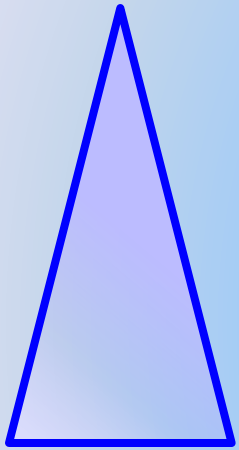
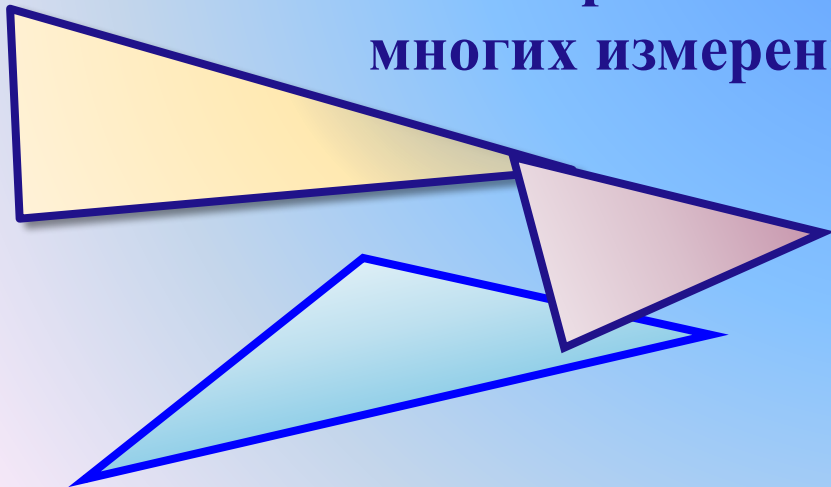


# ТРЕУГОЛЬНИКИ

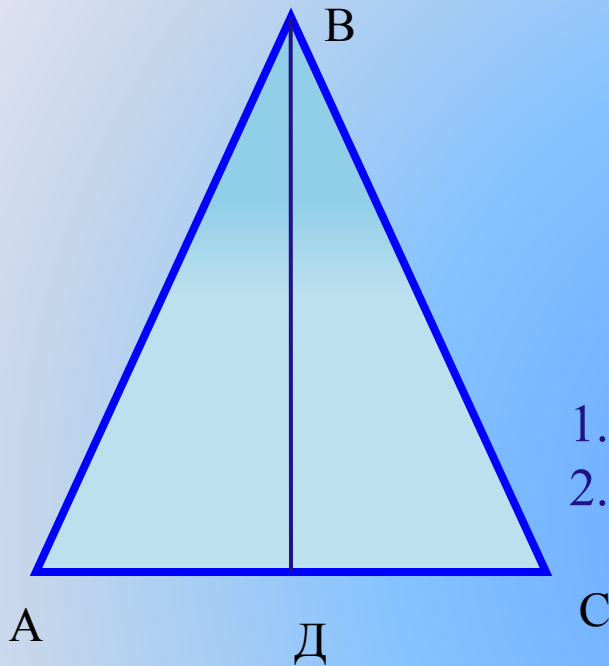
## (элементы, площади)



Треугольник – это простейшая фигура: три стороны и три вершины. Математики называют его двумерным симплексом. «Симплекс» по-латыни означает простейший. Именно в силу своей простоты треугольник явился основой многих измерений.



# РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Треугольник, у которого две стороны равны, называется *равнобедренным*.

Равные стороны называются боковыми сторонами ( $AB = BC$ ), а третья сторона – основанием ( $AC$ ).

## *Свойства*

1. Углы при основании равны ( $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ ).
2. Медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают ( $BD$ ).

