

Исследование функций и построение графиков

Задание

1. Записать план исследования функции
2. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ и построить ее график.

Область определения функции

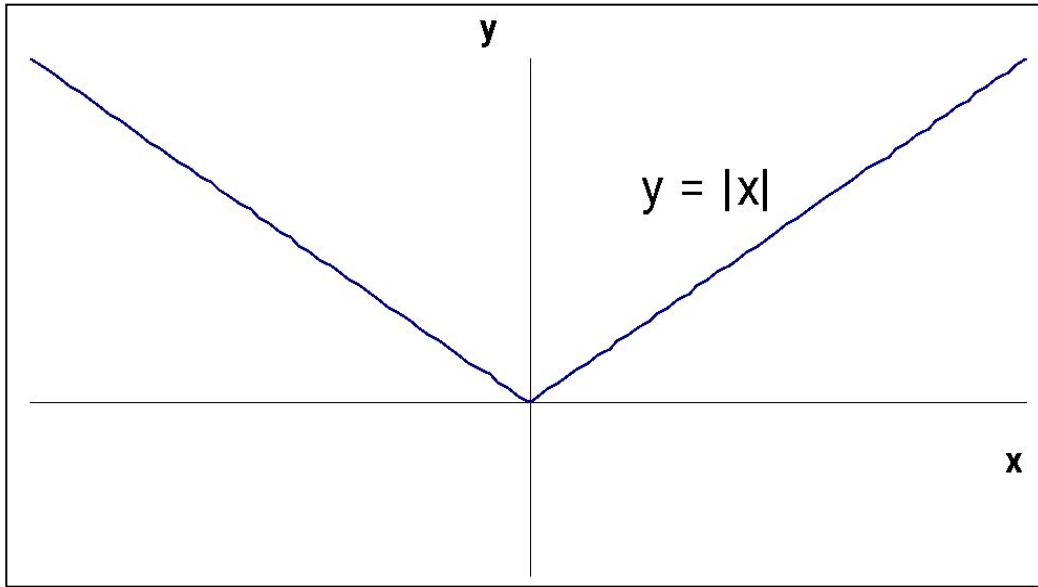
Определение. Областью определения функции называется множество значений независимой переменной, при которых функция определена.

Примеры:

$$y = \ln(x+1) \quad D_f = (-1, +\infty)$$

$$y = \frac{2}{(x-3)^2} \quad D_f = R \setminus \{3\}$$

Четные и нечетные функции

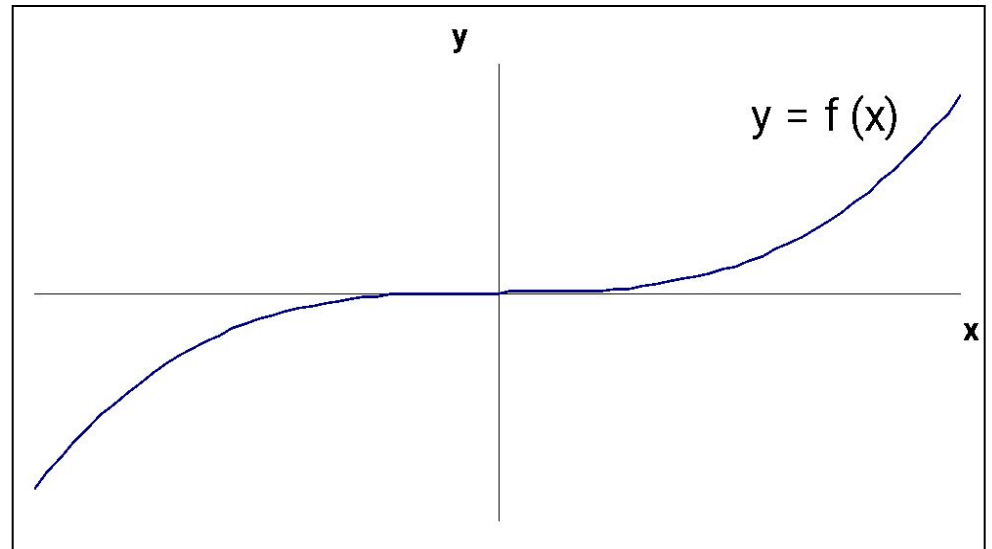


Функция $y=f(x)$
называется четной,
если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$$

