Степенные ряды

Опр $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ – степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$ Поэтому будем изучать $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$, т.е. $x_0 = 0$.

$x = 0 \Rightarrow \forall$ степ. ряд сх. Есть ряды, что сх. лишь при $x = 0$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots + n!\cdot x^n + \ldots$ $x \neq 0$, $c_n = n!\cdot x^n$ $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| =$

$= (n+1)|x| \to +\infty \Rightarrow c_n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ расх.

Степенные ряды

Опр $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ – степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$ Поэтому будем изучать $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$, т.е. $x_0 = 0$.

$x = 0 \Rightarrow \forall$ степ. ряд сх. Есть ряды, что сх. лишь при $x = 0$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots + n! \cdot x^n + \ldots$ $x \neq 0$, $c_n = n! \cdot x^n$ $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| =$

$= (n+1)|x| \to +\infty \Rightarrow c_n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ расх.

T1 (Абель) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}|$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс.

Степенные ряды

<u>Опр</u> $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ – степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$ Поэтому будем изучать $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$, т.е. $x_0 = 0$.

$x = 0 \Rightarrow \forall$ степ ряд сх. Есть ряды, что сх. лишь при $x = 0$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots + n! \cdot x^n + \ldots$ $\quad x \neq 0$, $c_n = n! \cdot x^n$ $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| =$

$= (n+1)|x| \to +\infty \Rightarrow c_n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ расх.

<u>Т1</u> (Абель) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x : |x| < |\tilde{x}|$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс.

Д-во. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0 : |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \ldots$

$\forall x : |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leq M \underbrace{\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n}_{q \in [0,1)} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Теор. д-зана.

$\underline{\text{Т1}}$ (Абель) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x=\tilde{x}\neq 0 \Rightarrow \forall x: |x|<|\tilde{x}|$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс.

Д-во. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M>0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n=0,1,\ldots$

$\forall x: |x|<|\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leq M \underbrace{\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|}_{q\in[0,1)}^n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Теор. д-зана.

Мн-во сх-сти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Может быть $\{0\}$ (всюду расх.) $\exists \tilde{x}\neq 0$, что ряд сх.

Мн-во $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не огр. сверху $\Rightarrow$ (Т.1) ряд сх. абс. $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ (всюду сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ огр. сверху, $R=\sup\{|\tilde{x}|\}>0$. Если $|x|>R \Rightarrow$ расх, $|x|<R \Rightarrow$ сх (Т.1)

При $|x|=R$ надо дополнительное исследование

T1 (Абель) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x=\tilde{x}\neq 0 \Rightarrow \forall x: |x|<|\tilde{x}|$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс.

Д-во. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M>0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \ldots$

$\forall x: |x|<|\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leq M \underbrace{\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|}_{q\in[0,1)}^n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Теор. д-зана.

Мн-во сх-сти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Может быть $\{0\}$ (всюду расх.) $\exists \tilde{x}\neq 0$, что ряд сх.

Мн-во $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не огр. сверху $\Rightarrow$ (Т.1) ряд сх. абс. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ (всюду сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ огр. сверху, $R = \sup\{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x|>R \Rightarrow$ расх, $|x|<R \Rightarrow$ сх (Т. 1)

При $|x| = R$ надо дополнительное исследование

Вывод: мн-во сх-сти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1) $\{0\}$;
2) $(-\infty, +\infty)$, причём сх-сть абсол.;
3) промежуток $<-R, R>$ со включением концов или нет, причём при $x \in (-R, R)$ сх-сть абсол

$\underline{\text{Т1}}$ (Абель) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x=\tilde{x}\neq 0 \Rightarrow \forall x: |x|<|\tilde{x}|$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс.

Д-во. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M>0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \ldots$

$\forall x: |x|<|\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leq M \underbrace{\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n}_{q\in[0,1)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Теор. д-зана.

Мн-во сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Может быть $\{0\}$ (всюду расх.) $\exists \tilde{x}\neq 0$, что ряд сх.

