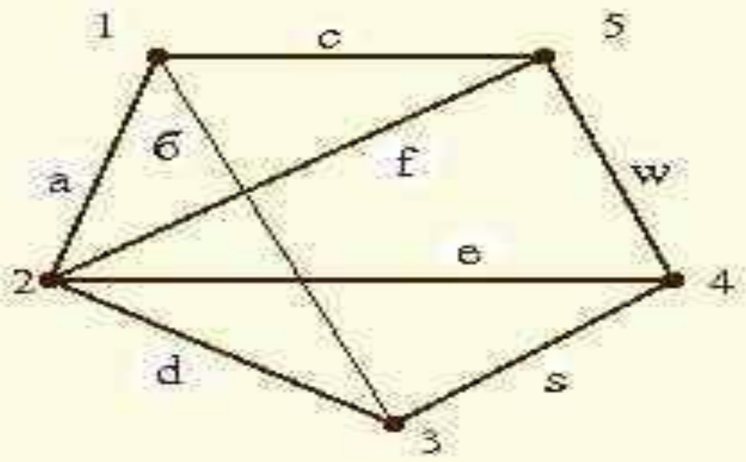
ЗАДАНИЕ №2
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Матрица инцидентности неориентированного графа

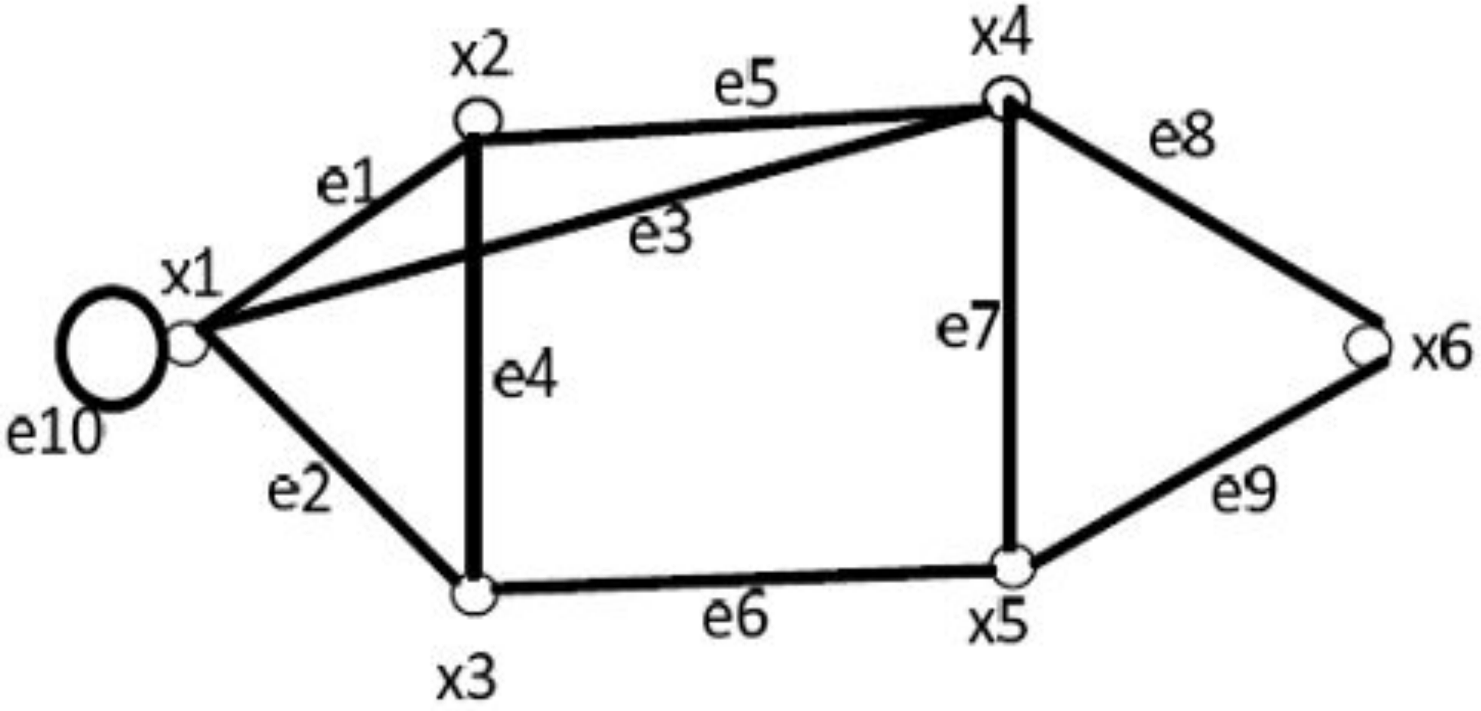
- *Матрица инцидентности-* матрица размером (n- число вершин, m- число ребер), элементы которой равны 1, если i-я вершина инцидентна j-му ребру, и 0 в противном случае.
- *Матрица инцидентности* обычно обозначается буквой B
- ***пример:***



$$B= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & б & c & d & e & f & s & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание №1 Построить матрицу инцидентности для неориентированного графа

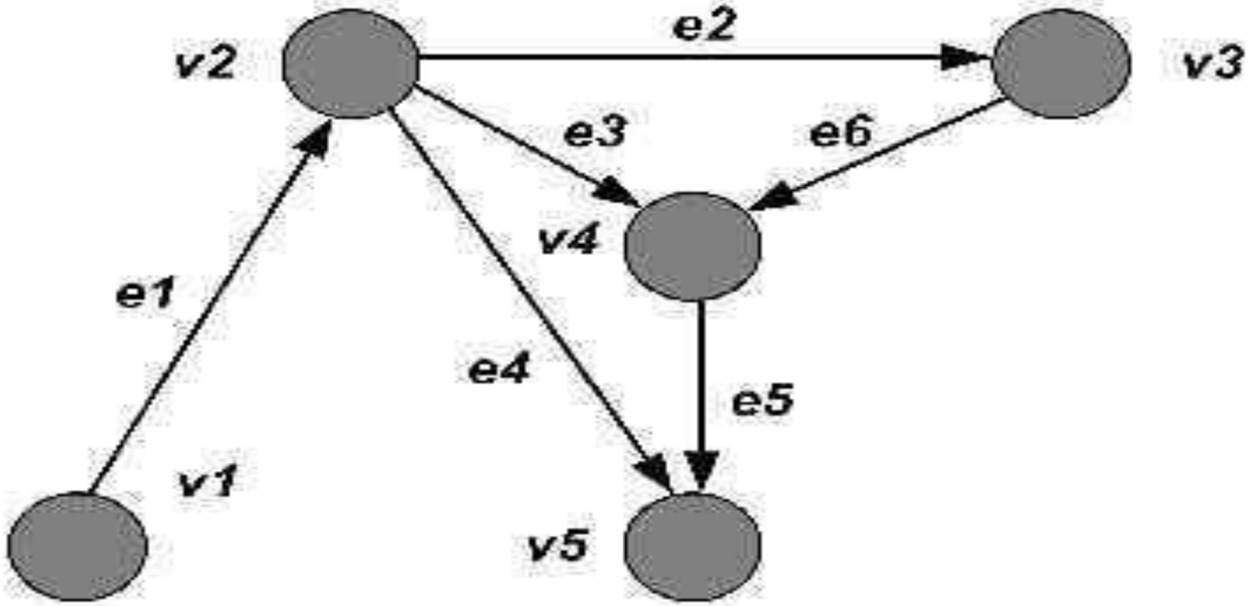
2. Для данного графа построить матрицу инцидентности.



Матрица инцидентности

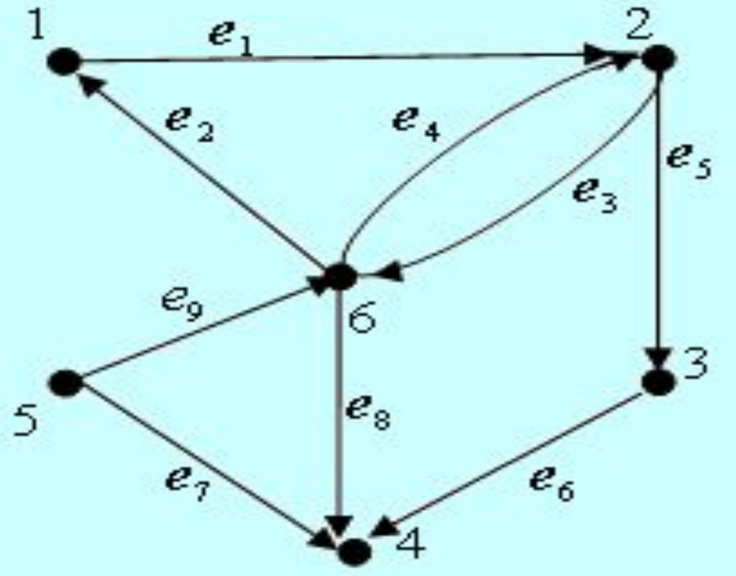
В матрице инцидентности A по вертикали перечисляются вершины, по горизонтали – ребра, а значения a_{ij} определяются так:

a_{ij} = 1, если ребро j входит в вершину i;
a_{ij} = -1, если ребро j выходит из вершины i;
a_{ij} = 0, если вершина i и ребро j не инцидентны (не связаны).



	e1	e2	e3	e4	e5	e6
v1	-1	0	0	0	0	0
v2	1	-1	-1	-1	0	0
v3	0	1	0	0	0	-1
v4	0	0	1	0	-1	1
v5	0	0	0	1	1	0

Пример 4.3. Построить матрицу инцидентности по графу:



Решение

У этого графа 6 вершин и 9 ребер. Следовательно, матрица инцидентности имеет размер 6×9.