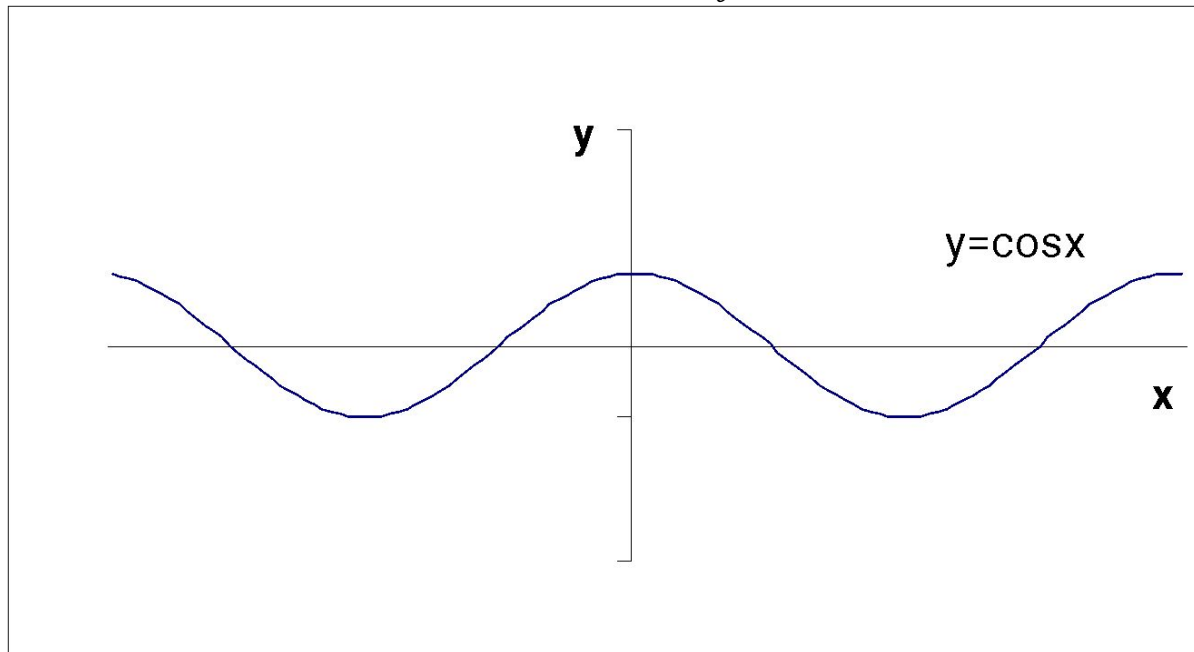
Функция $y=f(x)$
называется нечетной,
если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$$



Периодические функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T , что если x принадлежит D_f , то $x \pm T$ также принадлежит D_f и $f(x+T)=f(x)$.



Точки пересечения с осями координат

При исследовании функции необходимо найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $y=0$, а ординаты точек пересечения графика функции с осью Oy находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $x=0$.

Непрерывность.

Характер точек разрыва

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если функция определена в точке x_0 и предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0 .

$$x_0 \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функции, непрерывные в каждой точке из области определения функции, называются **непрерывными функциями**.

Примеры непрерывных функций: $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=e^x$, $y=P_n(x)$ (многочлен степени n).

Точки разрыва функции

Определение. Точкой разрыва функции называется точка из области определения функции, в которой функция не является непрерывной.

