Дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными

Общий вид

с y':

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \quad \Big|\cdot dx$$

$$dy = f(x)\cdot \underbrace{g(y)}\,dx \quad \Big| : g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$$

диф. ур-ие с разделёнными переменными, можно инт-ть.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

с dx, dy:

$$P(x)\cdot Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0$$

$$P(x)\cdot \underbrace{Q(y)}\,dx = -\underbrace{R(x)}\,S(y)\,dy \quad \Big| : Q(y)\,R(x)$$

$$\frac{P(x)\cdot dx}{R(x)} = -\frac{S(y)\,dy}{Q(y)}$$

уравнение с разделёнными переменными, можно интегрировать

$$\int \frac{P(x)\,dx}{R(x)} = -\int \frac{S(y)\,dy}{Q(y)}$$

Пример 1

№ 396

$$2yy' = -x \quad \Big|: 2y$$

$$y' = \underbrace{-x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2y}}_{g(y)}$$ ← ДУ I порядка с раздел. переменными

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{2y} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = -x \cdot \underbrace{\frac{1}{2y}} \cdot dx \quad \Big| : \frac{1}{2y}$$

$$2y\,dy = -x \cdot dx$$ ← уравнение с разделёнными переменными, интегрируем

$$\int 2y\,dy = \int -x \cdot dx$$

Ответ

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$$ ← общ. интеграл ДУ

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} + C}$$ ← общ. решение ДУ (у выражено в явном виде)

Пример 2

№ 398) $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$

Опр. вид: $P(x)\cdot Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0$

Преобразуем уравнение: $4x\,dx + 2xy^2\,dx = 3x^2y\,dy + 3y\,dy$

Разделяем дифференциалы знаком равенства

$$(4x + 2xy^2)\,dx = (3x^2y + 3y)\,dy$$

$$(4 + 2y^2)\cdot x\,dx = (3x^2 + 3)\,y\,dy$$

$$\underbrace{(2 + y^2)}\cdot 2x\,dx = \underbrace{(x^2+1)}\cdot 3y\,dy \quad \Big| : (2+y^2),\ :(x^2+1)$$

$$\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3y}{2+y^2}\,dy$$ ← уравнение с разделенными переменными, интегрируем.

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{3y}{2+y^2}\,dy$$

$$\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3}{2}\int \frac{d(y^2+2)}{y^2+2}$$

$$\ln(x^2+1) = \frac{3}{2}\ln(y^2+2) + \ln C$$

$$\ln(x^2+1) = \ln(y^2+2)^{3/2} + \ln C$$

$$\ln(x^2+1) = \ln C\cdot(y^2+2)^{3/2}$$

$$\underline{x^2+1 = C\cdot(y^2+2)^{3/2}}$$ Ответ

Пример 3

(405) $y' = 10^{x+y}$

$y' = 10^x \cdot 10^y$

по свойствам показат. ф-ии.

$\frac{dy}{dx} = 10^x \cdot 10^y \quad \Big| \cdot dx$

$dy = 10^x \cdot \underbrace{10^y}\, dx \quad \Big| : 10^y$

$\frac{dy}{10^y} = 10^x \cdot dx$ ← можно интегрироватъ

$\int 10^{-y} dy = \int 10^x dx$

$-\int 10^{-y} d(-y) = \int 10^x dx$

$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C$ Ответ

Пример 3 (задача Коши)

408 $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$ — задача Коши → требуется найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

1. Ищем общее решение (как обычно):

$y' = \frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \Big| \cdot dx$

$$dy = \underbrace{(1+y^2)}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx \Big| : (1+y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$ ← можно интегрировать, переменные разделены.

$$\int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{1+x^2}$$ ← оба интеграла табличные

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$$ ← общее решение (интеграл), а нужно — частное (нужно найти C).

2. Ищем частн. реш-ие: $y(0) = 1$. Подставляем в общее решение вместо x ноль, вместо y — единицу:

$$\underset{\frac{\pi}{4}}{\operatorname{arctg} 1} = \underset{0}{\operatorname{arctg} 0} + C \qquad \frac{\pi}{4} = 0 + C \qquad C = \frac{\pi}{4}.$$

Решение задачи Коши:

Ответ $\boxed{\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}}$

Однородные дифференциальные уравнения I порядка

Общий вид

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ – однородное ДУ I порядка

Проверка на однородность: подставить вместо $y \to ay$, вместо $x \to ax$; y', dx, $dy \to$ не трогать.
Если a после подстановки полностью сократится, а уравнение не изменится, то ДУ – однородное.

