

## Степенные ряды

Опр  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$  - степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$  Поэтому будем изучать  $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ , т.е.  $x_0 = 0$ .

$x = 0 \Rightarrow \forall$  степен. ряд сх. Есть ряды, что сх. лишь при  $x = 0$ .

$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \dots + n! \cdot x^n + \dots$   $x \neq 0, c_n = n! \cdot x^n \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| =$

$= (n+1)|x| \rightarrow +\infty \Rightarrow c_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  расх.

## Степенные ряды

Опр  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$  - степенной ряд.

$x - x_0 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$  Поэтому будем изучать  $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ , т.е.  $x_0 = 0$ .

$x = 0 \Rightarrow \forall$  степен. ряд сх. Есть ряды, со сх. лишь при  $x = 0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \dots + n! \cdot x^n + \dots \quad x \neq 0, \quad c_n = n! \cdot x^n \quad \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| =$$

$$= (n+1)|x| \rightarrow +\infty \Rightarrow c_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ расх.}$$

Т1 (Абель)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сх. при  $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сх. абс.

## Степенные ряды

Опр  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$  - степенной ряд.

$x-x_0 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$  Поэтому будем изучать  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , т.е.  $x_0=0$ .

$x=0 \Rightarrow \forall$  степен. ряд сх. Есть ряды, со сх. лишь при  $x=0$ .

$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + \dots + n! \cdot x^n + \dots$   $x \neq 0, c_n = n! \cdot x^n$   $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| =$

$= (n+1)|x| \rightarrow +\infty \Rightarrow c_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  расх.

Т1 (Абель)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сх. при  $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сх. абс.

Д-во.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$  сх.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1)} \leq M \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  сх.

Тест.  $\delta$ -зона.

Т1 (Абель)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.к., при  $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.к. а.с.

Д-во.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$  с.к.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1)} \leq M \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  с.к. Теор. о-зона.

Мн-во с.к.-сум  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Может быть  $\{0\}$  (всюду расх.)  $\exists \tilde{x} \neq 0$ , во ряд с.к.

Мн-во  $\{|\tilde{x}|\}$ . Оно не о.р. сверху  $\Rightarrow$  (т.1) ряд с.к. а.с.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  (всюду с.к.)

$\{|\tilde{x}|\}$  о.р. сверху,  $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$ . Если  $|x| > R \Rightarrow$  расх.,  $|x| < R \Rightarrow$  с.к. (т.1)

При  $|x| = R$  надо дополнительное исследование

Т1 (Абель)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.к. при  $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.к. абс.

Д-во.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$  с.к.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1]} \leq M \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  с.к.

Теор. 2-зона.

Мн-во с.к.-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Может быть  $\{0\}$  (всёду расх.)  $\exists \tilde{x} \neq 0$ , где расх. с.к.

Мн-во  $\{|\tilde{x}|\}$ . Оно не огр. сверху  $\Rightarrow$  (т.1) расх. с.к. абс.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  (всёду с.к.)

$\{|\tilde{x}|\}$  огр. сверху,  $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$ . Если  $|x| > R \Rightarrow$  расх.,  $|x| < R \Rightarrow$  с.к. (т.1)

При  $|x| = R$  надо дополнительное исследование

Вывод: мн-во с.к.-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ :

- 1)  $\{0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , при этом с.к.-сть абсол.;
- 3) промежуток  $\langle -R, R \rangle$  со включением концов или нет, при этом при  $x \in (-R, R)$  с.к.-сть абсол.

Т1 (Абель)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.х. при  $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.х. абс.

Д-во.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$  с.х.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1)} \leq M \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  с.х.

Теор. 2-закна.

Мн-во с.х.-ов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Может быть  $\{0\}$  (всегда расх.)  $\exists \tilde{x} \neq 0$ , во ред с.х.

Мн-во  $\{|\tilde{x}|\}$ . Оно не опр. сверху  $\Rightarrow$  (т.1) ред с.х. абс.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  (всегда с.х.)

$\{|\tilde{x}|\}$  опр. сверху,  $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$ . Если  $|x| > R \Rightarrow$  расх.,  $|x| < R \Rightarrow$  с.х. (т.1)

При  $|x| = R$  надо дополнительное исследование

Вывод: мн-во с.х.-ов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ :

мн-во с.х.-ов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ :

- 1)  $\{0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , придем с.х.-ов абс.;
- 3) промежутки  $\langle -R, R \rangle$  со включением концов или нет, придем при  $x \in (-R, R)$  с.х.-ов абс.

