06.04.21.

Тема:
Вычисление площадей с помощью интегралов.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/LqqhsprOgo0

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Вычисление площадей с помощью интегралов

Задача 4 Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и параболой $y = 9 - x^2$.

▶ Построим график функции $y = 9 - x^2$ и изобразим данную трапецию (рис. 157).

Искомая площадь S равна интегралу

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 24. \ ◁$$

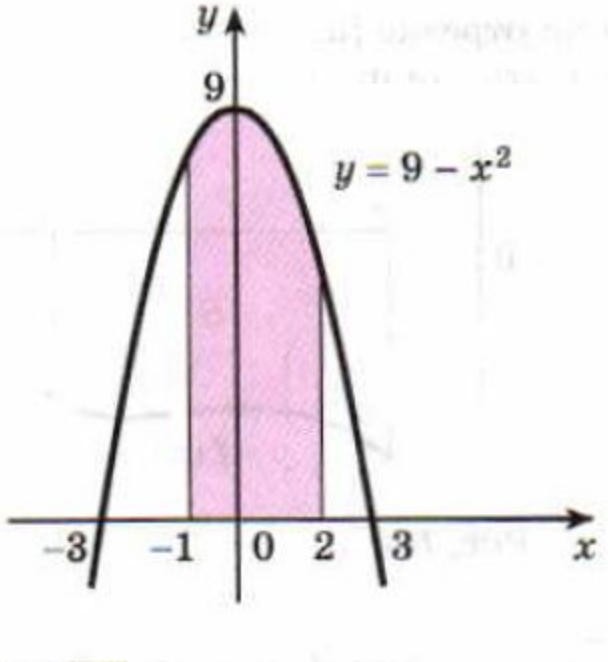

Рис. 157

Задача 2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

▶ Построим графики функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 = 2x - x^2$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Данная фигура изображена на рисунке 158. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = 1. \triangleleft$$

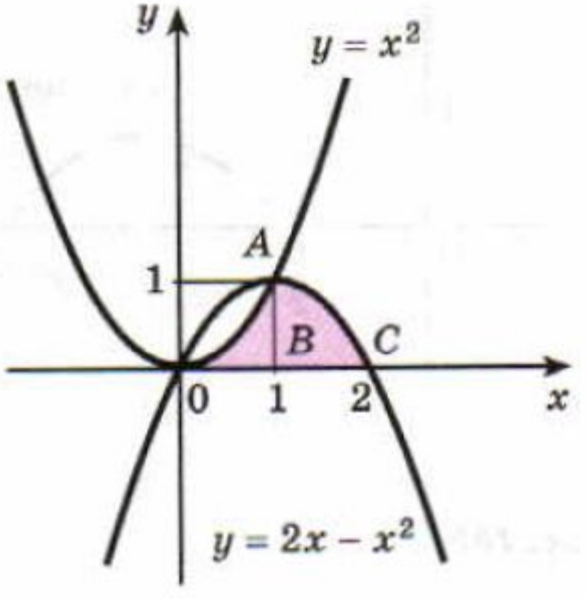

Рис. 158

Задача 3 Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = \cos x$ на этом отрезке.

▶ Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 159), т. е. площади фигуры, огра-

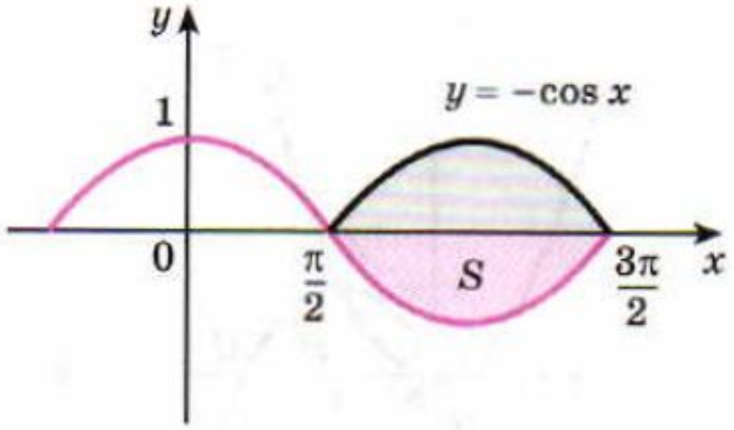

Рис. 159

ниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = -\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому $S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx =$

$= (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2.$ ◁

Задача 4 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

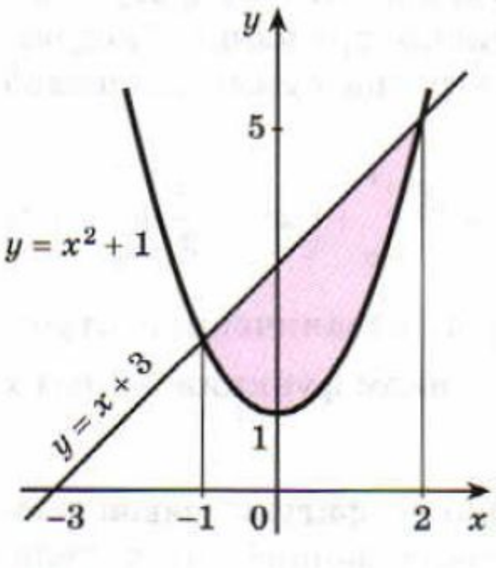

Рис. 161

▶ Построим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 + 1 = x + 3$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 161. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (x+3)\,dx, \quad S_2 = \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx,$$

$$\text{то } S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2} (x+3)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2} ((x+3) - (x^2+1))\,dx =$$

$$= \int_{1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5. \ ◁$$

Практическая часть.

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

1014 1) Параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox;
2) параболой $y = 4 - x^2$, прямой $y = x + 2$ и осью Ox;
3) параболой $y = 4x - x^2$, прямой $y = 4 - x$ и осью Ox;
4) параболой $y = 3x^2$, прямой $y = 1{,}5x + 4{,}5$ и осью Ox.

1015 1) Графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

1016 1) Параболой $y = x^2 + 3x$ и осью Ox;
2) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox.