

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени c** , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Из определения логарифма вытекает
основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $b > 0, a > 0, a \neq 1$

Примеры:

1. $3^{\log_3 18} = 18$

2. $4^{\log_4 5} = 5$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

По основному логарифмическому тождеству $a^{\log_a b} = b$ и $a^{\log_a c} = c$, перемножая эти равенства получим:

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

Пример:

$$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

По основному логарифмическому тождеству $a^{\log_a b} = b$ и $a^{\log_a c} = c$, разделив эти равенства получим:

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

Пример:

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$$

3. Логарифм степени с положительным основанием равен показателю степени, умноженному на логарифм основания:

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r , получаем:

$$a^{r \log_a b} = b^r,$$

откуда по определению логарифма

$$r \log_a b = \log_a b^r$$

Пример:

$$\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$$

4. Основание логарифма в степени:

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

Пример:

$$\log_{\frac{1}{3^2}} 27 = 2 \log_3 27 = 2 \cdot 3 = 6$$

5. Формула перехода от одного основания логарифма к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример:

$$\log_5 8 = \frac{\log_8 8}{\log_8 5} = \frac{1}{\log_8 5}$$

Частные свойства:

$$1) \log_a 1 = 0;$$

$$2) \log_a a = 1;$$

$$3) \log_a \frac{1}{a} = -1;$$

$$4) \log_a a^m = m;$$

$$5) \log_a^m a = \frac{1}{m}.$$