Мн-во $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не огр. сверху $\Rightarrow$ (Т.1) ряд сх. абс. $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ (всюду сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ огр. сверху, $R = \sup\{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x|>R \Rightarrow$ расх, $|x|<R \Rightarrow$ сх (Т.1)

При $|x|=R$ надо дополнительное исследование

Вывод: мн-во сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1) $\{0\}$;
2) $(-\infty,+\infty)$, причём сх-сть абсол.;
3) промежуток $<-R, R>$ со включением концов или нет, причём при $x\in(-R,R)$ сх-сть абсол

мн-во сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

1) $\{x_0\}$;
2) $(-\infty,+\infty)$, причём сх-сть абсол.;
3) промежуток $<x_0-R, x_0+R>$ со включением концов или нет, причём при $x\in(x_0-R, x_0+R)$ сх-сть абсол.

T1 (Абель) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. при $x=\tilde{x}\neq 0 \Rightarrow \forall x: |x|<|\tilde{x}|$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс.

Д-во. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сх. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M>0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n=0,1,\dots$

$\forall x: |x|<|\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leq M \underbrace{\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|}_{q\in[0,1)}^n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сх.

Теор. д-зана.

Мн-во сх-ти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Может быть $\{0\}$ (всюду расх.) $\exists\, \tilde{x}\neq 0$, что ряд сх.

Мн-во $\{|\tilde{x}|\}$. Оно не огр. сверху $\Rightarrow$ (Т.1) ряд сх. абс. $\forall x \in (-\infty,+\infty)$ (всюду сх.)

$\{|\tilde{x}|\}$ огр. сверху, $R = \sup\{|\tilde{x}|\} > 0$. Если $|x|>R \Rightarrow$ расх, $|x|<R \Rightarrow$ сх. (Т.1)

При $|x| = R$ надо дополнительное исследование

Вывод: мн-во сх-ти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1) $\{0\}$;
2) $(-\infty,+\infty)$, причём сх-ть абсол.;
3) промежуток $\langle -R, R\rangle$ со включением концов или нет, причём при $x\in(-R,R)$ сх-ть абсол

мн-во сх-ти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

1) $\{x_0\}$;
2) $(-\infty,+\infty)$, причём сх-ть абсол.;
3) промежуток $\langle x_0-R, x_0+R\rangle$ со включением концов или нет, причём при $x\in(x_0-R, x_0+R)$ сх-ть абсол.

Величина R – радиус сх-ти степ. ряда ($R\in[0,+\infty]$).

У всюду расх. (всюду сх.) ряда $R=0$ ($R=+\infty$).

Вывод: мн-во сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1) $\{0\}$;
2) $(-\infty, +\infty)$, причём сх-сть абсол.;
3) промежуток $\langle -R, R \rangle$ со включением концов или нет, причём при $x \in (-R, R)$ сх-сть абсол.

мн-во сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

1) $\{x_0\}$;
2) $(-\infty, +\infty)$, причём сх-сть абсол.;
3) промежуток $\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$ со включением концов или нет, причём при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ сх-сть абсол.

Величина R – радиус сх-сти степ. ряда ($R \in [0, +\infty]$).

У всюду расх. (всюду сх.) ряда $R = 0$ ($R = +\infty$).

<u>Т2</u> (Коши–Адамар). Радиус R сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \ \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Величина R – радиус сх-сти степ. ряда ($R \in [0, +\infty]$).

У всюду расх. (всюду сх.) ряда $R = 0$ ($R = +\infty$).

<u>Т2</u> (Коши-Адамар). Радиус R сх-сти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

Д-во. $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n$. Надо д-ть, что $R = \frac{1}{\rho}$.

1. $\rho = 0$. $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} =$

$= |x| \rho_n \to 0 < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. $R = +\infty$.

Величина R – радиус сх-ти степ. ряда ($R \in [0, +\infty]$).

У всюду расх. (всюду сх.) ряда $R = 0$ ($R = +\infty$).

<u>Т2</u> (Коши–Адамар). Радиус R сх-ти $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

Д-во. $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n$. Надо д-ть, что $R = \frac{1}{\rho}$.

1. $\rho = 0$. $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} =$
$= |x| \rho_n \to 0 < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. $R = +\infty$.

2. $\rho = +\infty$. Д-жем, что $\forall x \neq 0$ ряд расх., т.е. $R = 0$.

$\forall x \neq 0$ $\exists \{n_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = +\infty$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0$
$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_{n_k} x^{n_k}| > 1$, т.е. $a_n x^n \not\to 0$.

T2 (Коши–Адамар). Радиус R сх-сти $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = +\infty, \ \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Д-во. $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n$. Надо д-ть, что $R = \frac{1}{\rho}$.

1. $\rho = 0$. $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} =$
$= |x| \rho_n \to 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сх. абс. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. $R = +\infty$.

