^{-15}


Мода может представлять собой интервал

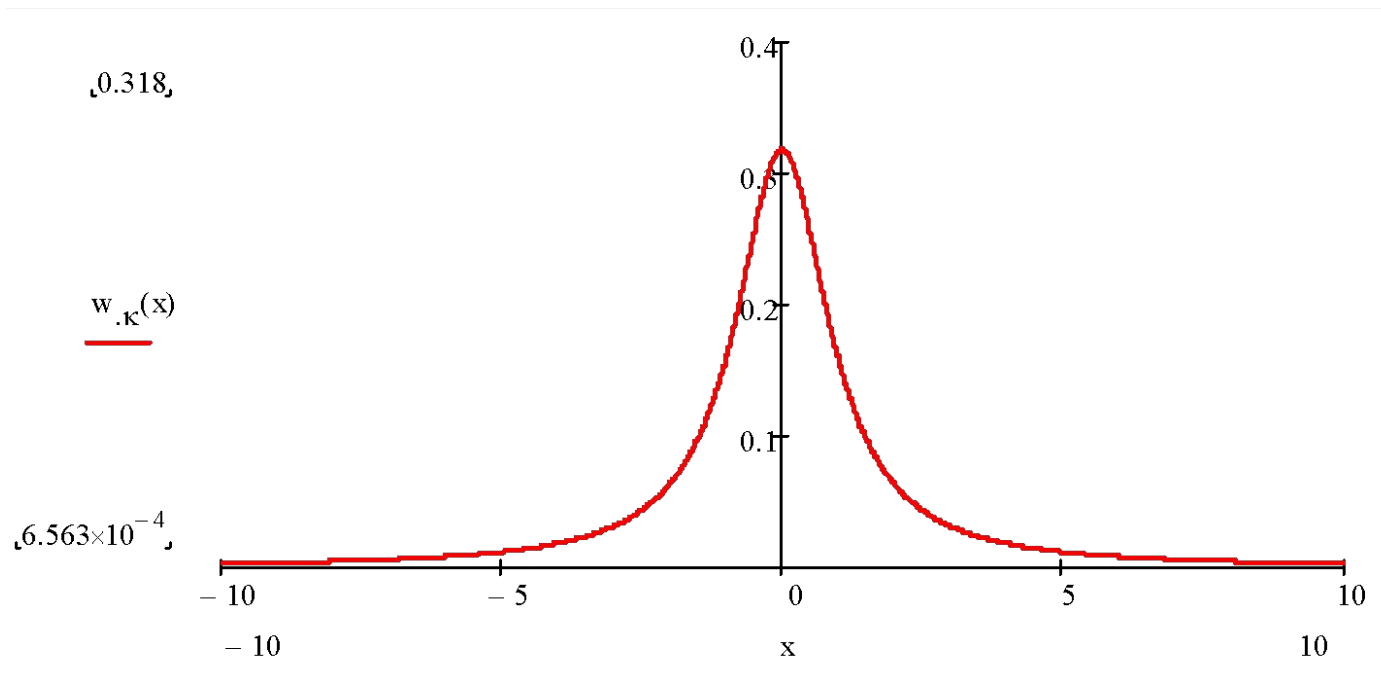


Медиана всегда существует, но может быть неединственна



Математическое ожидание (и другие моменты) существуют не всегда (пример – распределение Коши)

$$w(x) = \frac{1}{\pi b \left\{ \left[(x - a) / b \right]^2 + 1 \right\}}$$



$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k w(x) dx = \overline{(x - m)^k} = \mathbf{E} \left\{ (x - m)^k \right\}$$

– центральный момент k -го порядка

$$D = M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 w(x) dx = \overline{(x - m)^2} = \mathbf{E} \left\{ (x - m)^2 \right\}$$

– центральный момент 2-го порядка (дисперсия)

$$\sigma = \sqrt{D} \quad \text{– среднее квадратическое отклонение (СКО)}$$

$$D = M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 w(x) dx = \overline{(x - m)^2} = \mathbf{E} \left\{ (x - m)^2 \right\}$$

- центральный момент 2-го порядка (дисперсия)

$$\sigma = \sqrt{D} \quad \text{- среднеквадратическое отклонение (СКО)}$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx = \overline{x^2} = \mathbf{E} \left\{ x^2 \right\} \quad \text{- средний квадрат}$$