Пример. Функция

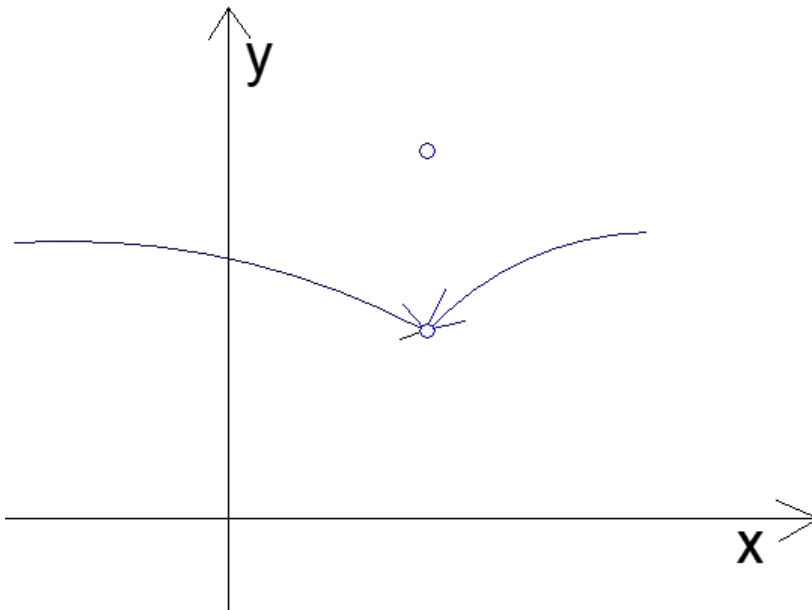
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

разрывна в 0, так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, f(0) = 0$

Классификация точек разрыва

Точки устранимого разрыва

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, равные между собой, но не равные значению функции в точке x_0 , то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.



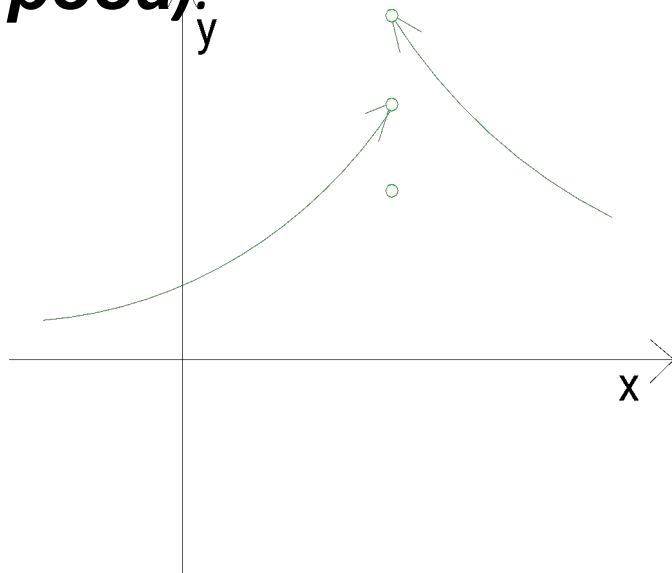
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Классификация точек разрыва

Точки скачка

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, не равные между собой, то точка x_0 называется **точкой скачка (точкой разрыва I**

рода).

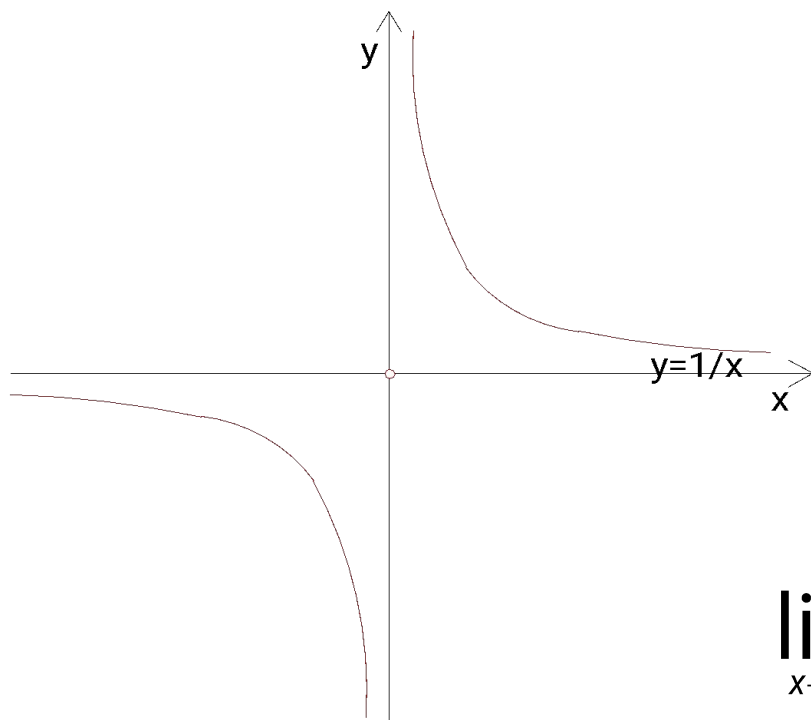


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Классификация точек разрыва

Точки разрыва II рода

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или бесконечен, то точка называется **точкой разрыва II рода**.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