2. $\rho = +\infty$. Д-жем, что $\forall x \neq 0$ ряд расх., т.е. $R = 0$.
$\forall x \neq 0$ $\exists \{n_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = +\infty$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. $\Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0$
$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_{n_k} x^{n_k}| > 1$, т.е. $a_n x^n \not\to 0$.

3. $0 < \rho < +\infty$. Надо установить, что $R = \frac{1}{\rho}$, т.е. $\forall x$, $|x| < \frac{1}{\rho}$ ряд сх. (абс.),
а $\forall x$, $|x| > \frac{1}{\rho}$ ряд расх. Но $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x| \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\rho_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x| \rho_n = |x| \cdot \rho$.

Т.е., если $|x| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow$ ряд сх. абс.; если $|x| > \frac{1}{\rho}$, то $a_n x^n \not\to 0$, т.е. расх.

Теор. д-зана.

Примеры

1. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{сх. абс. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

Примеры

1. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{сх. абс. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

2. $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

$|x| < 1$ сх. абс., $|x| > 1$ расх., $x = -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} - \ldots$ расх.

$x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$ ряд Лейбница, сх. усл.

Примеры

1. $1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$x\neq 0 \Rightarrow \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|}=\frac{|x|}{n+1}\to 0<1 \Rightarrow \text{сх. абс. } \forall x, \text{ т.е. } R=+\infty$$

2. $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to 1 \Rightarrow R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{1}=1$$

$|x|<1$ сх. абс., $|x|>1$ расх., $x=-1\Rightarrow -1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots$ расх.

$x=1\Rightarrow 1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$ ряд Лейбница, сх. усл.

3. $1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n$ (биномиальный ряд)

$\alpha\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}\Rightarrow$ ряд вырождается в конечную сумму, т.е. $R=+\infty$

Сумма ряда в этом случае равна $(1+x)^\alpha$ (бином Ньютона, проверить самост.)

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ $u_0(x) \equiv 1$, $u_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots$;

при $x \neq 0$ $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left|\dfrac{(\alpha-n)x}{n+1}\right| \to |x|$, т.е. $\left.\begin{array}{l}|x|<1 \text{ сх абс.}\\ |x|>1 \text{ расх}\end{array}\right\} \Rightarrow R = 1$

Исследуем поведение биномиального ряда на концах, т.е. при $x = \pm 1$

$\alpha \leq -1 \Rightarrow \dfrac{|u_{n+1}(\pm 1)|}{|u_n(\pm 1)|} = \dfrac{n-\alpha}{n+1} \geq 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{признак Даламбера}\\ \text{в допредельной форме}\end{array}\right) \Rightarrow \text{расх.} \ (u_n(\pm 1) \not\to 0)$

$\alpha \in (-1, +\infty)\setminus\mathbb{N}_0 \Rightarrow n\left[\dfrac{|u_n(\pm 1)|}{|u_{n+1}(\pm 1)|} - 1\right] \underset{(n>\alpha)}{=} n\left(\dfrac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \dfrac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} \to \alpha + 1$

$\Rightarrow$ при $\alpha > 0$ ряд абс. сх. при $x = \pm 1$,
при $-1 < \alpha < 0$ нет абс. сх ни при $x = 1$, ни при $x = -1$.

При $\alpha \in (-1, 0)$ $c_n = \dfrac{(-\alpha)(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot(n-1-\alpha)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \underbrace{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n}_{\text{расх. (Раабе)}}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(1) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$
нет абс. сх. (Раабе)

$c_{n+1} = c_n \cdot \dfrac{n-\alpha}{n+1} < c_n$, т.е. $c_n \downarrow$. Д-жем, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ (?)

$-\ln c_n = \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{1}\right)}_{b_1} \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right)}_{b_2} - \ldots \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right)}_{b_n} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$0 < b_n = -\ln\left(1 - \dfrac{\alpha+1}{n}\right) \sim \dfrac{\alpha+1}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-\ln c_n) = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \ln c_n = -\infty$, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(1)$ сх. усл.

Вывод при $\alpha \notin \mathbb{N}_0$: $R = 1$,

$\alpha > 0$ — сх. абс. при $x = \pm 1$;
$-1 < \alpha < 0$ — сх. усл. при $x = 1$, расх. при $x = -1$;
$\alpha \leq -1$ — расх. при $x = \pm 1$.