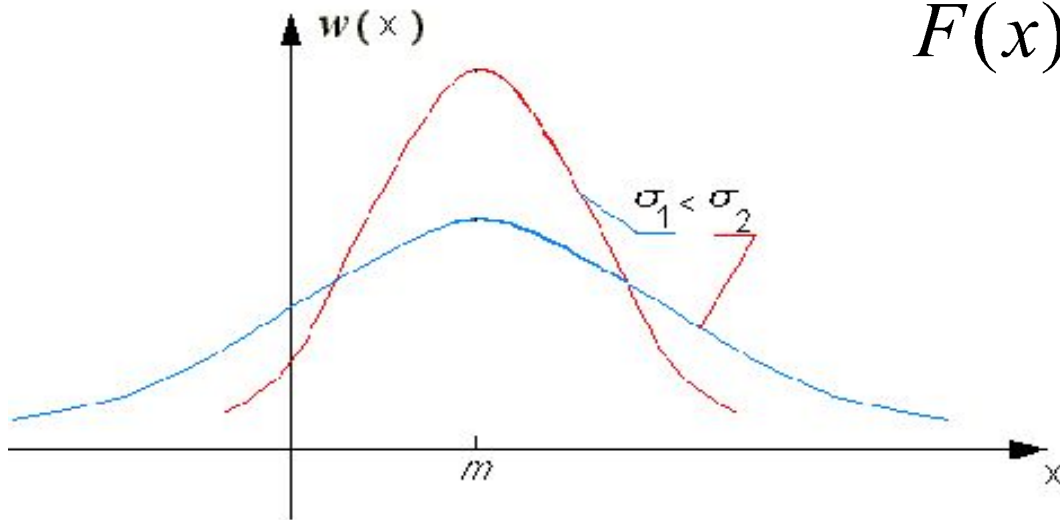
$$\begin{aligned} D &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2mx + m^2) w(x) dx = \\ &= m_2 - 2m^2 + m^2 = m_2 - m^2 \end{aligned}$$

Гауссово (нормальное) распределение

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{D}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