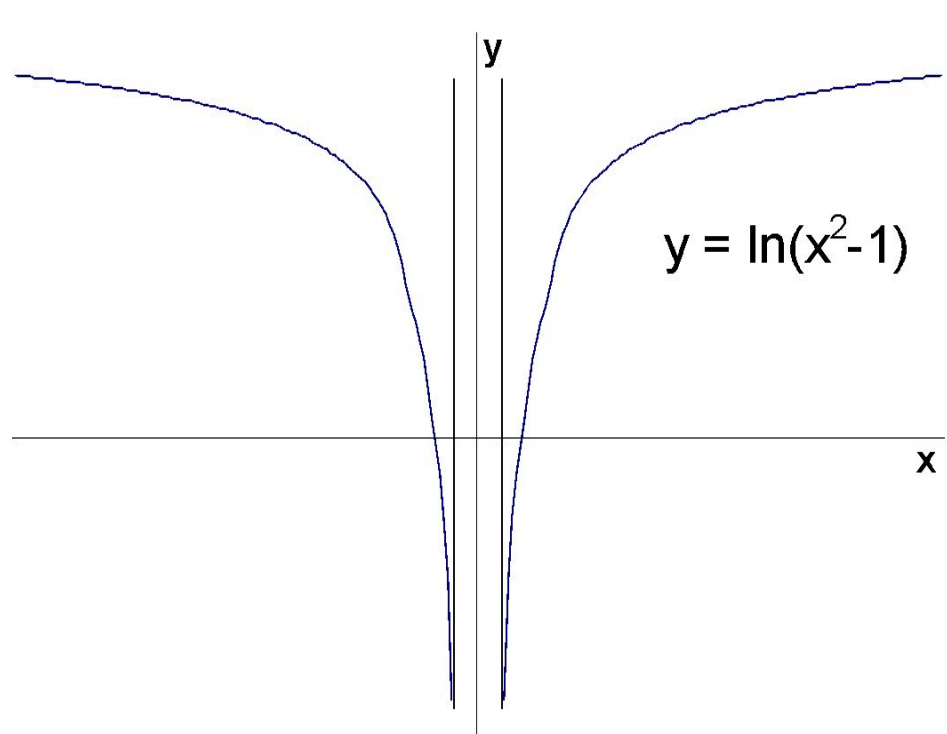
Вертикальные асимптоты

Прямая $x=x_0$ называется вертикальной

асимптотой графика функции при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \quad \text{ИЛИ}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$$



Наклонные асимптоты

Если существует прямая $y=kx+b$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0, \text{ то эта прямая}$$

называется асимптотой графика функции f при $x \rightarrow +\infty$.

при

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была

асимптотой, необходимо и достаточно,

чтобы выполнялись следующие условия:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b) . Точка x_0 интервала (a, b) называется точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$, если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки минимума и точки максимума функции называются **точками экстремума** функции. ~~Необходимое условие экстремума~~ Пусть точка x_0 - точка экстремума функции. Тогда либо производная функции в этой точке равна 0, либо не существует.

Исследование функции на МОНОТОННОСТЬ

Известно, что если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в (a, b) , то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) в (a, b) .

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{1}{x}$
$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

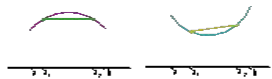
Критические точки функции $x = \pm 1$. $f'(x) > 0$ при $x < -1$ и при $x > 1$; $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 0$ и при $0 < x < 1$.

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция возрастает

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция
убывает

Выпуклость функции

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется **выпуклой вверх (вниз)** в интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 из интервала (a, b) из того, что $x_1 < x_2$, следует, что часть графика функции между точками $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ лежит выше (ниже) хорды, соединяющей эти точки.



