

Дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными

ОБЩИЙ ВИД

с y' :

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad | \cdot dx$$

$$dy = f(x) \cdot \underline{g(y)} dx \quad | : g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

зип. ур-ие с разделёнными переменными, можно инт-ть.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

с dx, dy :

$$P(x) \cdot Q(y) dx + R(x) S(y) dy = 0$$

$$P(x) \cdot \underline{Q(y)} dx = - \underline{R(x)} S(y) dy \quad | : R(x)$$

$$\frac{P(x) \cdot dx}{R(x)} = - \frac{S(y) dy}{Q(y)}$$

уравнение с разделёнными переменными, можно интегрировать

$$\int \frac{P(x) dx}{R(x)} = - \int \frac{S(y) dy}{Q(y)}$$

Пример 1

№ 396

$$2y y' = -x \quad | : 2y$$

$$y' = \underbrace{-x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2y}}_{g(y)} \leftarrow \text{ДУ I порядка с разл. переменными}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{2y} \quad | \cdot dx$$

$$dy = -x \cdot \underbrace{\frac{1}{2y}} \cdot dx \quad | : \frac{1}{2y}$$

$$2y dy = -x \cdot dx \leftarrow \text{уравнение с разл. переменными, интегрируем}$$

$$\int 2y dy = \int -x \cdot dx$$

Ответ

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \leftarrow \text{общ. интеграл ДУ} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{2} + C} \leftarrow \text{общ. решение ДУ (у выражено в явном виде)} \end{array} \right.$$

Пример 2

$$\sqrt{398} \quad 4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$$

$$\text{Общ. вид: } P(x) \cdot Q(y) dx + R(x) S(y) dy = 0$$

$$\text{Преобразуем уравнение: } 4x dx + 2xy^2 dx = 3x^2 y dy + 3y dy$$

разделим дифференциалы на одну часть

$$(4x + 2xy^2) dx = (3x^2 y + 3y) dy$$

$$(4 + 2y^2) \cdot x dx = (3x^2 + 3) y dy$$

$$\underline{(2 + y^2)} \cdot 2x dx = \underline{(x^2 + 1)} \cdot 3y dy \quad \left| \begin{array}{l} : (2 + y^2) \\ : (x^2 + 1) \end{array} \right.$$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3y}{2 + y^2} dy \quad \leftarrow \text{уравнение с разделимыми переменными, интегрируем.}$$

$$\int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{3y dy}{2 + y^2}$$

$$\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{3}{2} \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2}$$

$$\ln(x^2 + 1) = \frac{3}{2} \ln(y^2 + 2) + \ln C$$

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(y^2 + 2)^{\frac{3}{2}} + \ln C$$

$$\ln(x^2 + 1) = \ln C \cdot (y^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{x^2 + 1 = C \cdot (y^2 + 2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Ответ}$$

Пример 3

$$(405) \quad y' = 10^{x+y}$$

$$y' = 10^x \cdot 10^y$$

по свойству там покажи. р-ш.

$$\frac{dy}{dx} = 10^x \cdot 10^y \quad | \cdot dx$$

$$dy = 10^x \cdot \underbrace{10^y dx}_{| : 10^y}$$

$$\frac{dy}{10^y} = 10^x \cdot dx \quad \leftarrow \text{можно интегрировать}$$

$$\int 10^{-y} dy = \int 10^x dx$$

$$-\int 10^{-y} d(1-y) = \int 10^x dx$$

$$\underline{-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C}$$

Ответ

Пример 3 (задача Коши)

408 $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$ задача Коши \rightarrow Требуется найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1. Ищем общее решение (как обычно):

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad | \cdot dx$$

$$dy = \underbrace{(1+y^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx \quad | : (1+y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \quad \leftarrow \text{можно интегрировать, переменные разделили.}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \quad \leftarrow \text{оба интеграла табличные}$$

$$\arctg y = \arctg x + C \quad \leftarrow \text{общее решение (интеграл), а нулено-частное (нулено найти C).}$$

2. Ищем частн. реш-ие: $y(0) = 1$. Подставляем в общее решение вместо x ноль, вместо y — единицу:

$$\arctg 1 = \arctg 0 + C \quad \frac{\pi}{4} = 0 + C \quad C = \frac{\pi}{4} \quad \text{Решение задачи Коши:}$$

$\frac{\pi}{4}$ 0

Ответ $\boxed{\arctg y = \arctg x + \frac{\pi}{4}}$

Однородные дифференциальные уравнения I порядка

ОБЩИЙ ВИД

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) - \text{однородное ДУ I порядка}$$

Проверка на однородность: подставить вместо $y \rightarrow ay$, вместо $x \rightarrow ax$; y' , dx , $dy \rightarrow$ не трогать.

