

Степенные ряды

Опред. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots$ - степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$. Поэтому будем изучать $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$, т.е. $x_0 = 0$.

$x = 0 \Rightarrow \forall$ степ. ряд сх. Есть ряды, для сх. можно при $x = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \dots + n! \cdot x^n + \dots, \quad x \neq 0, \quad c_n = n! \cdot x^n \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1)|x| \rightarrow +\infty \Rightarrow c_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ расход.}$$

Степенные ряды

Оп. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$ - степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$. Поэтому будем изучать $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$, т.е. $x_0 = 0$.

$x = 0 \Rightarrow \forall$ степ. ряд сх. Есть ряды, вк. сх. лишь при $x = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \dots + n! \cdot x^n + \dots \quad x \neq 0, c_n = n! \cdot x^n \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| =$$

$$= (n+1)|x| \rightarrow +\infty \Rightarrow c_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ расход.}$$

Т1 (Абель) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. адс.

Степенные ряды

Опред. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots$ - степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$ Поэтому будем изучать $\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$, т.е. $x_0 = 0$.

$x = 0 \Rightarrow$ Все члены ряда сх. Есть ряды, где сх. лишь при $x = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \dots + n! \cdot x^n + \dots \quad x \neq 0, c_n = n! \cdot x^n \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1)|x| \rightarrow +\infty \Rightarrow c_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ расход.}$$

Т1 (Абель) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. адс.

Д-бо. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \leq M \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1]} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ сх.}$

Теор. Д-гона.

T1 (Абель) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх, при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. адс.

D-бо. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1]} \leq M \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ сх.}$ Теор. 2-зона.

Mн-бо сх-чи $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Многодно {0} (беседы речь) $\exists \tilde{x} \neq 0$, при кот.

Mн-бо $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не ограничено $\Rightarrow (T.1)$ при сх. адс. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ (беседы сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ ограничено, $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x| > R \Rightarrow$ пакк, $|x| < R \Rightarrow$ сх $(T.1)$

При $|x| = R$ надо дополнительное исследование

T1 (Абель) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абр.

D-бо. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \leq M \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|_n}_{n \in [0, 1]} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Teor. D-зона.

Mн-бо сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Множество $\{0\}$ (беследяя пачк.) $\exists \tilde{x} \neq 0$, при \tilde{x} сх.

Mн-бо $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не опр. симметрично \Rightarrow (T.1) при сх. абр. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ (беследяя сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ опр. симметрично, $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x| > R \Rightarrow$ пачк., $|x| < R \Rightarrow$ сх (T.1)

При $|x| = R$ надо дополнительное исследование

Вопрос: мн-бо сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

- 1) $\{0\}$;
- 2) $(-\infty, +\infty)$, при этом сх-ов абсолютн.;
- 3) промежуток $(-R, R)$ со вложением концов или нет, при этом при $x \in (-R, R)$ сх-ов абсолютн.

T1 (Абель) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. abs.

D-бо. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \leq M \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1]} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх. Teor. D-зона.

Mн-бо сх-ми $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Множество $\{0\}$ (беследяя пачк.) $\exists \tilde{x} \neq 0$, при пад сх

Mн-бо $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не срп. сверху \Rightarrow (T.1) пад сх. abs. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ (беследя сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ срп. сверху, $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x| > R \Rightarrow$ пад, $|x| < R \Rightarrow$ сх (T.1)

При $|x| = R$ надо дополнительное исследование

Возбод: мн-бо сх-ми $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

мн-бо сх-ми $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$:

- 1) $\{0\};$
- 2) $(-\infty, +\infty)$, приём сх-ми absol.;
- 3) промежуток $<-R, R>$ со вложением концов или нет, приём при $x \in (-R, R)$ сх-ми absol.

- 1) $\{x_0\};$
- 2) $(-\infty, +\infty)$, приём сх-ми absol.;
- 3) промежуток $<x_0 - R, x_0 + R>$ со вложением концов или нет, приём при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ сх-ми absol.

T1 (Абсолютная сходимость) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абсолютно.

Д-бо. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \leq M \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{x \in [0, 1]} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Теор. 2-зона.

Мн-во сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Множество $\{0\}$ (бескдг пак.) $\exists \tilde{x} \neq 0$, вр пак сх.

Мн-во $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не опр. сверху \Rightarrow (T.1) пак сх. абсолютно. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ (бескдг сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ опр. сверху, $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x| > R \Rightarrow$ пак, $|x| < R \Rightarrow$ сх. (T.1)

При $|x| = R$ надо дополнительное исследование

В общем: мн-во сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

- 1) $\{0\}$;
- 2) $(-\infty, +\infty)$, при этом сх-ов абсолютн.;
- 3) промежуток $<-R, R>$ со вкл. концами или нет, при этом при $x \in (-R, R)$ сх-ов абсолютн.

мн-во сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$:

- 1) $\{x_0\}$;
- 2) $(-\infty, +\infty)$, при этом сх-ов абсолютн.;
- 3) промежуток $<x_0 - R, x_0 + R>$ со вкл. концами или нет, при этом при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ сх-ов абсолютн.

Берем на R -радиус сх-ов сим. пака ($R \in [0, +\infty]$).

У бескдг пак. (бескдг сх.) пака $R = 0$ ($R = +\infty$).

Вопрос: для коэф. сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

- 1) $\{0\}$;
- 2) $(-\infty, +\infty)$, при этом сх-ов адекл.;
- 3) промежуток $(-R, R)$ со вкл. концами концов если нет, при этом при $x \in (-R, R)$ сх-ов адекл.

для коэф. сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

- 1) $\{x_0\}$;
- 2) $(-\infty, +\infty)$, при этом сх-ов адекл.;
- 3) промежуток (x_0-R, x_0+R) со вкл. концами концов если нет, при этом при $x \in (x_0-R, x_0+R)$ сх-ов адекл.

Величина R - радиус сх-ов симм. рода ($R \in [0, +\infty]$).

У бесконечн. рядов (бесконечн. сх.). тогда $R = 0$ ($R = +\infty$).

Т2 (Коши-Адамар). Радиус R сх-ов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Верхний R-радиус си-ори цен. ряда ($R \in [0, +\infty]$),

у верхней грех. (верхней гр.) ряда $R = 0$ ($R = +\infty$).

T2 (Коши-Адамар). Радиус R си-ори $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Д-бо. $p_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$. Надо д-ть, что $R = \frac{1}{p}$.

1. $p = 0$, $p_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| p_n \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ си. адс. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. $R = +\infty$.

Beruruna R - radius cx-ou cīen. pāda ($R \in [0, +\infty]$).

Y bieži pācx. (bieži cx.) pāda $R=0$ ($R=+\infty$).

T2 (Коши-Адамар). Radius R cx-ou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ naodās no formula:

$$R = \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

D-ko. $p_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $p = \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n$. Ha do d-rū, zo $R = \frac{1}{p}$.

1. $p=0$, $p_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| p_n \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cx. ade. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, t.e. $R = +\infty$.

2. $p=+\infty$. D-mēr, zo $\forall x \neq 0$ pād pācx., t.e. $R=0$.

$\forall x \neq 0 \exists \{n_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = +\infty$, t.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0$
 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_{n_k} x^{n_k}| > 1$, t.e. $a_n x^n \not\rightarrow 0$.

Т2 (Коши-Адамар). Радиус R сх-ии $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Д-бо. $p_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $p = \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n$. Надо д-ть, что $R = \frac{1}{p}$.

1. $p = 0$. $p_n \geq 0 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| p_n \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. асб. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. $R = +\infty$.

2. $p = +\infty$. Д-мей, что $\forall x \neq 0$ подпакх., т.е. $R = 0$.

