

06.04.21.

Тема:

Вычисление площадей с помощью  
интегралов.

*Учащиеся должны освоить теоретическую  
часть, прислать ответы на вопросы и решение  
задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:  
<https://youtu.be/LqghsprOgo0>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

## Вычисление площадей с помощью интегралов

**Задача 4** Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью  $Ox$ , прямыми  $x = -1$ ,  $x = 2$  и параболой  $y = 9 - x^2$ .

► Построим график функции  $y = 9 - x^2$  и изобразим данную трапецию (рис. 157).

Искомая площадь  $S$  равна интегралу

$$S = \int_{-1}^2 (9 - x^2) dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$S = \int_{-1}^2 (9 - x^2) dx = \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left( 9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 9(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 24. \quad \blacktriangleleft$$

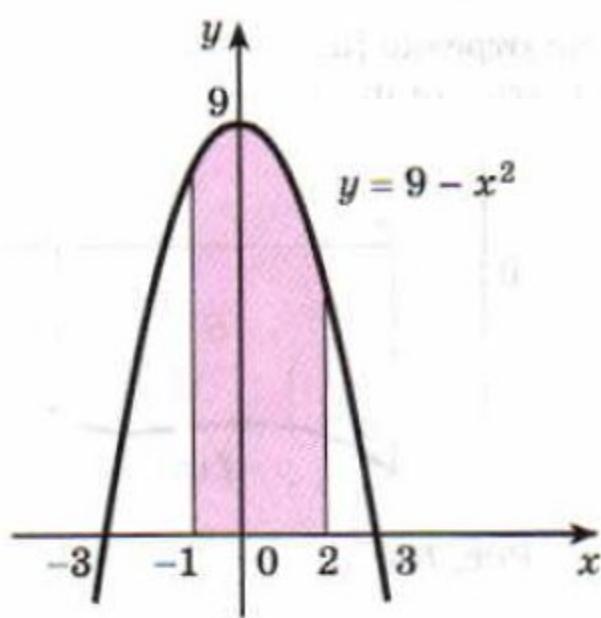


Рис. 157

**Задача 2** Найти площадь фигуры, ограниченной параболами  $y = x^2$ ,  $y = 2x - x^2$  и осью  $Ox$ .

► Построим графики функций  $y = x^2$ ,  $y = 2x - x^2$  и найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения  $x^2 = 2x - x^2$ . Корни этого уравнения  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Данная фигура изображена на рисунке 158. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S = \int x^2 dx + \int (2x - x^2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 1.$$

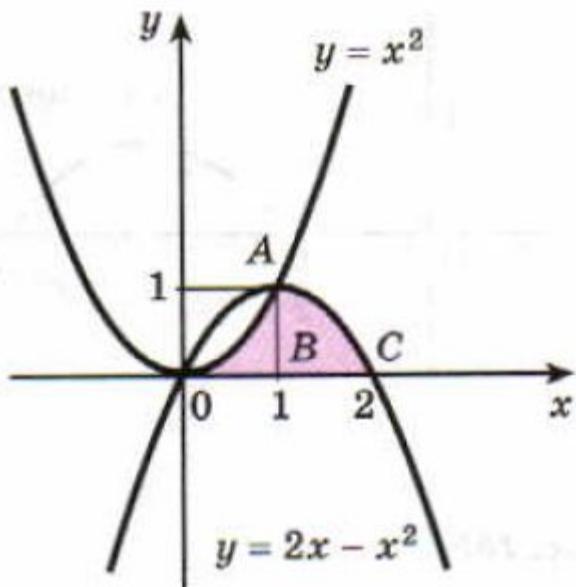


Рис. 158

**Задача 3** Найти площадь  $S$  фигуры, ограниченной отрезком  $\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$  оси  $Ox$  и графиком функции  $y = \cos x$  на этом отрезке.

► Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси  $Ox$  (рис. 159), т. е. площади фигуры, огра-

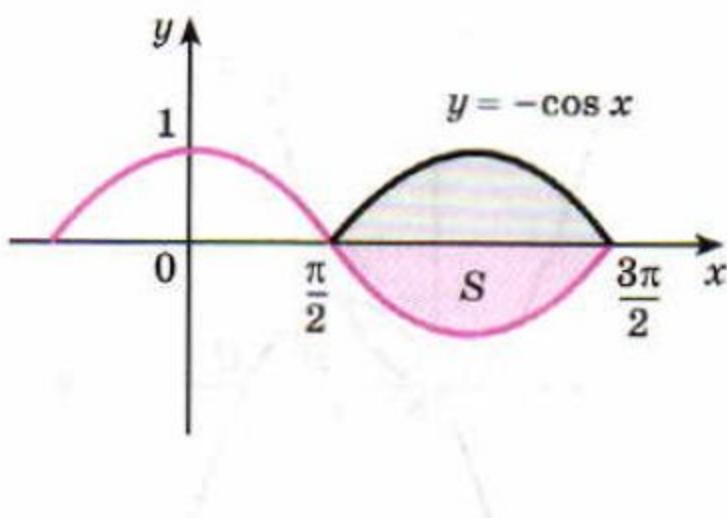


Рис. 159

ничленной отрезком  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  оси  $Ox$  и графиком функции  $y = -\cos x$  на отрезке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . На этом отрезке  $-\cos x \geq 0$ , и поэтому  $S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx = (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin \frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin \frac{\pi}{2}\right) = 2$ . ◀

**Задача 4** Найти площадь  $S$  фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 + 1$  и прямой  $y = x + 3$ .

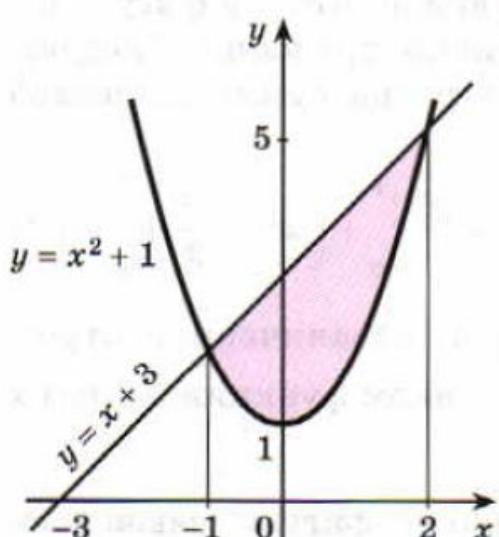


Рис. 161

► Построим графики функций  $y = x^2 + 1$  и  $y = x + 3$ . Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения  $x^2 + 1 = x + 3$ . Это уравнение имеет корни  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ . Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 161. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей  $S_1$  и  $S_2$  двух трапеций, опирающихся на отрезок  $[-1; 2]$ , первая из которых ограничена сверху отрезком прямой  $y = x + 3$ , а вторая — дугой параболы  $y = x^2 + 1$ . Так как

$$S_1 = \int_{-1}^2 (x + 3) dx, \quad S_2 = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx,$$

$$\text{то } S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^2 (x + 3) dx - \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать  $S$  в виде одного интеграла:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 ((x + 3) - (x^2 + 1)) dx = \\ &= \int_1^2 (x + 2 - x^2) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 4,5. \end{aligned}$$

## Практическая часть.

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

- 1014** 1) параболой  $y = (x + 1)^2$ , прямой  $y = 1 - x$  и осью  $Ox$ ;  
2) параболой  $y = 4 - x^2$ , прямой  $y = x + 2$  и осью  $Ox$ ;  
3) параболой  $y = 4x - x^2$ , прямой  $y = 4 - x$  и осью  $Ox$ ;  
4) параболой  $y = 3x^2$ , прямой  $y = 1,5x + 4,5$  и осью  $Ox$ .
- 1015** 1) Графиками функций  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = (x - 2)^2$  и осью  $Ox$ ;  
2) графиками функций  $y = x^3$ ,  $y = 2x - x^2$  и осью  $Ox$ .
- 1016** 1) Параболой  $y = x^2 + 3x$  и осью  $Ox$ ;  
2) параболой  $y = x^2 - 4x + 3$  и осью  $Ox$ .