Тема :

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение Якова Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

Линейное

Однородное

$$y' + P(x)y = 0$$

ДУ с разделяющимися переменными

Неоднородное

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Метод Бернулли

Метод подстановки

Метод Лагранжа

Метод вариации произвольной постоянной

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, $P(x)$ $Q(x)$ – функции постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

- Замечание. Уравнение называется линейным, так как искомая функция ***y*** и её производная ***y'*** входят в это уравнение в первой степени.

Линейное ДУ первого порядка называется однородным, если функция

$$Q(x) = 0$$

Линейное ДУ первого порядка называется неоднородным, если функция $Q(x) \neq 0$

Линейное однородное ДУ первого порядка $y' + P(x)y = 0$

1. Решить уравнение $y' + y\sin x = 0$

Решение: $y' = \frac{dy}{dx}$, имеем — Выразить производную функции через дифференциалы

$$\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0 \quad \Big| \quad \frac{dx}{y}$$

Разделить переменные

Получаем $\frac{dy}{y} + \sin x dx = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

Интегрировать

$$\ln y = \cos x + C$$ (общее решение)

2. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = 0$

Решение: $y = Cx$ (общее решение)

Линейное неоднородное ДУ. Метод Бернулли

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

Замечание. Любую величину можно представить в форме произведения двух сомножителей, причем один из множителей можно выбрать по своему желанию.

$$y = uv \qquad y' = u'v + v'u.$$

В результате линейное неоднородное ДУ сводиться к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

где u и v - новые функции переменной x

1. Решить уравнение $y' - \frac{3}{x} y = x.$

Решение:

$$P(x) = -\frac{3}{x}, Q(x) = x.$$

Положим $y = uv,$

тогда $y' = u'v + v'u.$

Алгоритм решения линейного ДУ первого порядка

1. Приводят уравнение к виду $y' + P(x)y = Q(x)$

2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение.

3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.

4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.

5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$,

6. Если требуется найти частное решение , то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

Получим $$u'v+v'u-\frac{3}{x}uv=x,$$

$$y'-\frac{3}{x}y=x.$$

или $$u\left(v'-\frac{3}{x}v\right)+u'v=x. \qquad (1)$$

ЗП

$$y=uv$$

$$y'=u'v+v'u$$

$$v'-\frac{3}{x}v=0.$$

$$v'=\frac{dv}{dx},$$

Выразить производную функции через дифференциалы

$$\frac{dv}{v}=\frac{3dx}{x},$$

Разделить переменные

$$\int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x},$$

Интегрировать

$$\ln v=3\ln x,$$ C=0, ввиду произвольности в выборе

$$v=x^3.$$

Имеем $$u'x^3=x$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

Выразить производную функции через дифференциалы

$$du = \frac{1}{x^2}dx$$

Разделить переменные

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2}$$

Интегрировать

$$u = -\frac{1}{x} + C,$$

постоянную *C* писать обязательно!

Окончательно получим

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3$$

(общее решение)

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v\underbrace{\left(u' - \frac{3}{x}u\right)}_{=0} + uv' = x \qquad u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x,$$

Находим **u** из ур-ния, приравняв выражение в скобках к нулю. Затем, находим **V , решая уравнение u v ' =x**

Самостоятельная работа

Решить уравнения:

1. $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2.$ Решить задачу Коши.

2. $xy' - y = x^2 \cos x.$ Найти общее решение.

3. Решить линейное ДУ первого порядка

$$y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0$$

4. Решить задачу Коши для линейного ДУ первого порядка

$$y' - ytgx = \frac{1}{\cos^3 x}; y(0) = 0$$