## *Признаки*

Треугольник равнобедренный, если

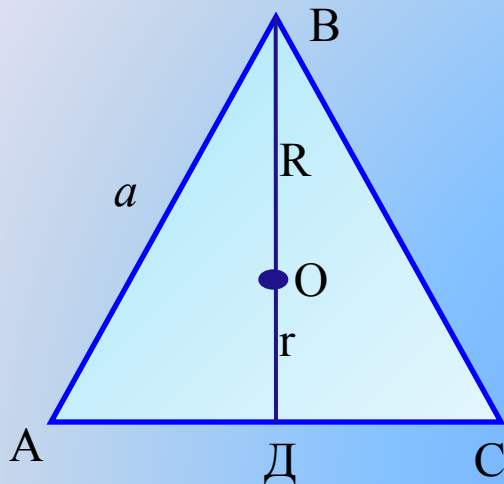
два угла  
равны

медиана является  
высотой

высота является  
биссектрисой

медиана  
является биссектрисой

# РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним (правильным)*.

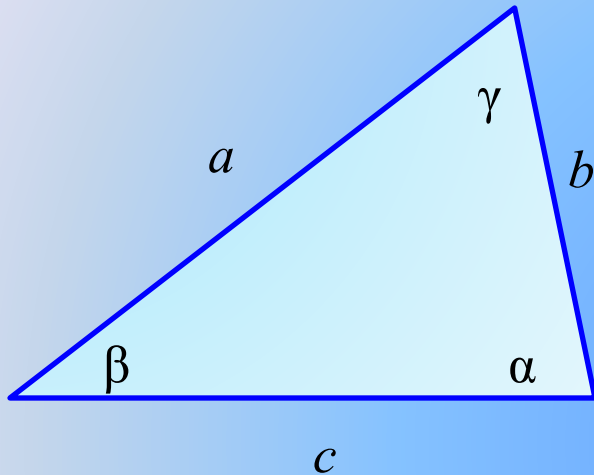
*Свойства*

1. Все углы равны ( $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$ ).
2. Каждая медиана совпадает с биссектрисой и высотой, проведёнными из той же вершины (ВД).
3. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

$$OD = r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad OB = R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad R = 2r$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \quad R = \frac{2}{3}h \quad r = \frac{1}{3}h$$

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ

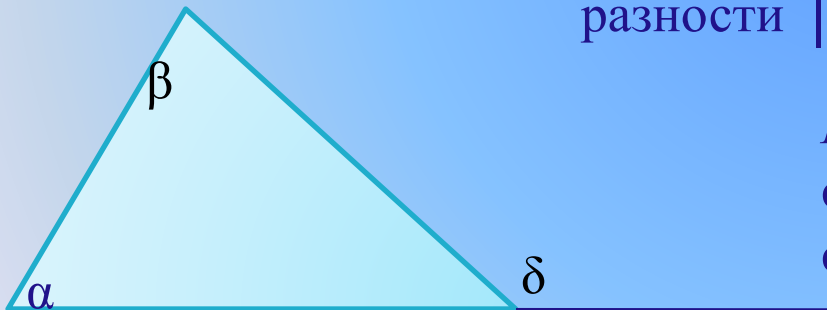


Сумма углов треугольника равна  $180^0$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

Против *большой* стороны в треугольнике лежит *большой* угол  $a > b \leftrightarrow \alpha > \beta$

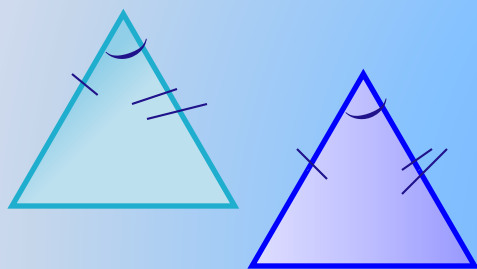
Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности  $|a - b| < c < a + b$



Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним  $\delta = \alpha + \beta$

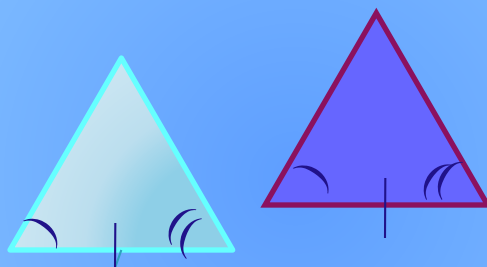
# ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