Искомая матрица инцидентности:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

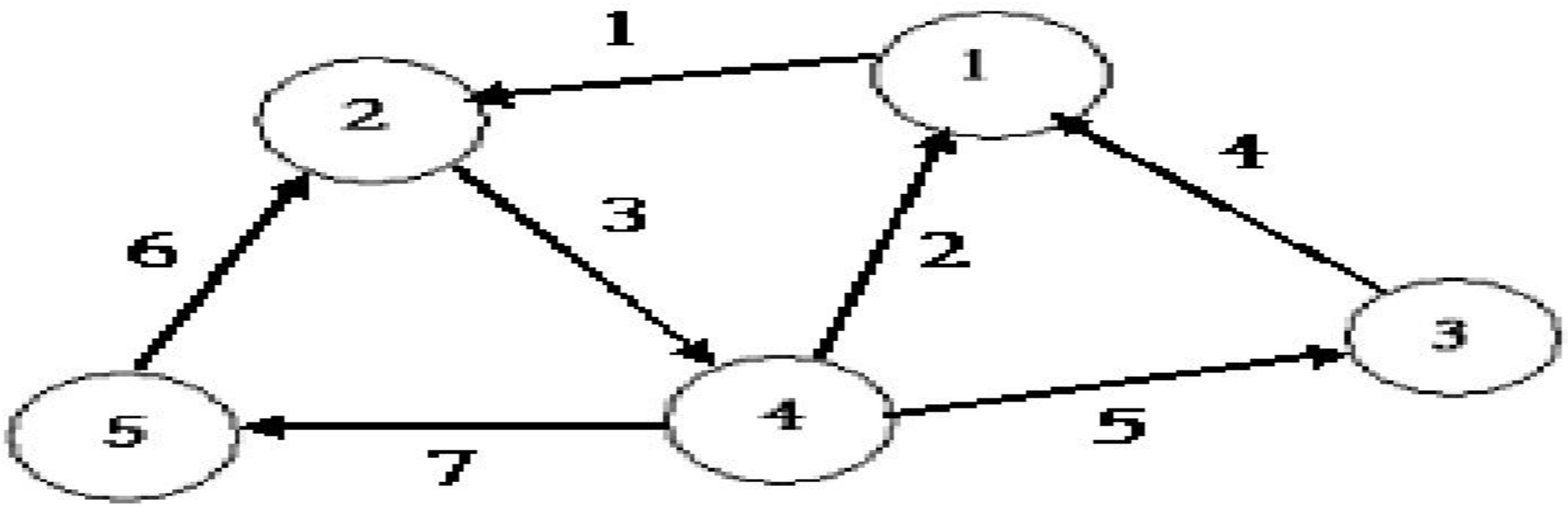
Первое ребро e_1 выходит из первой вершины и входит во вторую. Следовательно, $\boldsymbol{b_{11}=1, b_{21}=-1}$

Второе ребро e_2 выходит из шестой вершины и входит в первую. Следовательно, $\boldsymbol{b_{12}=-1, b_{62}=1}$

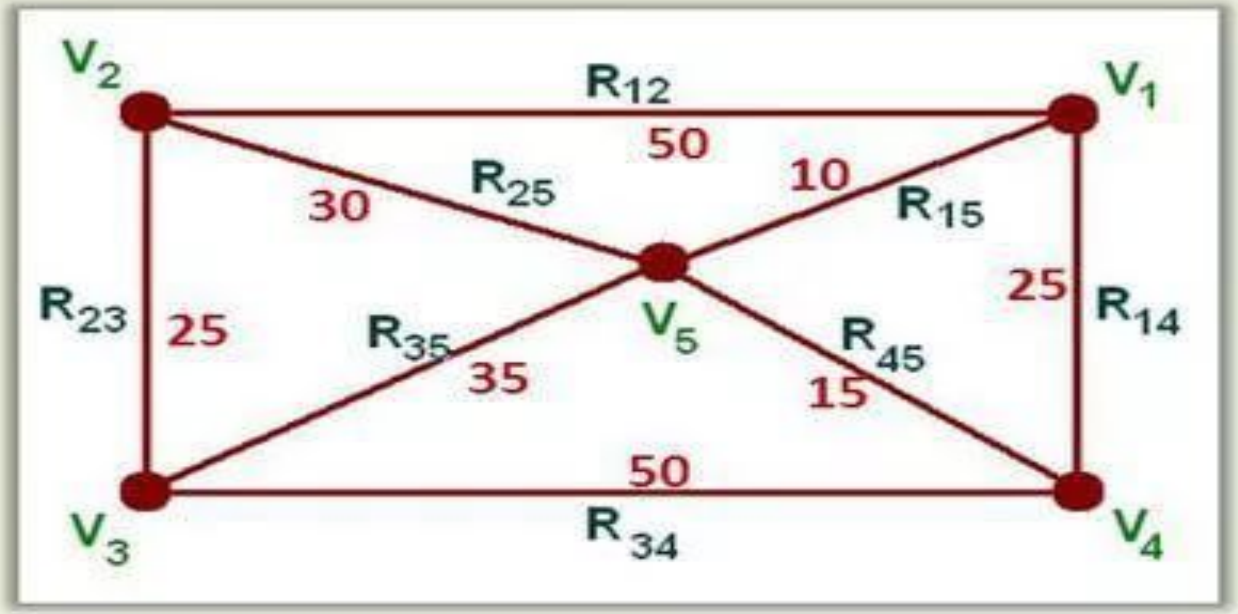
Третье и четвертое ребра соединяют вторую и шестую вершины. Однако e_3 выходит из второй, а e_4 - из шестой. Следовательно, $\boldsymbol{b_{23}=b_{64}=1, b_{63}=b_{24}=-1}$