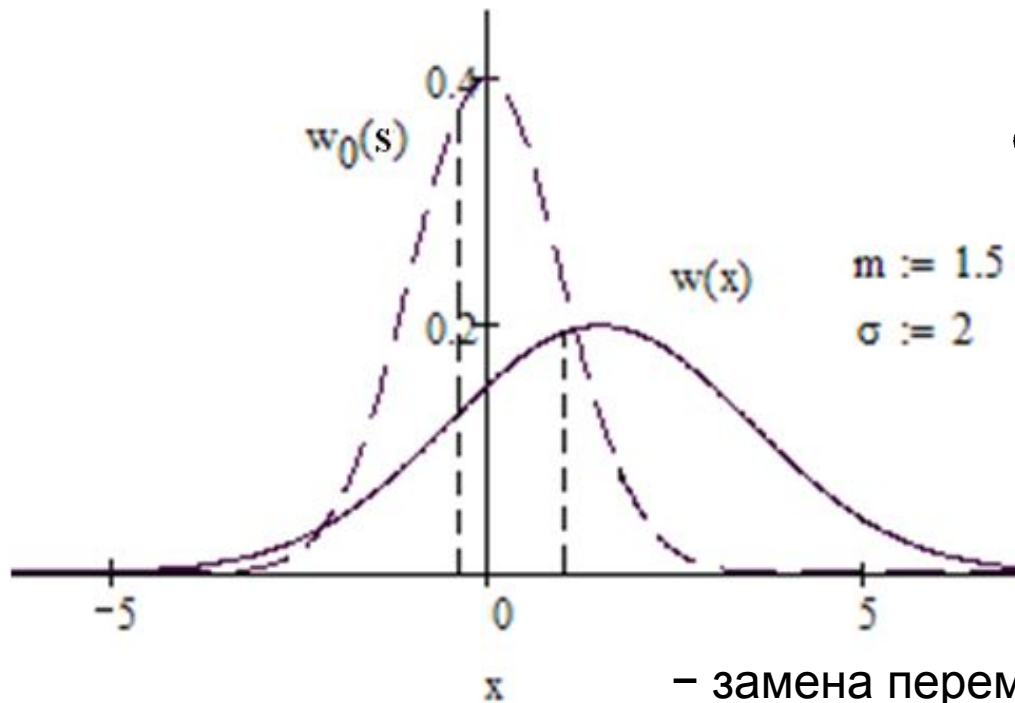


$$s = \frac{x - m}{\sigma}$$

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

– стандартное нормальное распределение

Стандартное гауссово распределение



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} ds$$

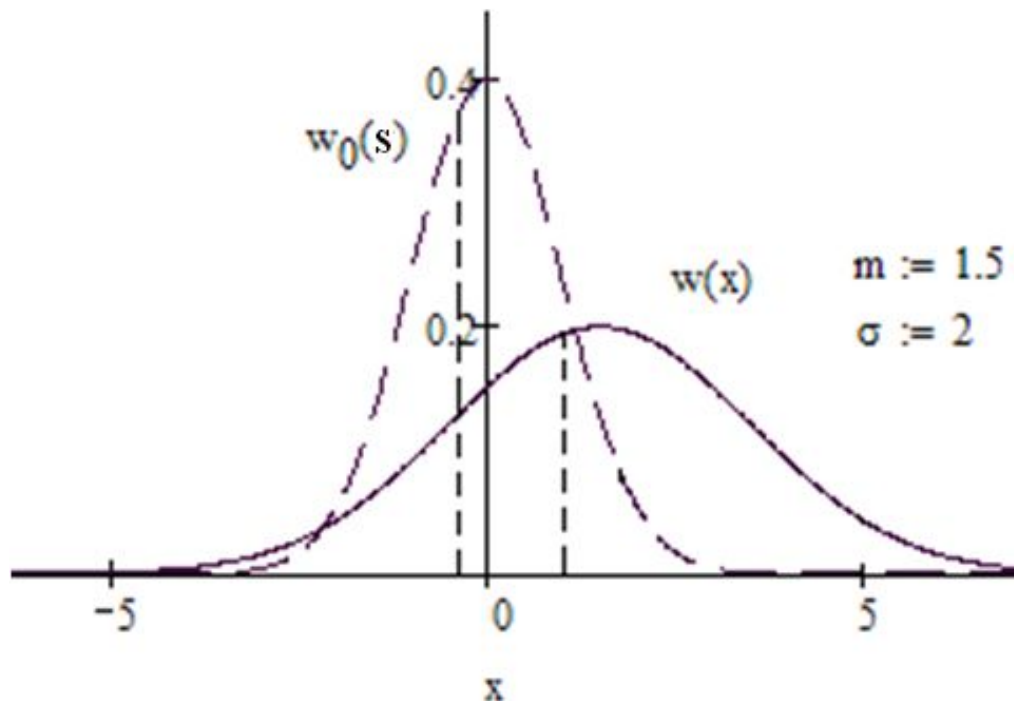
– интеграл вероятностей

$$s = \frac{x - m}{\sigma}$$

– замена переменных, приводящая гауссову с.в. к стандартному нормальному распределению

$$\begin{aligned}
 F(5) &= \mathbf{P}\{x \leq 5\} = \mathbf{P}\{m + \sigma s \leq 5\} = \mathbf{P}\left\{s \leq \frac{5 - m}{\sigma}\right\} = \\
 &= 0.5 + \Phi\left(\frac{5 - m}{\sigma}\right) \quad (\text{если порог больше МО})
 \end{aligned}$$