Выпуклость функции.

Точки перегиба

Также говорят, что график функции $f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах (a, b) лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Если график функции в точке $(x_0, f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной на другую, то точка x_0 называется **точкой перегиба функции $f(x)$** .

Достаточные условия выпуклости функции и существования точек перегиба

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если на интервале (a,b) $f''(x) > 0$, то на интервале (a,b) функция выпукла вниз, и если на интервале $f''(x) < 0$, то

на интервале (a,b) функция выпукла вверх.

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если в левой и правой полукрестностях некоторой точки x_0 $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то точка x_0 – точка перегиба функции

Пример. Исследуем функцию $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ и построим её график.

- 1) $D(f) = R$, поскольку оба сомножителя в выражении $f(x)$ определены при любом x . Область значений $E(f)$ найдём после того, как отыщем локальные экстремумы функции.
- 2) Функция не является ни чётной, ни нечётной; не является она и периодической.
- 3) Область определения не имеет граничных точек, значит, нет и вертикальных асимптот графика.

4) Будем искать наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$. Коэффициент k найдём по формуле:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad \text{имеем}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^x = +\infty,$$

так что при $x \rightarrow +\infty$ асимптоты нет, причём

функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

При $x \rightarrow -\infty$ имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Теперь найдём значение b по формуле $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$.

Имеем: $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$

Таким образом, $k=0$ и $b=0$, так что при $x \rightarrow -\infty$ асимптота имеет уравнение $y=0$, то есть совпадает с осью Ox .

5) Точка пересечения с осью Oy равна $f(0)=0$. Заодно нашли одну точку пересечения с осью Ox .

Чтобы найти все точки пересечения графика с осью Ox , решаем уравнение $(x^2 - 2x)e^x = 0$.

Поскольку $e^x \neq 0$, решаем уравнение $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$, откуда получаем два корня: $x=0$ и $x=2$.

Так как точек разрыва нет, то имеем три интервала знакопостоянства функции: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Знак функции определяется множителем $x^2 - 2x$, поскольку

$e^x > 0$ при всех x . Значит, $f(x) > 0$ при $x \in (2; +\infty)$ и при $x \in (-\infty; 0)$

и $f(x) < 0$ при $x \in (0; 2)$.

6) Вычислим производную: $f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x$.

Интервалы возрастания задаются неравенством $f'(x) > 0$, то есть, с учётом того, что $e^x > 0$, неравенством $x^2 - 2x > 0$.

Решением этого неравенства служит множество $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

На этих двух интервалах функция возрастает.

Легко видеть, что на интервале $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ выполняется

неравенство $f'(x) < 0$, следовательно, это интервал

убывания функции. В точке $-\sqrt{2}$ возрастание сменяется

убыванием, значит, точка $-\sqrt{2}$ - точка локального

максимума.

Значение функции в этой точке равно

$$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1.17.$$

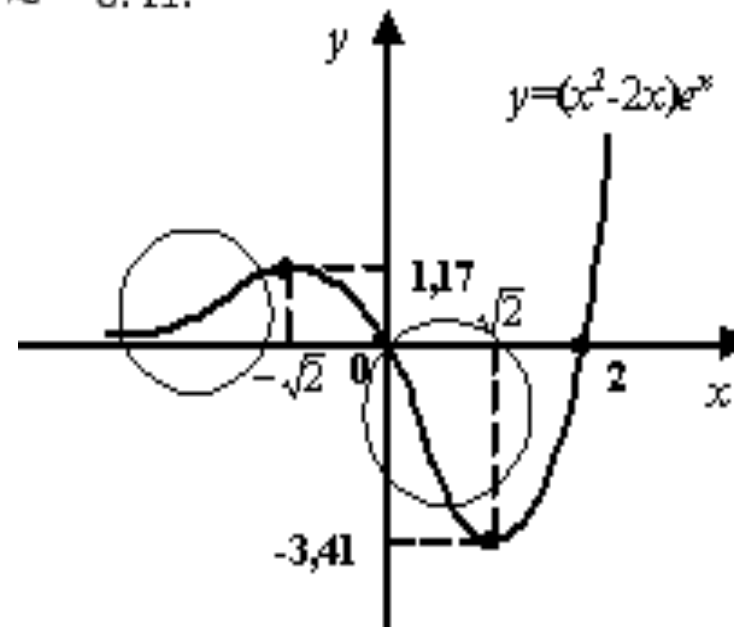
В точке $\sqrt{2}$ убывание сменяется возрастанием, значит, точка $\sqrt{2}$ - точка локального минимума функции.

