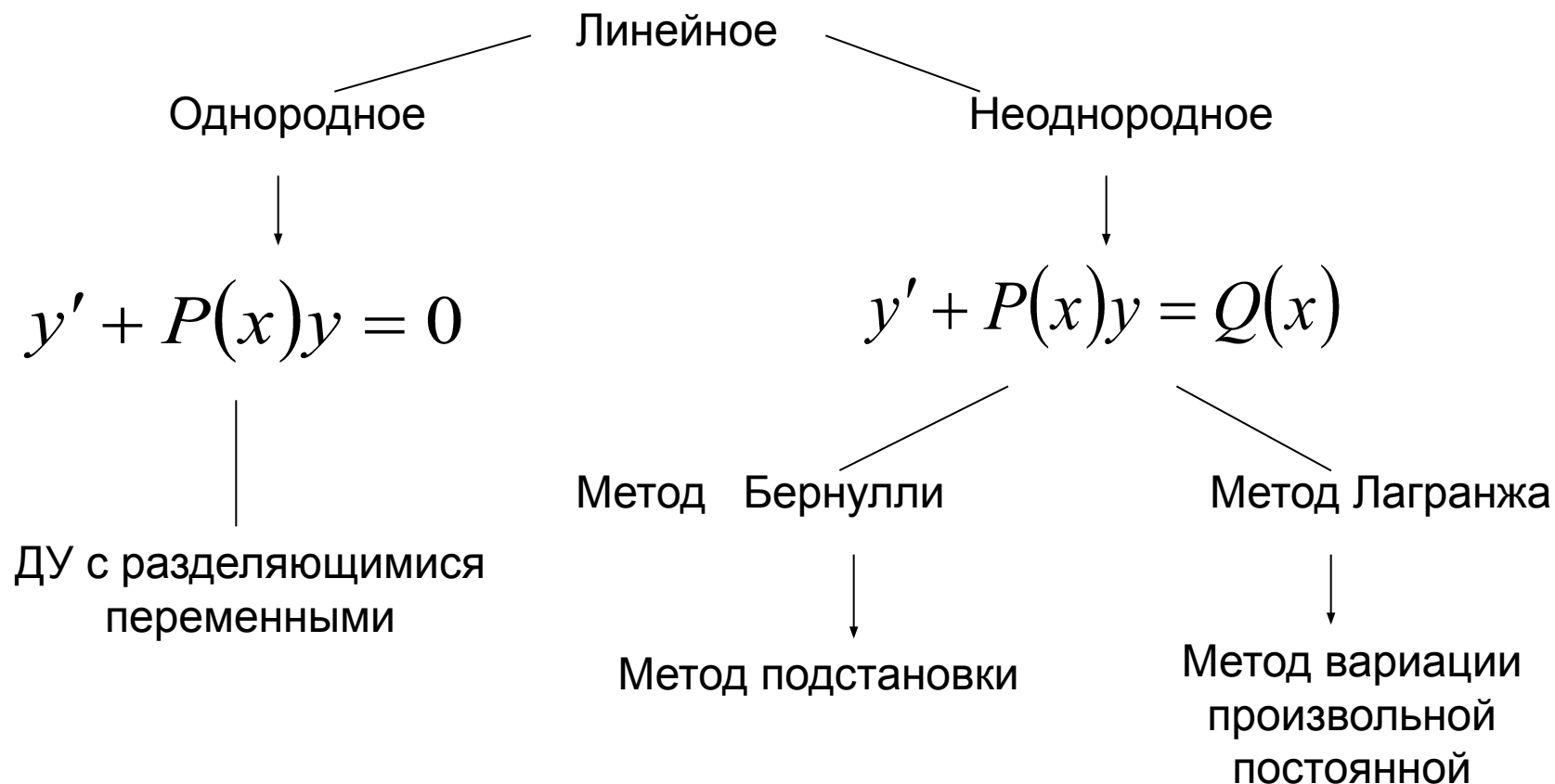


Тема :

Линейные
дифференциальные
уравнения первого порядка

Уравнение Якова Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$



Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

- **Замечание.** Уравнение называется линейным, так как искомая функция y и её производная y' входят в это уравнение в первой степени.

Линейное ДУ первого порядка называется **однородным**, если функция

$$Q(x) = 0$$

Линейное ДУ первого порядка называется **неоднородным**, если функция $Q(x) \neq 0$

Линейное однородное ДУ первого порядка

$$y' + P(x)y = 0$$

1. Решить уравнение $y' + y \sin x = 0$

Решение: $y' = \frac{dy}{dx}$, имеем

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0 \quad | \quad \frac{dx}{y}$$

Получаем

$$\frac{dy}{y} + \sin x dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

$$\ln y = \cos x + C$$

(общее решение)

Выразить производную функции
через дифференциалы

Разделить переменные

Интегрировать

2. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = 0$

Решение: $y = Cx$ (общее решение)

Линейное неоднородное ДУ. Метод Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Замечание. Любую величину можно представить в форме произведения двух сомножителей, причем один из множителей можно выбрать по своему желанию.

$$y = uv \quad y' = u'v + v'u.$$

В результате линейное неоднородное ДУ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

где u и v - новые функции переменной x

1. Решить уравнение $y' - \frac{3}{x}y = x.$

Решение:

$$P(x) = -\frac{3}{x}, Q(x) = x.$$

Положим

$$y = uv,$$

тогда

$$y' = u'v + v'u.$$

Алгоритм решения линейного ДУ первого порядка

1. Приводят уравнение к виду $y' + P(x)y = Q(x)$
2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.
4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$,
6. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

Получим

$$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x,$$

или

$$u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) + u'v = x. \quad (1)$$

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

$$y = uv$$

ЗП

$$y' = u'v + v'u$$

$$v' - \frac{3}{x}v = 0.$$

$$v' = \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 3 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln v = 3 \ln x, \quad C=0, \text{ ввиду произвольности в выборе}$$

$$v = x^3.$$

Имеем

$$u'x^3 = x$$

Выразить производную функции
через дифференциалы

Разделить переменные

Интегрировать

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$du = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2}$$

Выразить производную функции
через дифференциалы

Разделить переменные

Интегрировать

$$u = -\frac{1}{x} + C, \quad \text{постоянную } C \text{ писать обязательно!}$$

Окончательно получим

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x} \right) x^3 \quad (\text{общее решение})$$

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v \left(u' - \frac{3}{x} u \right) + uv' = x \qquad u'v + v'u - \frac{3}{x} uv = x,$$
$$\qquad \qquad \qquad = 0$$

Находим u из ур-ния, приравняв выражение в скобках к нулю. Затем, находим v , решая уравнение $u v' = x$

Самостоятельная работа

Решить уравнения:

1. $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2.$ Решить задачу Коши.

2. $xy' - y = x^2 \cos x.$ Найти общее решение.

3. Решить линейное ДУ первого порядка

$$y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0$$

4. Решить задачу Коши для линейного ДУ первого порядка

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}; y(0) = 0$$