I признак



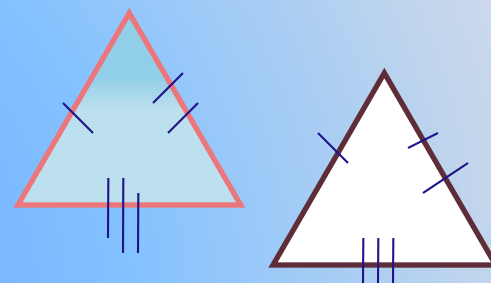
По двум сторонам  
и углу между  
ними

II признак



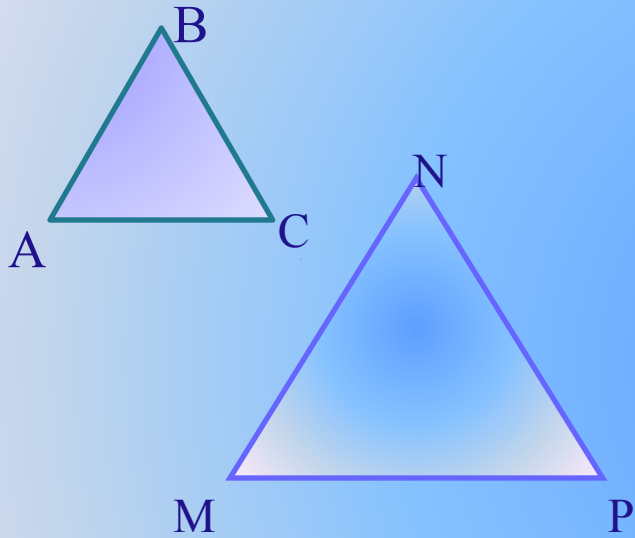
По одной стороне  
и двум прилежащим  
к ней углам

III признак



По трём сторонам

# ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



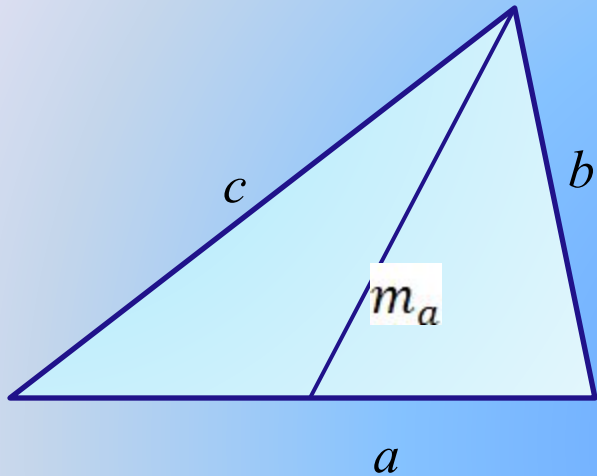
$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

$$1. \quad \angle A = \angle M \quad \angle B = \angle N$$

$$2. \quad \angle A = \angle M \quad \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP}$$

$$3. \quad \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

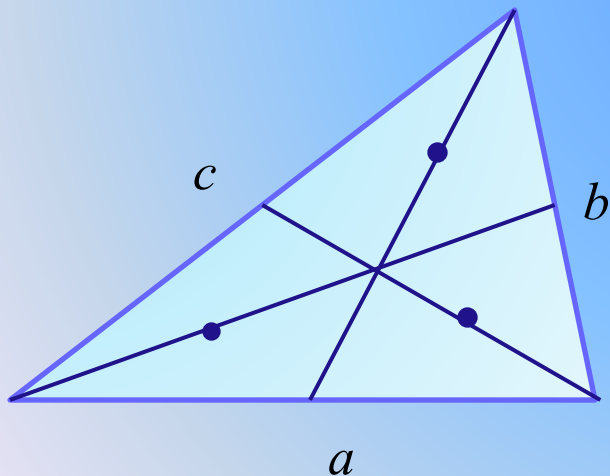
# МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА



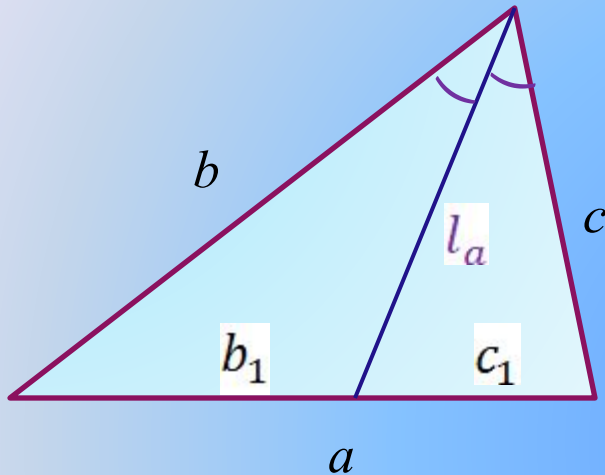
Медианой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны треугольника. Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).

Три медианы пересекаются в одной точке, которая всегда находится внутри треугольника (центр масс треугольника). Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$



# БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА



Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противоположащей стороне.

Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$$

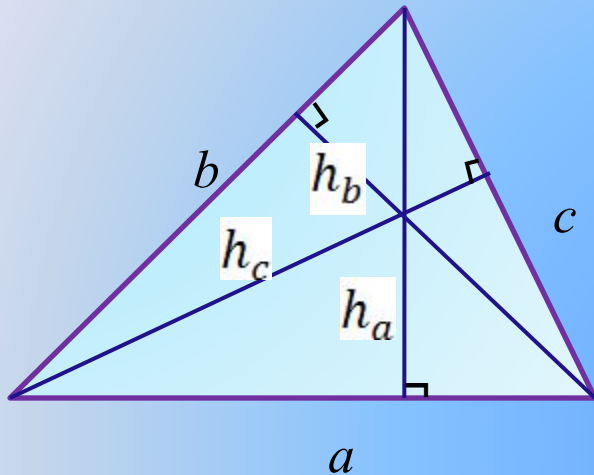
Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая всегда лежит внутри треугольника. Эта точка является центром вписанной окружности.

$$l_a^2 = bc - b_1c_1$$

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c}$$



# ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА



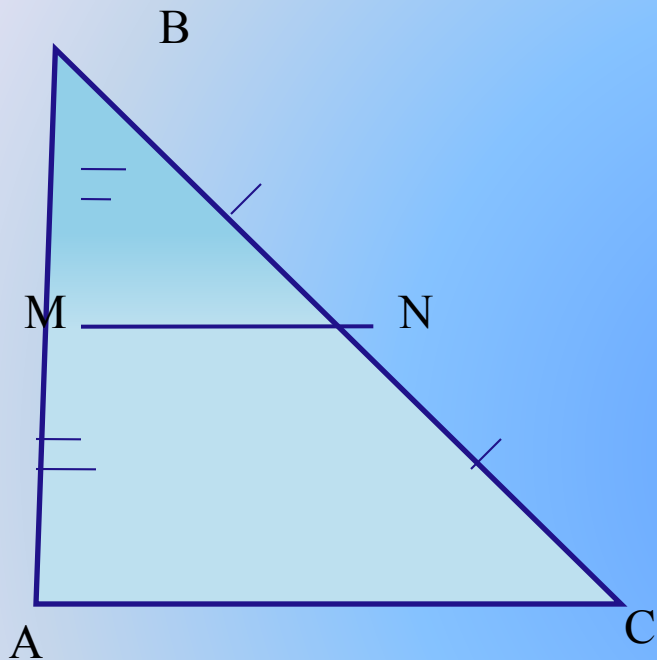
Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром.

Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника. Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла. Ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

# СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

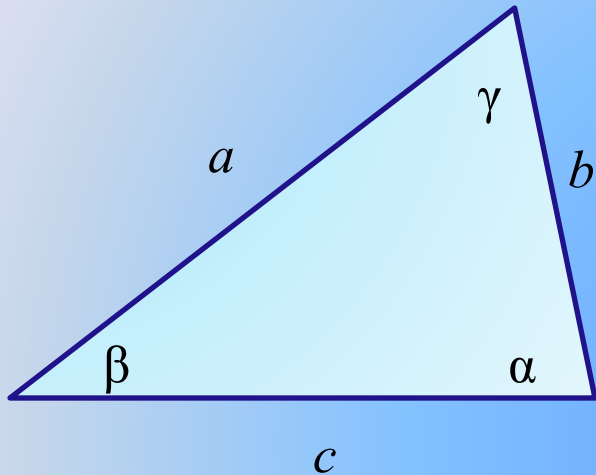


Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна её половине:

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC.$$

Она отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия  $\frac{1}{2}$

# ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ И СИНОСОВ



Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены  $a, b, c$ , а величины противолежащих им углов  $\alpha, \beta, \gamma$ ,

справедливы две теоремы.

*Теорема косинусов:*

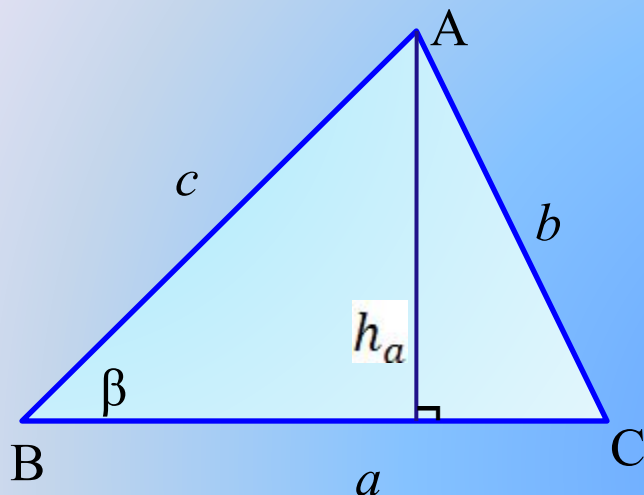
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