$\forall x \neq 0 \exists \{n_k\}$: $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = +\infty$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty \Rightarrow \exists k_0: \forall k \geq k_0$ $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_{n_k} x^{n_k}| > 1$, т.е. $a_n x^n \not\rightarrow 0$.

3. $0 < p < +\infty$. Надо установить, что $R = \frac{1}{p}$, т.е. $\forall x$, $|x| < \frac{1}{p}$ под сх. асб.,

а $\forall x$, $|x| > \frac{1}{p}$ подпакх. Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| p_n = |x| \cdot p$.

т.е., если $|x| < \frac{1}{p} \Rightarrow$ под сх. асб.; если $|x| > \frac{1}{p}$, то $a_n x^n \not\rightarrow 0$, т.е. подпакх.

Теор. 2-зона.

Примеры

$$1. \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{с. а.д. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

Примеры

1. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{с.x. адс. } \forall x, \text{ т.e. } R = +\infty$$

2. $x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

$|x| < 1$ с.x. адс., $|x| > 1$ пасх., $x = -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$ пасх.

$x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ по любвица, с.x. усл.

Примеры

1. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{с. а.д. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

2. $x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

$|x| < 1$ с. а.д., $|x| > 1$ расх., $x = -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$ расх.

$x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ ряд Лейбница, с. ул.

3. $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$ (Биномиальный ряд)

$\alpha \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow$ ряд выражается в конечном числе членов, т.е. $R = +\infty$

Сумма ряда в этом случае равна $(1+x)^\alpha$ (Бином Ньютона, проверить самод.)

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \quad u_0(x) = 1, \quad u_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{при } x \neq 0 \quad \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{(\alpha-n)x}{n+1} \right| \rightarrow |x|, \text{ т.е. } \begin{cases} |x| < 1 \text{ cx. abs.} \Rightarrow R = 1 \\ |x| > 1 \text{ pacx.} \end{cases}$$

Исследуем поведение биномиального ряда на концах, т.е. при $x = \pm 1$

$$\alpha \leq -1 \Rightarrow \frac{|u_{n+1}(\pm 1)|}{|u_n(\pm 1)|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{(прииск Деламбера)} \\ \text{в дополнительной форме} \end{cases} \Rightarrow \text{pacx. } (u_n(\pm 1) \rightarrow 0)$$

$$\alpha \in (-1, +\infty) \setminus \mathbb{N}_0 \Rightarrow n \left[\frac{|u_n(\pm 1)|}{|u_{n+1}(\pm 1)|} - 1 \right] \underset{(n>\alpha)}{=} n \left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1 \right) = \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} \rightarrow \alpha+1$$

\Rightarrow при $\alpha > 0$ ряд abs. cx. при $x = \pm 1$,

при $-1 < \alpha < 0$ нет abs. cx. ии при $x = 1$, ии при $x = -1$.

$$\text{При } \alpha \in (-1, 0) \quad c_n = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n}_{\text{pacx. (Ряде)}} ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n}_{\text{нет abs. cx. (Ряде)}}$$

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} < c_n, \text{ т.е. } c_n \downarrow. \quad \mathcal{D}\text{-неч., то } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (?)$$

$$-\ln c_n = -\underbrace{\ln \left(1 - \frac{\alpha+1}{1}\right)}_{b_1} - \underbrace{\ln \left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right)}_{b_2} - \dots - \underbrace{\ln \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right)}_{b_n} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$0 < b_n = -\ln \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right) \sim \frac{\alpha+1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ pacx.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln c_n) = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln c_n = -\infty, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) \text{ cx. ych.}$$

Всёобщ при $\alpha \notin \mathbb{N}_0 : R = 1,$

$\alpha > 0$ — cx. abs. при $x = \pm 1;$

$1 < \alpha < 0$ — cx. ych. при $x = 1, \text{ pacx. при } x = -1;$

$\alpha \leq -1$ — pacx. при $x = \pm 1.$