Стандартное гауссово распределение

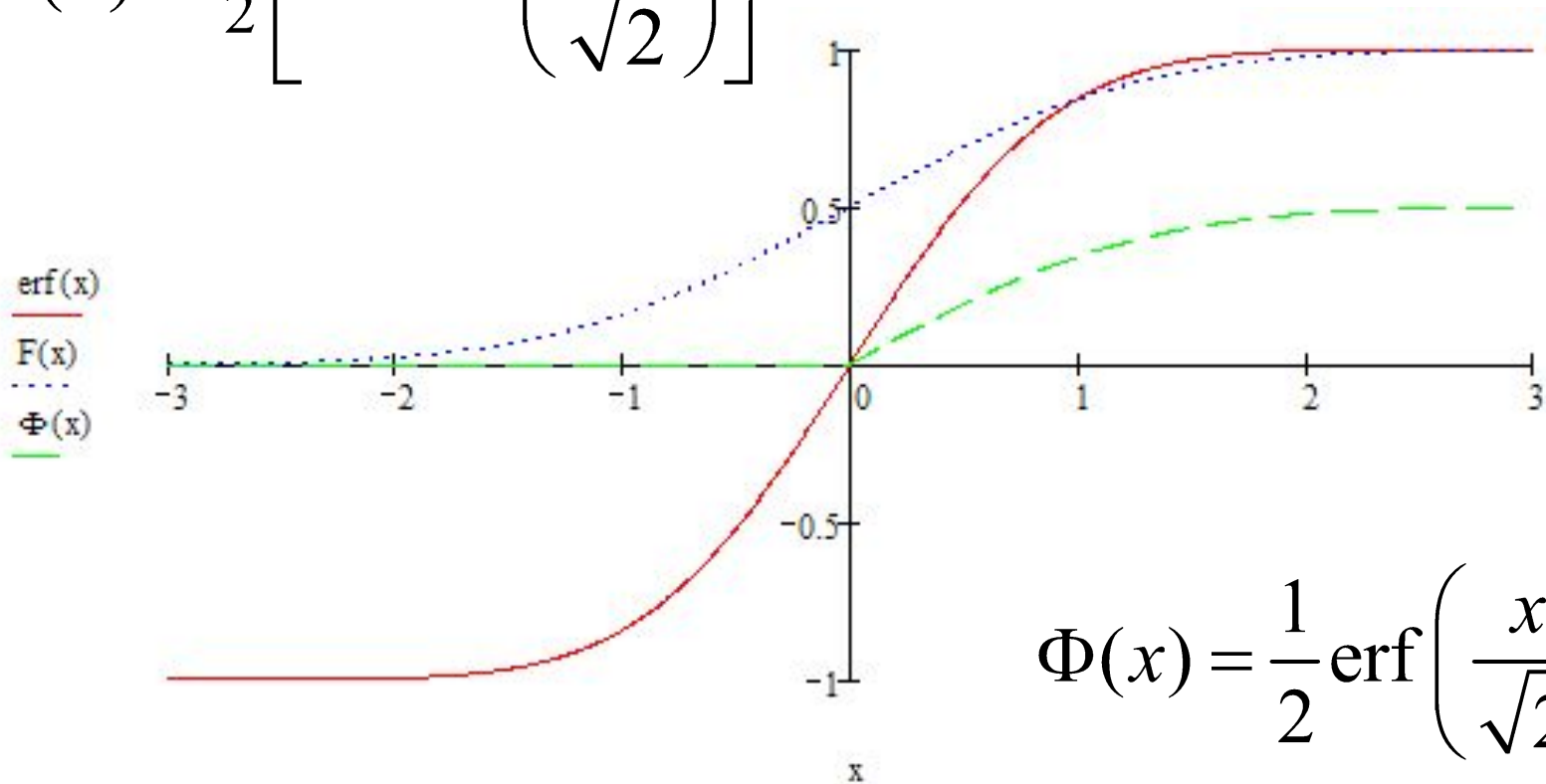


$$\begin{aligned} F(1) &= \mathbf{P}\{x \leq 1\} = \mathbf{P}\{m + \sigma s \leq 1\} = \mathbf{P}\left\{s \leq \frac{1-m}{\sigma}\right\} = \\ &= 0.5 - \Phi\left(\frac{m-1}{\sigma}\right) \quad (\text{если порог меньше МО}) \end{aligned}$$

Иногда используется функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]$$



$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

Числовые характеристики с.в.

Иногда используются дополнительные числовые характеристики, грубо описывающие форму ПРВ