пример: $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$. Проверка на однородность:

$x \to ax$, $y \to ay$, $y' \to y'$

$$y' = \frac{\cancel{a^2} y^2}{\cancel{a^2} x^2} + 4\frac{\cancel{a} y}{\cancel{a} x} + 2 \to y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$$

уравнение осталось неизменным, следовательно, оно является однородным.

Для решения применяем замену:

$\boxed{y = x \cdot t \ , \ y' = t + x \cdot t'}$ или $dy = dx \cdot t + x \cdot dt$.

С помощью этой замены сводим ДУ (однородное) к ДУ с разделяющимися переменными

Пример 1

421. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$

проверка на однородность: $y' = \dfrac{ax+2ay}{2ax+ay} = \dfrac{\cancel{a}(x+2y)}{\cancel{a}(2x-y)} = \dfrac{x+2y}{2x-y}.$

уравнение однородное.

Применим замену: $y = x\cdot t$ $\quad y' = t + x\cdot t'$, где $t' = \dfrac{dt}{dx}$

$$t + x\cdot t' = \frac{x+2\cdot x\cdot t}{2x - x\cdot t}$$

$$t + x\cdot t' = \frac{\cancel{x}(1+2t)}{\cancel{x}(2-t)}$$

$$\underbrace{t} + x\cdot t' = \frac{1+2t}{2-t}$$

$$x\cdot t' = \underbrace{\frac{1+2t}{2-t} - t^{(2-t}}$$

приводим к общ. знаменателю

$$x\cdot t' = \frac{1+2t-t(2-t)}{2-t}$$

$$x\cdot t' = \frac{1+\cancel{2t}-\cancel{2t}+t^2}{2-t}$$

$$x\cdot t' = \frac{1+t^2}{2-t}$$ ← уравнение с раздел. переменными

$$x\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2-t} \quad \Big|\cdot dx$$

$$\underbrace{x}\cdot dt = \frac{1+t^2}{\underbrace{2-t}}dx \quad \Big| \; : x \quad : \frac{1+t^2}{2-t}$$

$$\frac{2-t}{1+t^2}\,dt = \frac{dx}{x}$$ ← можно интегрировать

$$\underbrace{\int \frac{2-t}{1+t^2}\,dt}_{①} = \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{②}$$

① $$\int \frac{2-t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2\,dt}{1+t^2} - \int \frac{t\,dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

② $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln C = \ln(x\cdot C).$$

$$2\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln(x\cdot C)$$

Обратная замена: $y = x\cdot t$, $t = \frac{y}{x}$.

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln(x\cdot C)$$ Ответ.

Пример 2 (задача Коши)

задача Коши.

425 $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x$, $\boxed{y(1)=0}$

проверка на однородность: $(ax\cdot y' - ay)\cdot \operatorname{arctg}\frac{\cancel{a}y}{\cancel{a}x} = a\cdot x$

$\cancel{a}(x\cdot y' - y)\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \cancel{a}\cdot x$; $(x\cdot y'-y)\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x \to$ ур-ие однородное

замена: $y = x\cdot t \quad y' = t + x\cdot t'$:

$(x\cdot(t+x\cdot t') - x\cdot t)\cdot \operatorname{arctg}\frac{\cancel{x}\cdot t}{\cancel{x}} = x$

$(\cancel{x\cdot t} + x^2 t' - \cancel{x t})\operatorname{arctg} t = x$

$x^{\cancel{2}}\cdot t' \operatorname{arctg} t = \cancel{x}\,1$

$x\cdot t' \operatorname{arctg} t = 1$

$t' = \frac{1}{x\cdot \operatorname{arctg} t}$ ← ур-ие с разд. перем.

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x\cdot \operatorname{arctg} t} \Big| \cdot dx$

$dt = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg} t}dx \Big| : \frac{1}{\operatorname{arctg} t}$

$\underbrace{\int \operatorname{arctg} t\, dt}_{\text{по частям}}^{①} = \underbrace{\int \frac{1}{x}dx}_{\text{логарифм}}^{②}$

① $\int \operatorname{arctg} t\, dt = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} t \\ dv = dt \\ du = \frac{1}{1+t^2}dt \\ v = t \end{array} \right| =$

$= \operatorname{arctg} t\cdot t - \int t\cdot\frac{1}{1+t^2}dt =$

$= t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$

$= t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$

② $\ln|x| + \ln C = \ln(x\cdot C)$

Общий интеграл: $t \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln(x \cdot C)$

найдём частн. решение: $y(1)=0$ $\quad x=1,\ y=0$

Обр. замена: $t = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln(x \cdot c)$

$$\underbrace{\frac{0}{1}\operatorname{arctg}\frac{0}{1}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0^2}{1^2}+1\right)}_{0} = \ln(\underset{1}{\overset{\shortparallel}{x}} \cdot c) \qquad 0 = \ln C \qquad C=1$$

Частн. решение: $\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln x.$

$c=1$

Ответ.