Если a после подстановки полностью сократится, а уравнение не изменится, то ДУ — однородное.

пример: $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$. Проверка на однородность:

$$\begin{array}{l} x \rightarrow ax \\ y \rightarrow ay \\ y' \rightarrow y' \end{array} \left| \right.$$

$$y' = \frac{\cancel{a^2} y^2}{\cancel{a^2} x^2} + 4 \frac{\cancel{a} y}{\cancel{a} x} + 2 \rightarrow y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2$$

уравнение осталось неизменным, следовательно, оно является однородным.

Для решения применяем замену:

$$\boxed{y = x \cdot t, \quad y' = t + x \cdot t'} \quad \text{или} \quad dy = dx \cdot t + x \cdot dt.$$

С помощью этой замены сводим ДУ (однородное) к ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 1

$$(421) \quad y' = \frac{x+2y}{2x-y}$$

проверка на однородность: $y' = \frac{ax+2ay}{2ax+ay} = \frac{\cancel{a}(x+2y)}{\cancel{a}(2x-y)} = \frac{x+2y}{2x-y}$
уравнение однородное.

Применим замену: $y = x \cdot t$ $y' = t + x \cdot t'$, где $t' = \frac{dt}{dx}$

$$t + x \cdot t' = \frac{x + 2 \cdot x \cdot t}{2x - x \cdot t}$$

$$t + x \cdot t' = \frac{\cancel{x}(1+2t)}{\cancel{x}(2-t)}$$

$$\underbrace{t + x \cdot t'}_{(2-t)} = \frac{1+2t}{2-t}$$

$$x \cdot t' = \frac{1+2t}{2-t} - t$$

приводим к общ. знаменателю

$$x \cdot t' = \frac{1+2t - t(2-t)}{2-t}$$

$$x \cdot t' = \frac{1+2t - \cancel{2t} + t^2}{2-t}$$

$$x \cdot t' = \frac{1+t^2}{2-t} \leftarrow \text{уравнение с разл. переменными}$$

$$x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2-t} \quad | \cdot dx$$

$$\int \frac{x \cdot dt}{2-t} = \int \frac{1+t^2}{2-t} dx \quad \left| \begin{array}{l} : x \\ : \frac{1+t^2}{2-t} \end{array} \right.$$

$$\frac{2-t}{1+t^2} dt = \frac{dx}{x} \leftarrow \begin{array}{l} \text{монечно} \\ \text{интегрируем} \end{array}$$

$$\underbrace{\int \frac{2-t}{1+t^2} dt}_{(1)} = \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{(2)}$$

$$(1) \int \frac{2-t}{1+t^2} dt = \int \frac{2dt}{1+t^2} - \int \frac{t dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$
$$= 2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$$

$$(2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln C = \ln(x \cdot C).$$

$$2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) = \ln(x \cdot C)$$

$$\text{Обратная замена: } y = x \cdot t, \quad t = \frac{y}{x}.$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = \ln(x \cdot C)$$

Ответ.

Пример 2 (задача Коши)

425 $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$ *задача Коши.*

проверка на однородность: $(ax \cdot y' - ay) \cdot \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} = a \cdot x$
 $a(x \cdot y' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = a \cdot x$; $(x \cdot y' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x \rightarrow$ *уравнение однородное*