Задание №2

Найти матрицу инцидентности для графа



Матрицы смежности



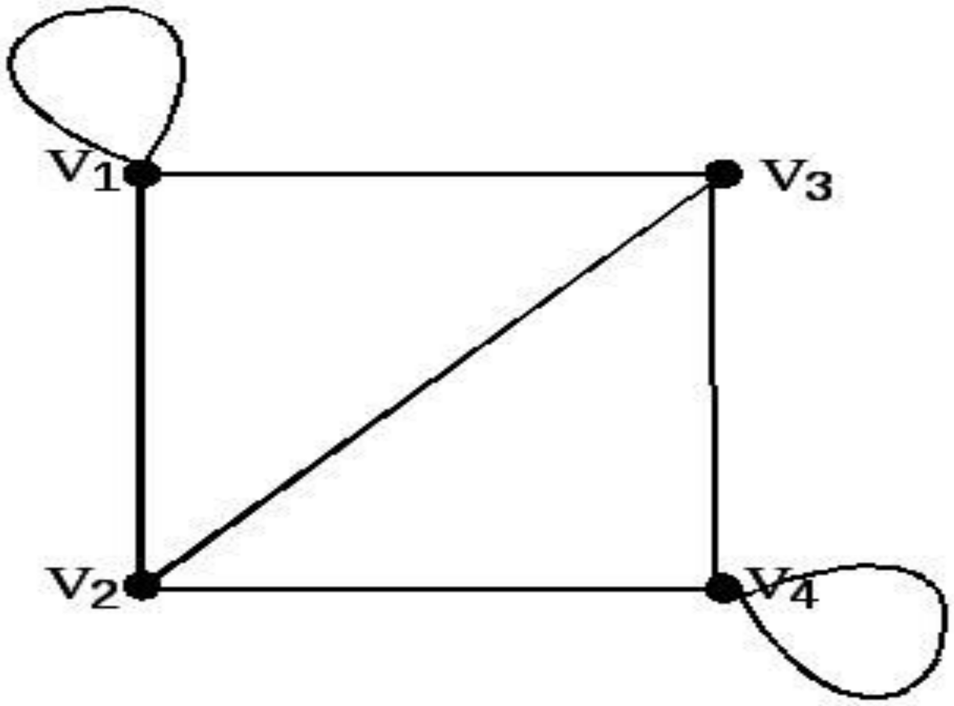
Строки и столбцы соответствуют номерам вершин графа.

Если вершины – смежные, то элемент матрицы = 1, иначе = 0.

Вершины сами с собой не смежны, значит диагональные элементы матрицы = 0.

	1	2	3	4	5
1	0	50	0	25	10
2	50	0	25	0	30
3	0	25	0	50	35
4	25	0	50	0	15
5	10	30	35	15	0