Коэффициент эксцесса

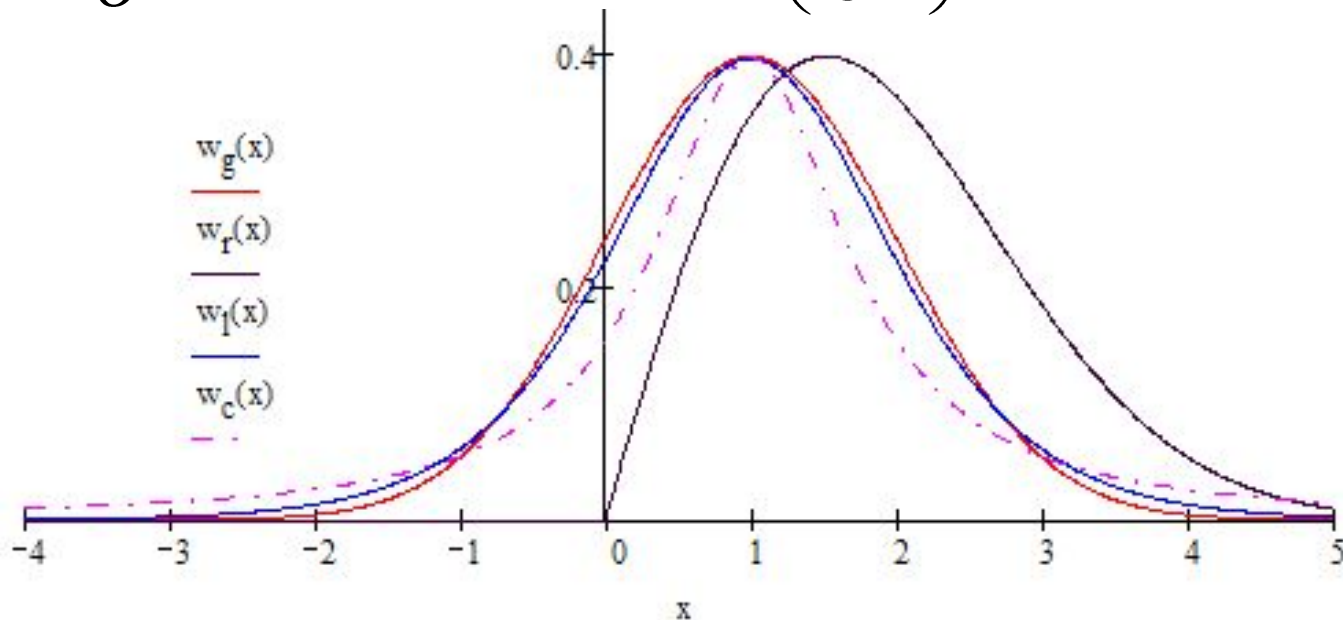
$$\beta_2 = \frac{M_4}{\sigma^4} \quad (\text{К. Пирсон})$$

$$\gamma_2 = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3 \quad (\text{Р. Фишер})$$

Коэффициент асимметрии

$$\gamma_1 = \frac{M_3}{\sigma^3} \quad (\text{Р. Фишер})$$

$$\beta_1 = \left(\frac{M_3}{\sigma^3} \right)^2 = \gamma_1^2 \quad (\text{К. Пирсон})$$



Системы случайных величин

совместная функция распределения

$$F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$$

совместная ПРВ

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y w(x, y) dx dy$$

Свойства ФР

$$F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(\infty, \infty) = 1$$

не убывает по
каждому аргументу

Свойства ПРВ

$$w(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1$$

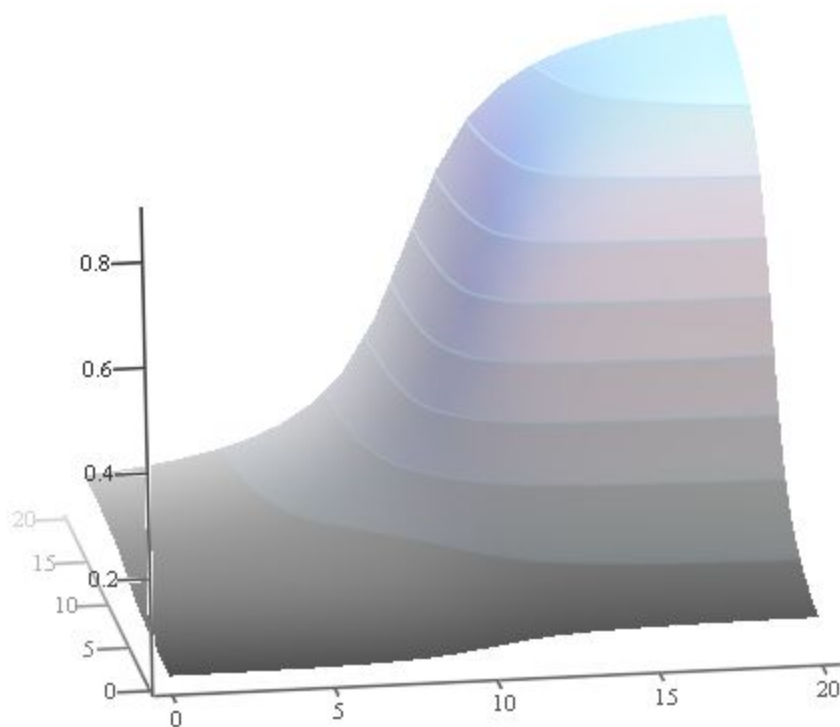
Совместная (двумерная) функция распределения