замена: $y = x \cdot t$ $y' = t + x \cdot t'$:

$$(x \cdot (t + x \cdot t') - x \cdot t) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x \cdot t}{x} = x$$

$$(x \cdot t + x^2 t' - x \cdot t) \operatorname{arctg} t = x$$

$$x^2 \cdot t' \operatorname{arctg} t = x$$

$$x \cdot t' \operatorname{arctg} t = 1$$

$$t' = \frac{1}{x \cdot \operatorname{arctg} t} \leftarrow \text{уравнение с разг. перемен.}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x \cdot \operatorname{arctg} t} \quad | \cdot dx$$

$$dt = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} t} dx \quad | : \frac{1}{\operatorname{arctg} t}$$

$$\int \operatorname{arctg} t dt = \int \frac{1}{x} dx$$

по частям *логарифм*

$$\textcircled{1} \int \operatorname{arctg} t dt = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} t \\ dv = dt \\ du = \frac{1}{1+t^2} dt \\ v = t \end{array} \right| =$$

$$= \operatorname{arctg} t \cdot t - \int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= t \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$$

$$\textcircled{2} \ln|x| + \ln C = \ln(x \cdot C)$$

Общий интеграл: $t \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) = \ln(x \cdot C)$

Найдём частн. решение: $y(1) = 0 \quad x = 1, y = 0$

Обр. замена: $t = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = \ln(x \cdot C)$

$\frac{0}{1} \operatorname{arctg} \frac{0}{1} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{0^2}{1^2} + 1\right) = \ln\left(x \cdot C\right) \quad 0 = \ln C \quad C = 1$

Частн. решение: $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = \ln x. \quad C = 1$

Ответ.

Линейные дифференциальные уравнения I порядка

ОБЩИЙ ВИД

$$y' + p(x)y = q(x) - \text{общий вид линейного ДУ I ч.}$$

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n - \text{уравнение Бернулли}$$

Замена: $y = u \cdot v$, где u и v - функции от x .
 $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x)$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

приравняем к нулю.

$$v' + p(x)v = 0$$

↑
уравнение с разд. переменными
решаем, находим $v(x)$

$$u'v = q(x)$$

↑
уравнение с разд. пер.
решаем, находим u

Пример 1

$$(413) \quad y' + y \underbrace{\operatorname{tg} x}_{p(x)} = \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{q(x)}} \quad - \text{линейное ДУ Ин.}$$

Замена: $y = u \cdot v$
 $y' = u'v + uv'$

$$u'v + \underbrace{uv' + uv \operatorname{tg} x}_{=0} = \frac{1}{\cos x} \quad (*) \text{ основное уравнение}$$

$$u'v + u(\underbrace{v' + v \operatorname{tg} x}_{=0}) = \frac{1}{\cos x}$$

решаем отдельно

$$1) \quad v' + v \operatorname{tg} x = 0$$

$$v' = -v \operatorname{tg} x \quad \leftarrow \text{уравнение с разл. переменными}$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x \quad | \cdot dx$$

$$dv = -v \operatorname{tg} x \cdot dx \quad | : v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{tg} x \cdot dx$$

$$\ln|v| = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln|v| = -\int \frac{d(1 - \cos x)}{\cos x}$$

$$\ln|v| = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x| \quad (+C \text{ мы здесь не пишем.})$$

Отсюда $v = \cos x$

2) Подставим $v = \cos x$ в исходное уравнение (*):

$$u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ - уравнение с разл. переменными}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad | \cdot dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$u = \underline{\underline{\text{tg } x + c}}$$

+ c уже имеем.

Составим ответ, $y = u \cdot v = (\text{tg } x + c) \cdot \cos x$

Ответ.

Пример 2 (задача Коши)

414 $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x(x+1), y(0)=1$. Задача Коши

Замена: $y = u \cdot v \quad y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x+1} uv = e^x(x+1)$$

"выносим u "

$$u'v + u \left(v' - \frac{1}{x+1} v \right) = e^x(x+1) \quad (*) \text{ основное уравнение}$$

$= 0$

решаем отдельно

1) $v' - \frac{1}{x+1} v = 0$

$$v' = \frac{1}{x+1} v \leftarrow \text{уравнение с разд. переменными}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x+1} v \quad | \cdot dx$$

$$dv = \frac{1}{x+1} v dx \quad | :v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = \ln|x+1| \quad // + c \text{ не пишем}$$

$$v = x+1$$

Домашнее задание

- К 20 мая - подготовка к контрольной работе ПК-3 – «Определённый интеграл». Образец билета будет выложен сегодня в группе ВК.
- К 23 мая – по рассмотренным сегодня темам: №№ 404, 417, 429.