- 1)  $\{x_0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , придем с.х.-ов абс.;
- 3) промежутки  $\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$  со включением концов или нет, придем при  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  с.х.-ов абс.

Т1 (Абель)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.х. при  $x = \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow \forall x: |x| < |\tilde{x}| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.х. а.б.с.

Д-во.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$  с.х.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tilde{x}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |a_n \tilde{x}^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$

$\forall x: |x| < |\tilde{x}| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \underbrace{\left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n}_{q \in [0, 1]} \leq M \left| \frac{x}{\tilde{x}} \right|^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  с.х.

Теор. 3-зана.

Мн-во с.х-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Может быть  $\{0\}$  (всюду расх.)  $\exists \tilde{x} \neq 0$ , во ряд с.х.

Мн-во  $\{|\tilde{x}|\}$ . Оно не огр. сверху  $\Rightarrow$  (Т.1) ряд с.х. а.б.с.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  (всюду с.х.)

$\{|\tilde{x}|\}$  огр. сверху,  $R = \sup \{|\tilde{x}|\} > 0$ . Если  $|x| > R \Rightarrow$  расх.,  $|x| < R \Rightarrow$  с.х. (Т.1)

При  $|x| = R$  надо дополнительное исследование

Вывод: мн-во с.х-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ :

- 1)  $\{0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , придем с.х-сть а.б.с.;
- 3) промежуток  $\langle -R, R \rangle$  со включением концов или нет, придем при  $x \in (-R, R)$  с.х-сть а.б.с.

мн-во с.х-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ :

- 1)  $\{x_0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , придем с.х-сть а.б.с.;
- 3) промежуток  $\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$  со включением концов или нет, придем при  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  с.х-сть а.б.с.

Величина  $R$  - радиус с.х-сти ст.п. ряда ( $R \in [0, +\infty]$ ).

У всюду расх. (всюду с.х.) ряда  $R = 0$  ( $R = +\infty$ ).

Вывод: мн-во сх-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  :

мн-во сх-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  :

- 1)  $\{0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , при этом сх-сть абсолют.
- 3) промежуток  $\langle -R, R \rangle$  со включением концов или нет, при этом при  $x \in (-R, R)$  сх-сть абсолют.

- 1)  $\{x_0\}$ ;
- 2)  $(-\infty, +\infty)$ , при этом сх-сть абсолют.
- 3) промежуток  $\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$  со включением концов или нет, при этом при  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  сх-сть абсолют.

Величина  $R$  - радиус сх-сти степен. ряда ( $R \in [0, +\infty]$ ).

У всякого расх. (всюду сх.) ряда  $R=0$  ( $R=+\infty$ ).

Т2 (Коши-Адамар). Радиус  $R$  сх-сти  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \left( \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$



Верхняя  $R$ -радиус степен. ряда ( $R \in [0, +\infty]$ ).

У верш. расх. (верш. ст.) ряда  $R=0$  ( $R=+\infty$ ).

ТЗ (Коши-Адамар). Радиус  $R$  степен. ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left( \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Д-во.  $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ ,  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ . Надо д-во, что  $R = \frac{1}{\rho}$ .

1.  $\rho = 0$ .  $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ .  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$   $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \rho_n \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.а.д.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , т.е.  $R = +\infty$ .

Верхняя  $R$ -радиус степенного ряда ( $R \in [0, +\infty]$ ).

У любой расх. (всюду ст.) ряда  $R=0$  ( $R=+\infty$ ).

Т2 (Коши-Адамар). Радиус  $R$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left( \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Д-во.  $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ ,  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ . Надо показать, что  $R = \frac{1}{\rho}$ .

1.  $\rho = 0$ .  $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ .  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$   $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \rho_n \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  с.а.е.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , т.е.  $R = +\infty$ .

2.  $\rho = +\infty$ . Докажем, что  $\forall x \neq 0$  ряд расх., т.е.  $R = 0$ .

$\forall x \neq 0 \exists \{n_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{n_k} = +\infty$ , т.е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_{n_k} x^{n_k}| > 1$ , т.е.  $a_n x^n \not\rightarrow 0$ .