Матрица смежности неориентированного графа



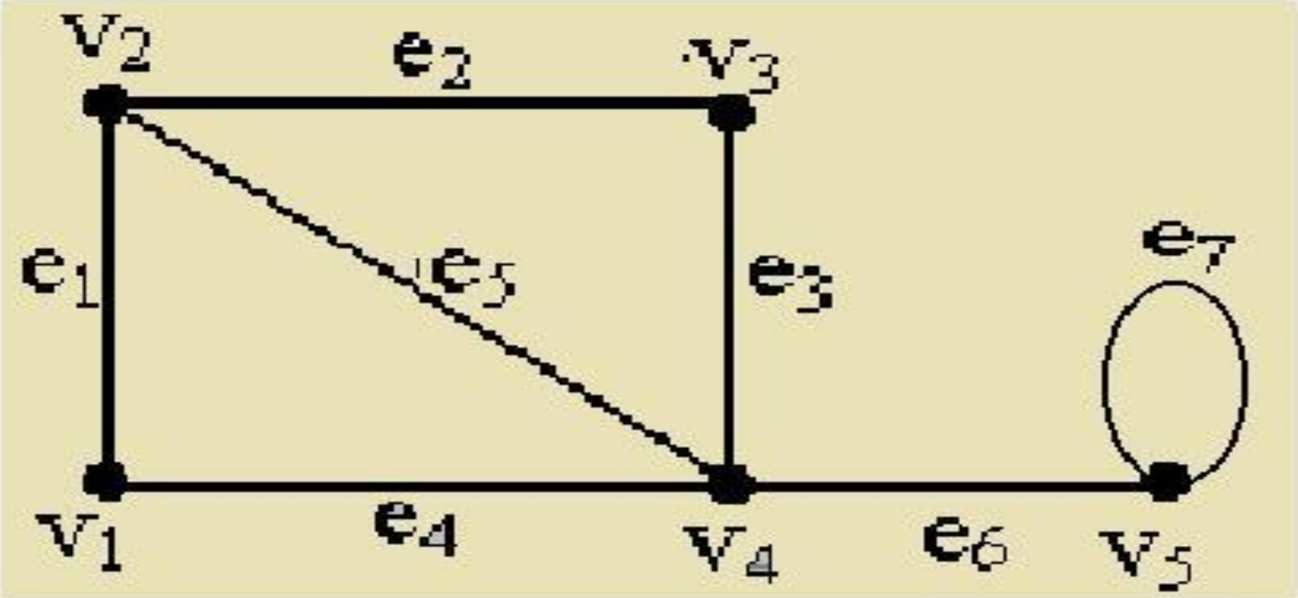
В случае неориентированного графа $\mathbf{a_{ij}=1}$ тогда и только тогда, когда существует ребро, соединяющее вершины $\mathbf{V_i}$ и $\mathbf{V_j}$

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	0
V_2	1	0	1	1
V_3	1	1	0	1
V_4	0	1	1	1

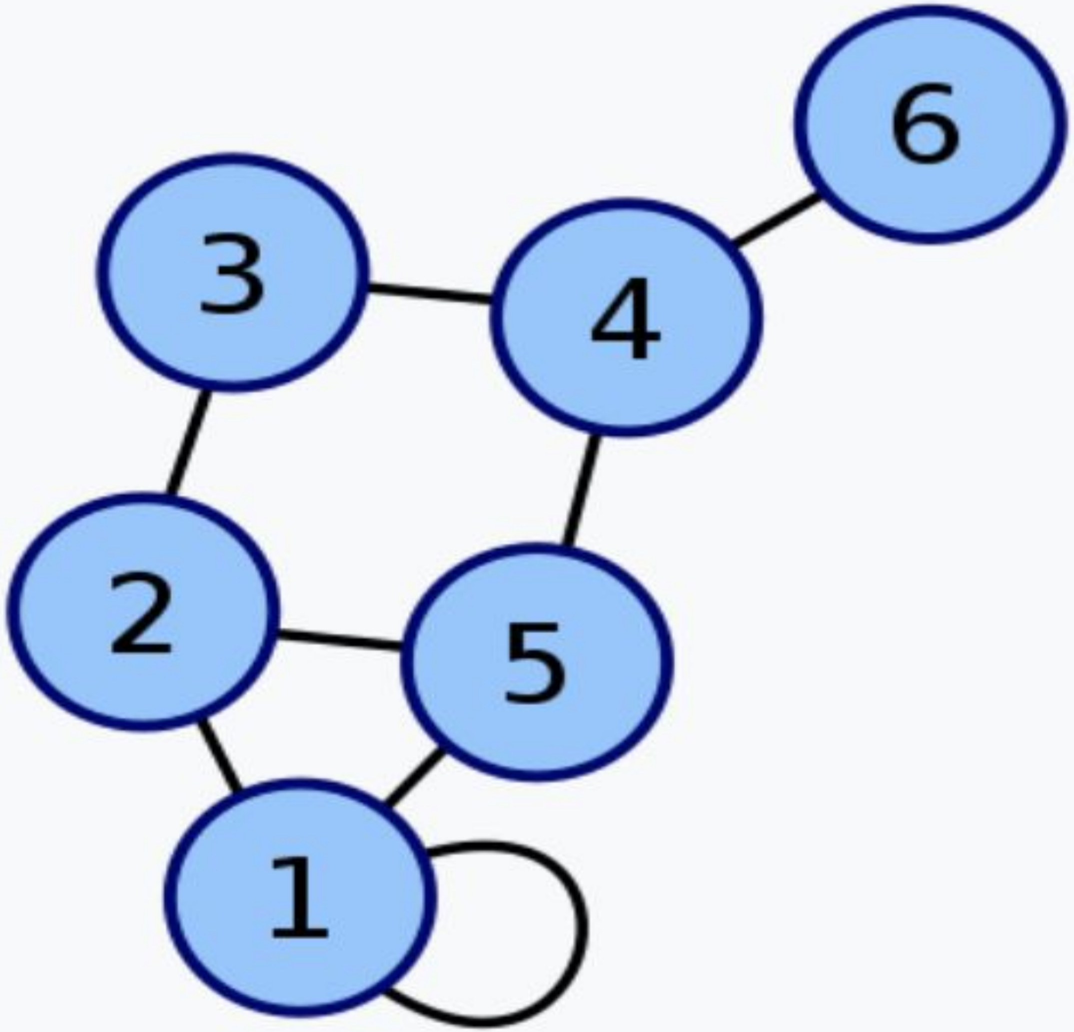
Сумма всех элементов строки $\mathbf{V_i}$ матрицы равна сумме элементов столбца $\mathbf{V_i}$ и равна степени вершины $\mathbf{V_i}$.