Значение функции в точке минимума таково:

Теперь мы можем примерно представить, как идёт

график функции: $f_{\min} = f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -3.41.$

Эскиз графика функции $f(x)$



Становится очевидно, что область значений функции -- это

$$\mathcal{E}(f) = [f_{\min}; +\infty) \approx [-3.41; +\infty).$$

7) По эскизу графика видно, что где-то в местах, обведённых кружочками, должно смениться направление выпуклости, то есть должны быть точки перегиба. Для исследования этого найдём вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 2)e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x - 2)e^x.$$

Решим неравенство $f''(x) > 0$, эквивалентное неравенству

$$x^2 + 2x - 2 > 0.$$

Решением этого квадратного неравенства служит

объединение интервалов $(-1 + \sqrt{3}; +\infty) \approx (0.7; +\infty)$ и

$(-\infty; -1 - \sqrt{3}) \approx (-\infty; -2.7)$. На этих интервалах функция выпукла.

Ясно, что на интервале $(-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \approx (-2.7; 0.7)$ функция будет вогнутой. Тем самым точки $x_1 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$ и $x_2 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.7$ это точки перегиба. Значения функции в точках перегиба

такие:

$$f(x_1) = (6 + 4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0.84; \quad f(x_2) = (6 - 4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \approx -1.93.$$

8) Осталось построить окончательный чертёж:

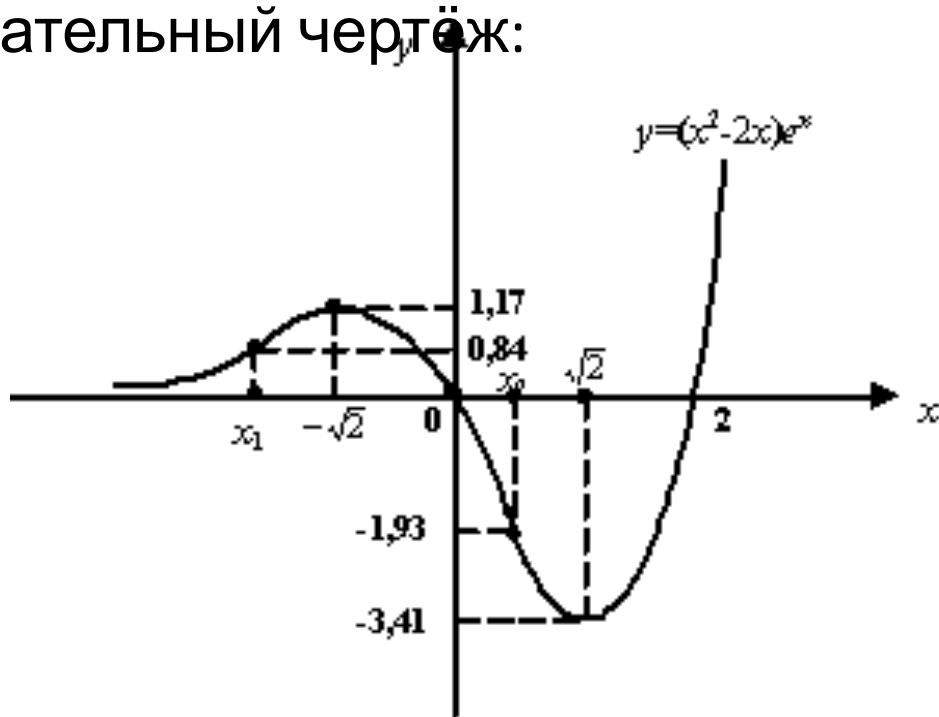


График функции $(x^2 - 2x)e^x$.