$$F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$$

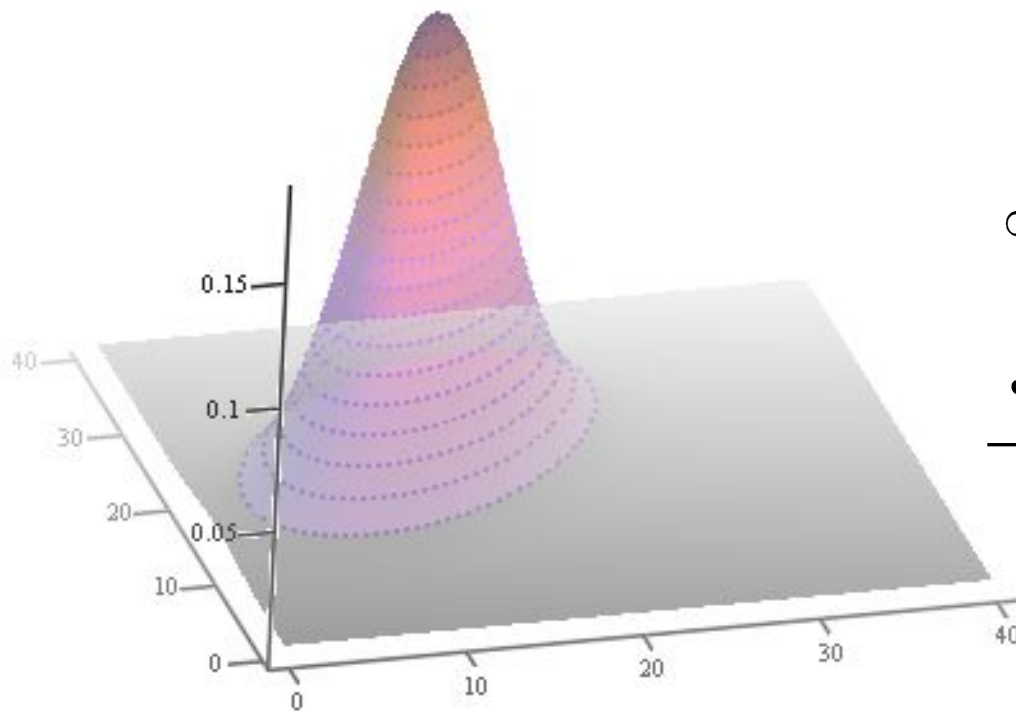
$$F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(\infty, \infty) = 1$$