Матрица смежности неорграфа

Для неорграфа **G**, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Граф	Матрица смежности
	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

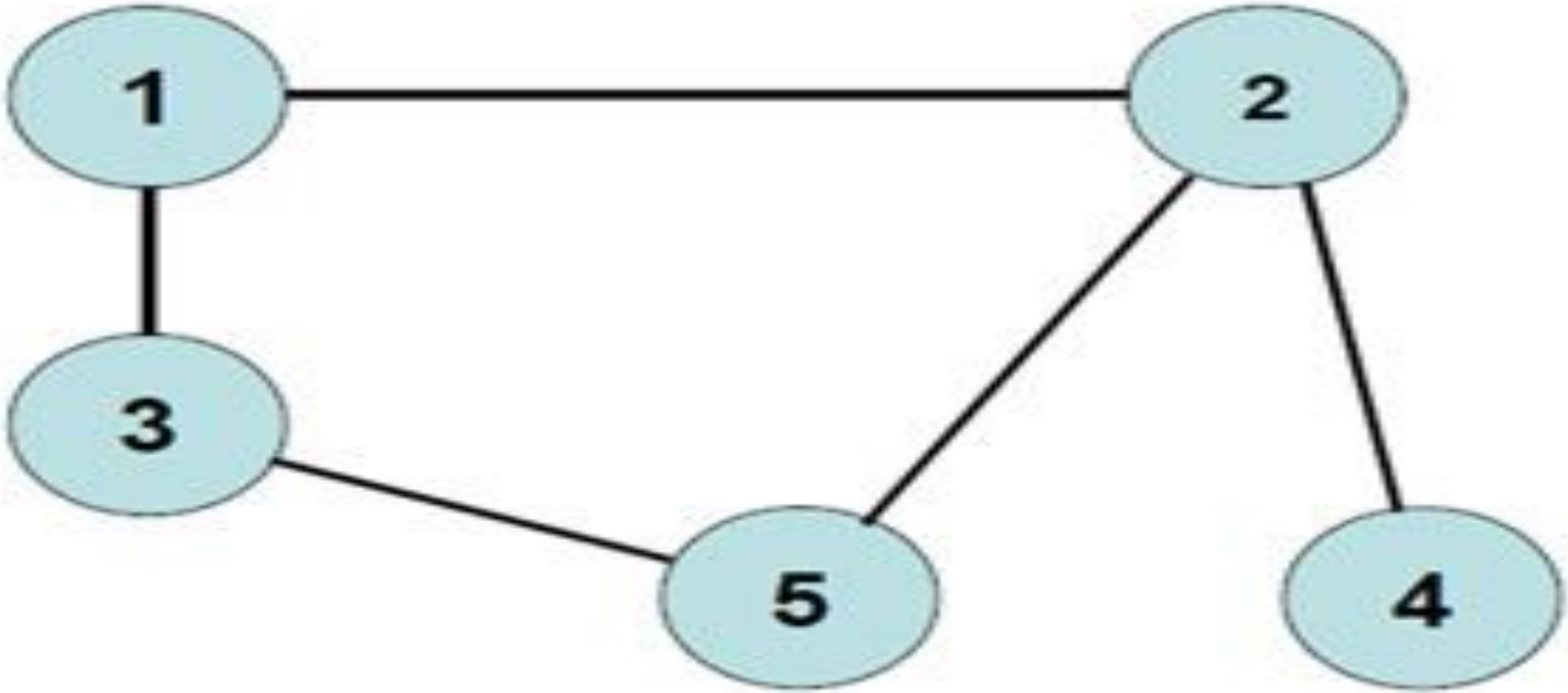
Задание №3 По матрице смежности построить неориентированный граф

