06.04.21.

Тема:
Вычисление площадей с помощью интегралов.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/LqqhsprOgo0

Теоретическая часть:
Прочитать и понять.
Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Вычисление площадей с помощью интегралов

Задача 4 Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$.

▶ Построим график функции $y=9-x^2$ и изобразим данную трапецию (рис. 157).

Искомая площадь S равна интегралу

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(9(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24. \triangleleft$$

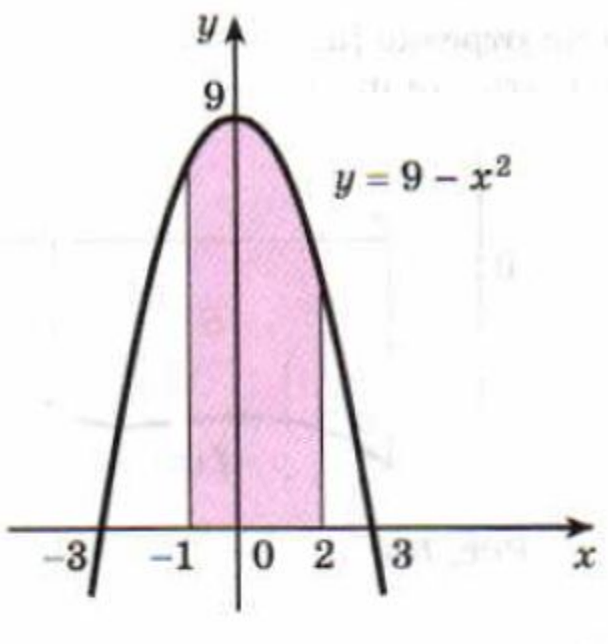

Рис. 157

Задача 2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

▶ Построим графики функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 = 2x - x^2$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Данная фигура изображена на рисунке 158. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 = 1. \triangleleft$$

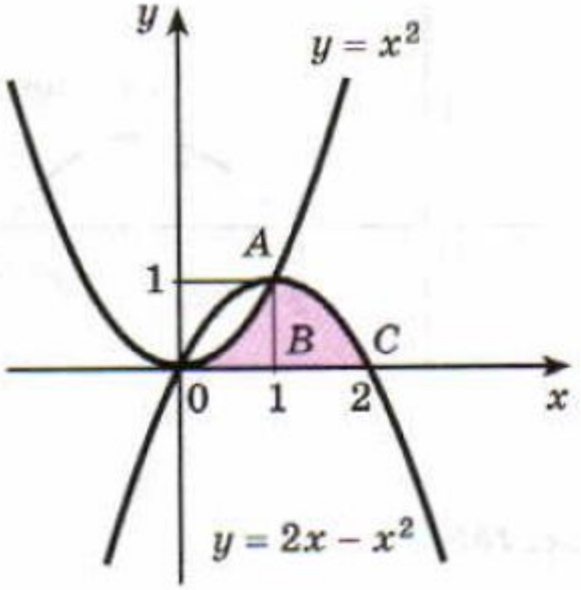

Рис. 158

Задача 3 Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = \cos x$ на этом отрезке.

▶ Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 159), т. е. площади фигуры, огра-

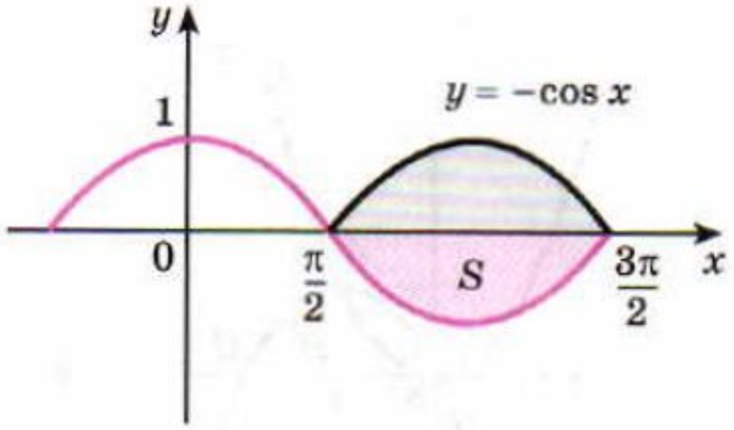

Рис. 159

ниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = -\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому $S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx =$

$$= (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin \frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin \frac{\pi}{2}\right) = 2. \ \triangleleft$$

Задача 4 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

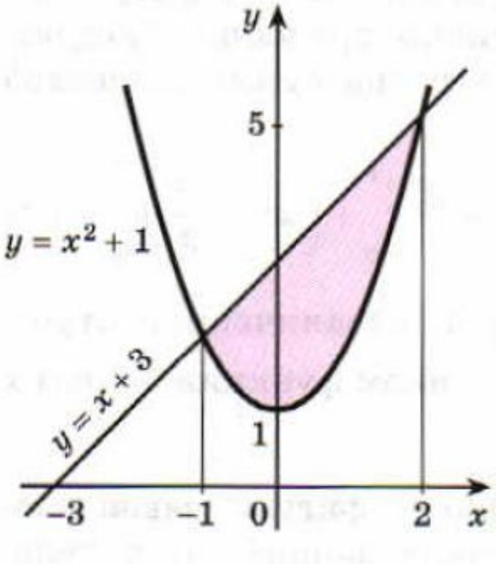

Рис. 161

▶ Построим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 + 1 = x + 3$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 161. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (x+3)\,dx, \quad S_2 = \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx,$$

$$\text{то } S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2} (x+3)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2} ((x+3) - (x^2+1))\,dx =$$

$$= \int_{1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5. \ ◁$$

Практическая часть.

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

1014 1) Параболой $y=(x+1)^2$, прямой $y=1-x$ и осью Ox;
2) параболой $y=4-x^2$, прямой $y=x+2$ и осью Ox;
3) параболой $y=4x-x^2$, прямой $y=4-x$ и осью Ox;
4) параболой $y=3x^2$, прямой $y=1{,}5x+4{,}5$ и осью Ox.

1015 1) Графиками функций $y=\sqrt{x}$, $y=(x-2)^2$ и осью Ox;
2) графиками функций $y=x^3$, $y=2x-x^2$ и осью Ox.

1016 1) Параболой $y=x^2+3x$ и осью Ox;
2) параболой $y=x^2-4x+3$ и осью Ox.