не убывает по каждому аргументу

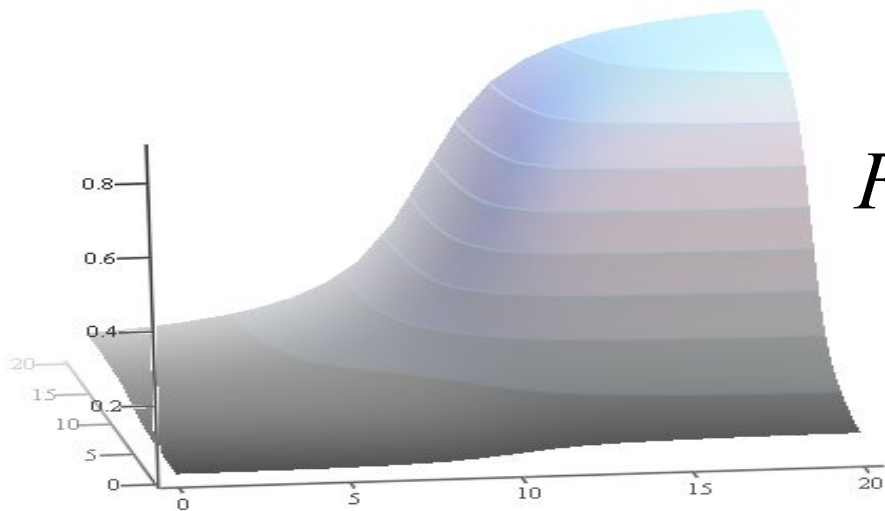


Совместная (двумерная) плотность распределения вероятностей

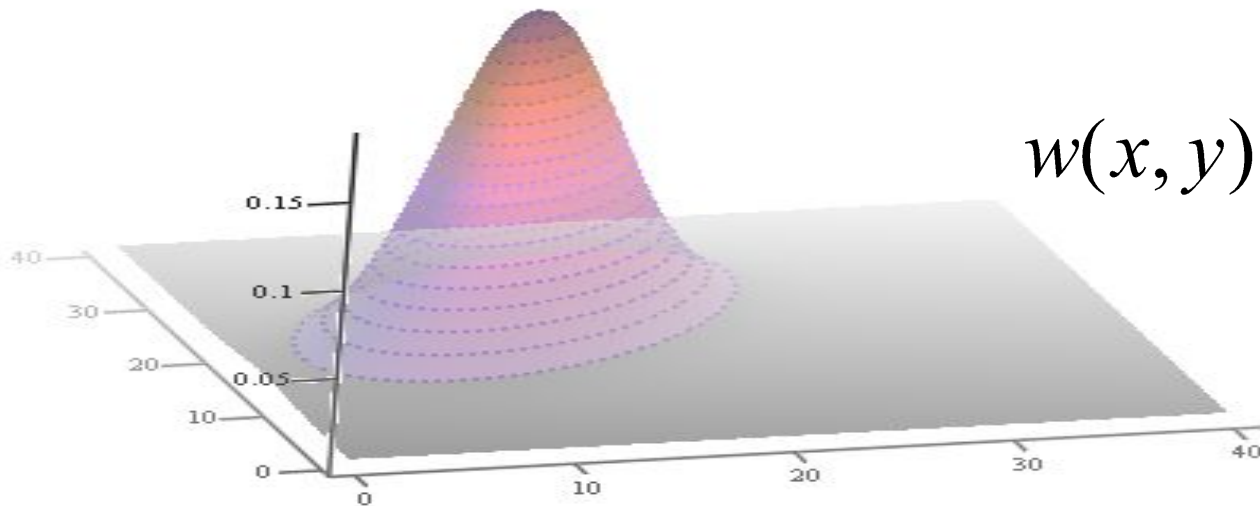


$$w(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1$$



$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y w(x, y) dx dy$$



$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Числовые характеристики системы 2 случайных величин

Начальные смешанные моменты

$$m_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n w(x, y) dx dy$$

Центральные смешанные моменты

$$M_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^n w(x, y) dx dy$$

$$m_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyw(x, y) dx dy = k_{xy}$$

корреляционный момент

$$M_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)w(x, y) dx dy = R_{xy}$$

ковариационный момент

Пример. Пара гауссовских случайных величин

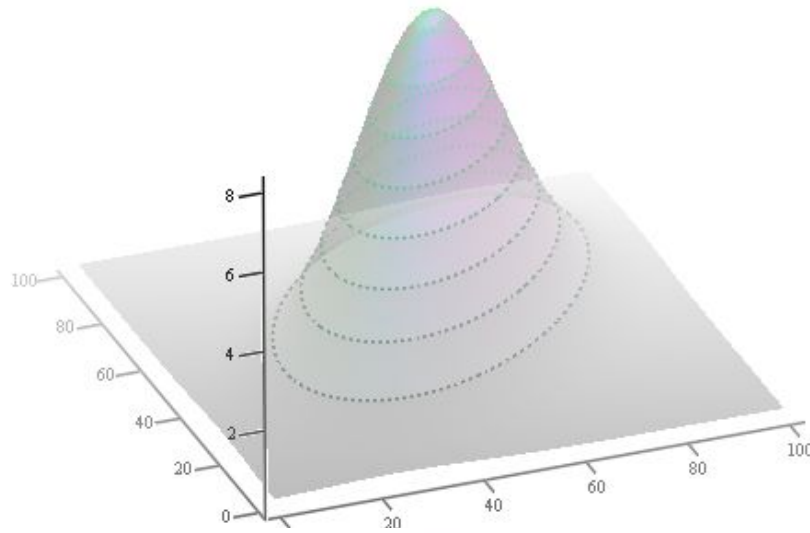
$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

$$r = \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{R_{x_1x_2}}{\sigma_1\sigma_2} \quad \text{коэффициент корреляции}$$