Задание графов

По матрице смежности построить граф

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	0

Задание 4. По заданному неориентированному графу построить матрицу смежности



матрица смежности

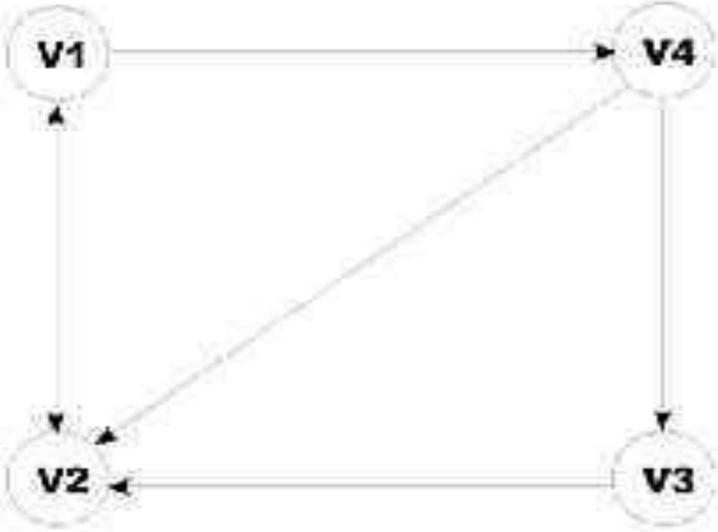
Пусть G=(V,E)- простой орграф, в котором вершины предполагаются упорядоченными от Vi до Vn. Матрица A размера nxn, элементы a_{ij} которой задаются выражением

a_{ij} =1, если (Vi , Vj)$\in$E

a_{ij} =0, в противном случае

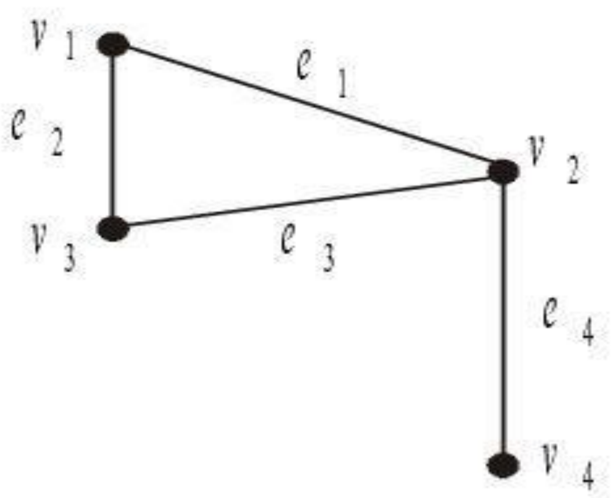
называется матрицей смежности графа G или матрицей соединений.

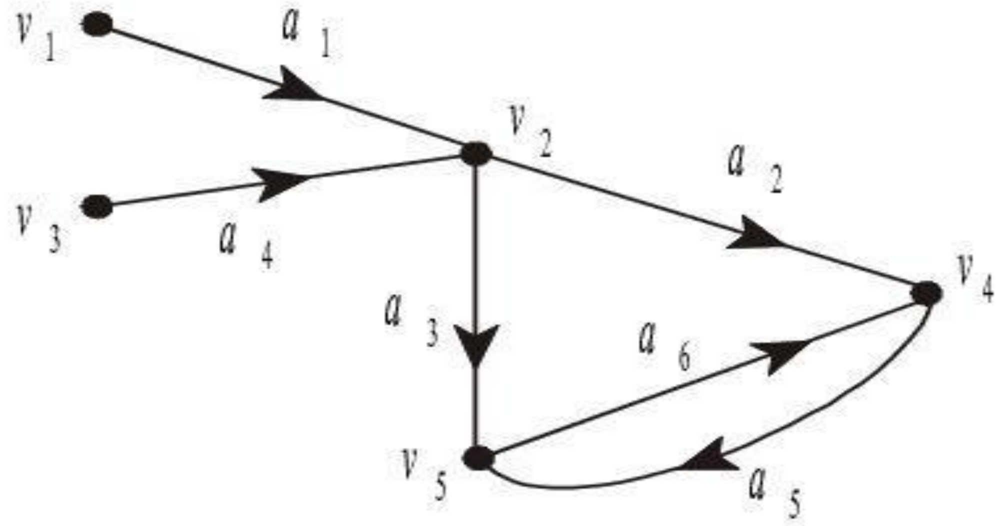
Каждый элемент этой матрицы либо 0, либо 1