Т2 (Коши-Адамар). Радиус  $R$  ст-си  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  находится по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left( \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

Д-во.  $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ ,  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ . Надо д-во, что  $R = \frac{1}{\rho}$ .

1.  $\rho = 0$ .  $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ .  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$   $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \rho_n \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ст. аде.  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , т.е.  $R = +\infty$ .

2.  $\rho = +\infty$ . Д-во, что  $\forall x \neq 0$  ряд расх., т.е.  $R = 0$ .

$\forall x \neq 0 \exists \{n_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{n_k} = +\infty$ , т.е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty \Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0$   
 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_{n_k} x^{n_k}| > 1$ , т.е.  $a_n x^n \not\rightarrow 0$ .

3.  $0 < \rho < +\infty$ . Надо установить, что  $R = \frac{1}{\rho}$ , т.е.  $\forall x, |x| < \frac{1}{\rho}$  ряд ст. (аде.),

а  $\forall x, |x| > \frac{1}{\rho}$  ряд расх. Но  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \rho_n = |x| \cdot \rho$ .

Т.е., если  $|x| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow$  ряд ст. аде.; если  $|x| > \frac{1}{\rho}$ , то  $a_n x^n \not\rightarrow 0$ , т.е. расх.

Теор. д-во.

## Примеры

$$1. \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{сх. аде. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

## Примеры

$$1. \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{сх. аде. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

$$2. \quad x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

$|x| < 1$  сх. аде.,  $|x| > 1$  расх.,  $x = -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$  расх.

$x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$  ряд Лейбница, сх. усл.

## Примеры

$$1. \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{сх. абе. } \forall x, \text{ т.е. } R = +\infty$$

$$2. \quad x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

$|x| < 1$  сх. абе.,  $|x| > 1$  расх.,  $x = -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$  расх.

$x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$  ряд Лейбница, сх. усл.

$$3. \quad 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n \quad (\text{Биномиальный ряд})$$

$\alpha \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow$  ряд вырождается в конечную сумму, т.е.  $R = +\infty$

Сумма ряда в этом случае равна  $(1+x)^\alpha$  (бином Ньютона, проверить самим).

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \quad u_0(x) \equiv 1, \quad u_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

при  $x \neq 0$   $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left| \frac{(\alpha-n)x}{n+1} \right| \rightarrow |x|$ , т.е.  $|x| < 1$  с.х. а.с.  $\Rightarrow R=1$   
 $|x| > 1$  расх.

Исследуем поведение биномиального ряда на концах, т.е. при  $x = \pm 1$

$$\alpha \leq -1 \Rightarrow \frac{|u_{n+1}(\pm 1)|}{|u_n(\pm 1)|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \geq 1 \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{признак Даламбера} \\ \text{в предельной форме} \end{array} \right) \Rightarrow \text{расх. } (u_n(\pm 1) \not\rightarrow 0)$$

$$\alpha \in (-1, +\infty) \setminus \mathbb{N}_0 \Rightarrow n \left[ \frac{|u_n(\pm 1)|}{|u_{n+1}(\pm 1)|} - 1 \right] \underset{(n > \alpha)}{=} n \left( \frac{n+1}{n-\alpha} - 1 \right) = \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} \rightarrow \alpha+1$$

$\Rightarrow$  при  $\alpha > 0$  ряд а.с. с.х. при  $x = \pm 1$ ,  
 при  $-1 < \alpha < 0$  к.с. а.с. с.х. и при  $x = 1$ , и при  $x = -1$ .

При  $\alpha \in (-1, 0)$   $c_n = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n}_{\text{расх. (Рабде)}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n}_{\text{к.с. а.с. с.х. (Рабде)}}$$

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} < c_n, \quad \text{т.е. } c_n \downarrow. \quad \text{Д-к.с.с., что } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (?)$$

$$-\ln c_n = \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{1}\right)}_{b_1} - \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right)}_{b_2} - \dots - \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right)}_{b_n} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$0 < b_n = -\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right) \sim \frac{\alpha+1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln c_n) = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln c_n = -\infty, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) \text{ с.х. усл.}$$

Вывод при  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ :  $R=1$ ,

$\alpha > 0$  - с.х. а.с. при  $x = \pm 1$ ;

$-1 < \alpha < 0$  - с.х. усл. при  $x = 1$ , расх. при  $x = -1$ ;

$\alpha \leq -1$  - расх. при  $x = \pm 1$ .