При нулевом коэффициенте корреляции

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} = w(x_1)w(x_2)$$

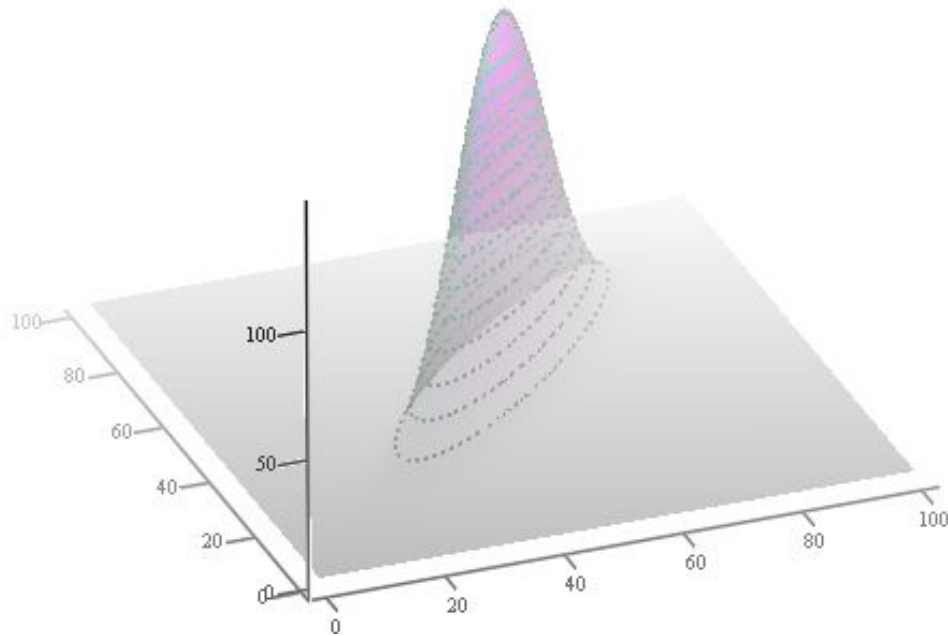
Некоррелированные **гауссовские** с.в. – **независимы!**



$$m_1 = m_2 = 0.5$$

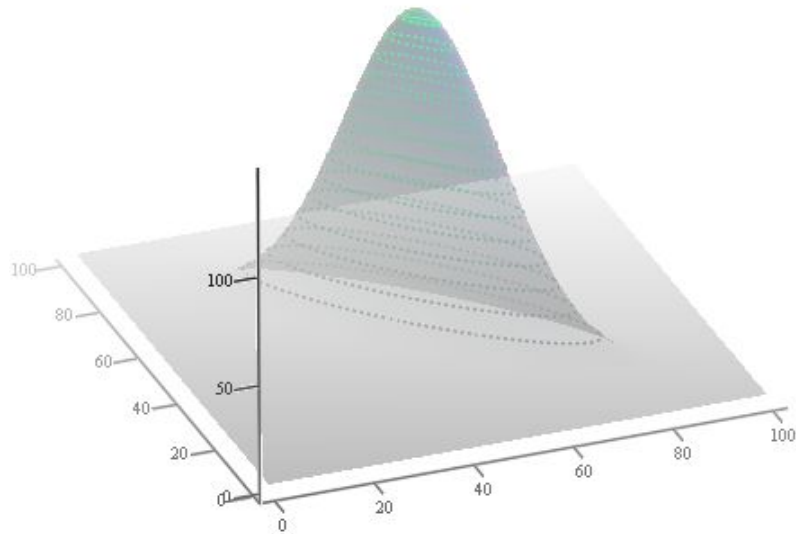
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.15$$

$$r = 0.5$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$$

$$r = 0.9$$



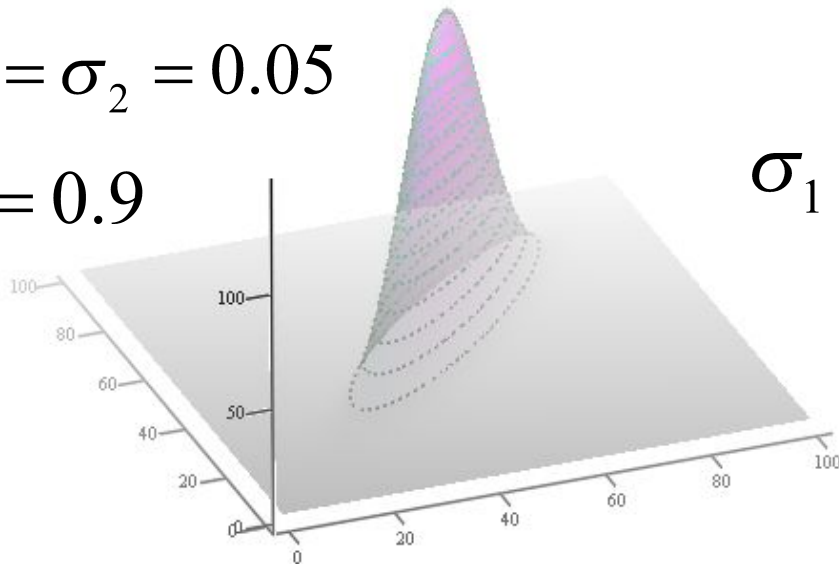
$$m_1 = m_2 = 0.5$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$$

$$r = -0.9$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$$

$$r = 0.9$$



$$r = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.15$$