Линейные дифференциальные уравнения I порядка

Общий вид

$y' + p(x)y = q(x)$ – общий вид линейного ДУ I п.

$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n$ – уравнение Бернулли

Замена: $y = u \cdot v$, где u и v – функции от x.

$y' = u'v + uv'$

$$u' \cdot v + \underbrace{uv' + p(x) \cdot uv} = q(x)$$

$$u'v + u\underbrace{(v' + p(x)v)}_{\text{приравниваем к нулю.}} = q(x)$$

$v' + p(x)v = 0$

уравнение с раздел. переменными
решаем, находим $v(x)$

$u'v = q(x)$

уравнение с разд. пер
Решаем, находим u

Пример 1

(413) $y' + y\,\underbrace{\mathrm{tg}x}_{p(x)} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{q(x)}$ – линейное ДУ Iп.

Замена: $y = u\cdot v$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + \underbrace{uv' + uv\,\mathrm{tg}(x)}_{=0} = \frac{1}{\cos x}$ (*) основное уравнение

$u'v + u(\underbrace{v' + v\,\mathrm{tg}x}_{=0}) = \frac{1}{\cos x}$

решаем отдельно

---

1) $v' + v\,\mathrm{tg}x = 0$

$v' = -v\,\mathrm{tg}x$ ← уравнение с разд. переменными

$\frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x \;\Big|\cdot dx$

$dv = -v\,\mathrm{tg}\,x\cdot dx \;\Big|:v$

$\int\frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}x\cdot dx$

$\ln|v| = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$\ln|v| = -\int\frac{d(-\cos x)}{\cos x}$

$\ln|v| = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$\ln|v| = \ln|\cos x|$ (+C мы здесь не пишем.)

Отсюда $v = \cos x$

2) Подставляем $v = \cos x$ в основное уравнение (*):

$$u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ – уравнение с раздел. переменными

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Big| \cdot dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$u = \operatorname{tg} x + C$$

$+C$ уже пишем.

Соответственно, $\underline{y = u \cdot v = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x}$

Ответ.

Пример 2 (задача Коши)

(414) $y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1)$, $y(0) = 1$. Задача Коши

замена: $y = u \cdot v$ $\quad y' = u'v + uv'$

$$u'v + \underbrace{uv' - \frac{1}{x+1} uv}_{\text{выносим } u} = e^x (x+1)$$

$$u'v + u(\underbrace{v' - \frac{1}{x+1} v}_{=0}) = e^x (x+1) \text{ — } (*) \text{ основное уравнение}$$

решаем отдельно

1) $v' - \frac{1}{x+1} v = 0$

$v' = \frac{1}{x+1} v$ ← ур-ие с разд. перем.

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x+1} v \;\Big|\cdot dx$

$dv = \frac{1}{x+1} v\, dx \;\Big| : v$

$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1}$

$\ln|v| = \ln|x+1|$ // + C не пишем

$v = x+1$

2) подставляем $v = x+1$ в уравнение (*):

$$u' \cdot \cancel{(x+1)} = e^x \cancel{(x+1)}$$

$u' = e^x$ – уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} = e^x \Big| \cdot dx$$

$$\int du = \int e^x \cdot dx$$

$$u = e^x + C$$

Отсюда, $y = u \cdot v = (e^x + C) \cdot (x+1)$ – общее решение лин. ДУ I и, найдём частное:

$\underset{x}{y(0)} = \underset{y}{1}$. Подставляем $1 = (\underset{1}{\underset{\parallel}{e^0}} + C)(0+1)$

$1 = (1 + C) \cdot 1$

$C = 0$

Частн. решение $y_{част.} = (x+1) \cdot e^x$.
(решение задачи Коши) — Ответ

Домашнее задание

- К 20 мая - подготовка к контрольной работе ПК-3 – «Определённый интеграл». Образец билета будет выложен сегодня в группе ВК.
- К 23 мая – по рассмотренным сегодня темам: №№ 404, 417, 429.