*Теорема синусов:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

где  $R$  - радиус описанной окружности

# ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а высота  $h_a$

площади вычисляются по формулам:

$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

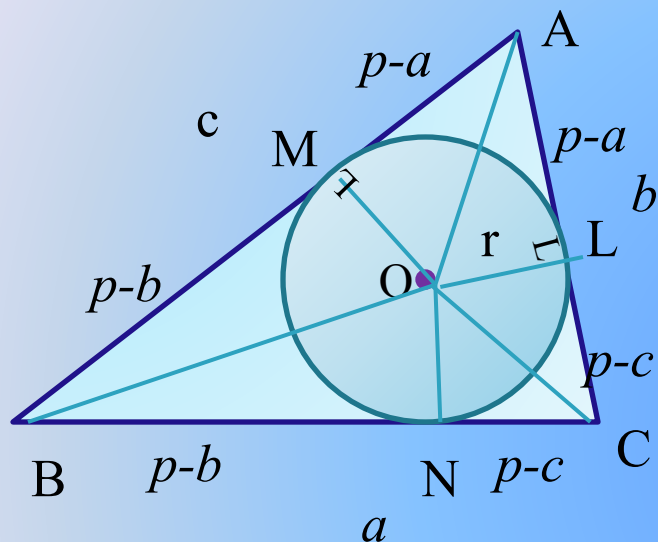
$$S = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2} \quad (\text{формула Герона})$$

$$S = pr \quad , \text{ где } r \text{ – радиус вписанной окружности}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \quad , \text{ где } R \text{ – радиус описанной окружности}$$

# ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



В любой треугольник можно *вписать окружность*.

Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.

$$r = \frac{S}{p}, \text{ где } S \text{ площадь треугольника, а}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$BN = BM = p - b$$

$$AM = AL = p - a$$

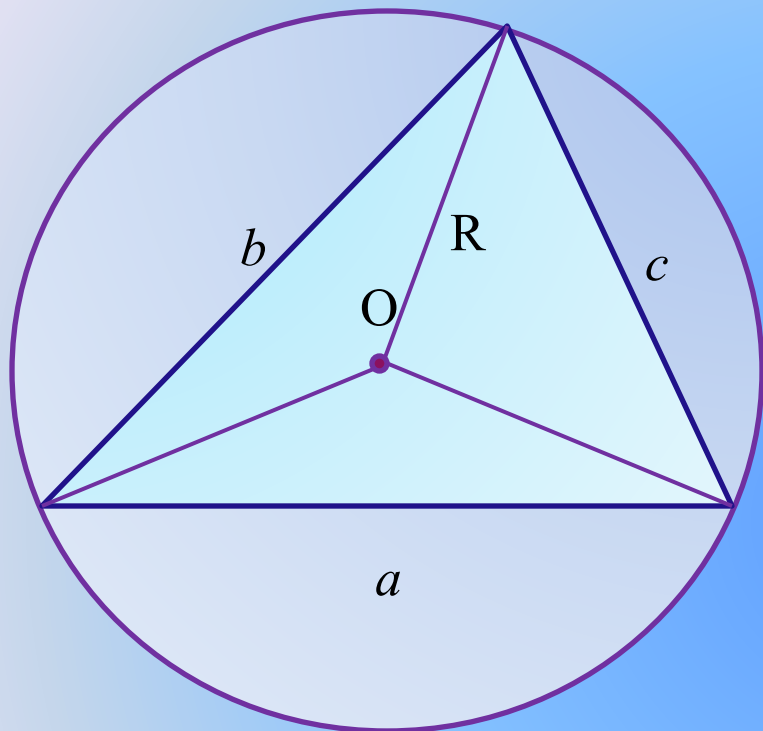
$$CN = CL = p - c$$

$$\angle BOC = \frac{\angle A}{2} + 90^\circ$$

$$\angle BOA = \frac{\angle C}{2} + 90^\circ$$

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90^\circ$$

# ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



Около любого треугольника можно описать окружность.

Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

, где  $S$  площадь треугольника