	V1	V2	V3	V4
V1	0	1	0	1
V2	1	0	0	0
V3	0	1	0	0
V4	0	1	1	0

Матричные представления графа



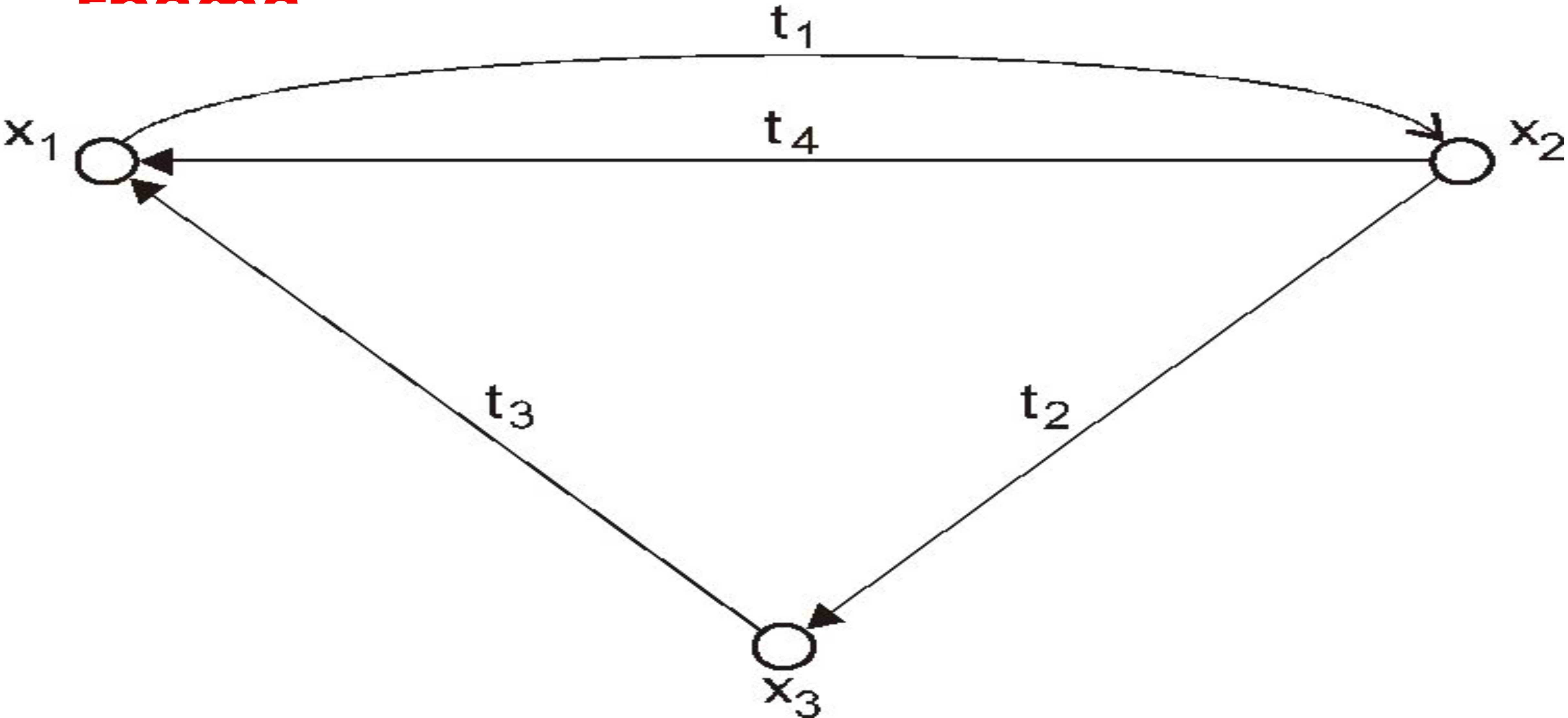


Матрица смежности

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
$$

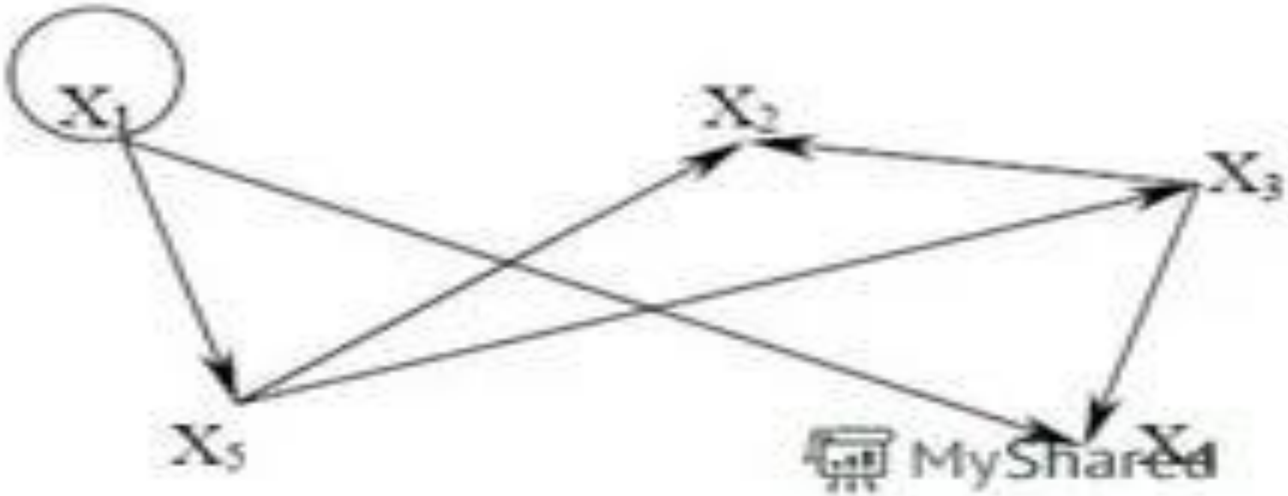
$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
$$

ЗАДАНИЕ №5 Построить матрицу смежности для ориентированного графа



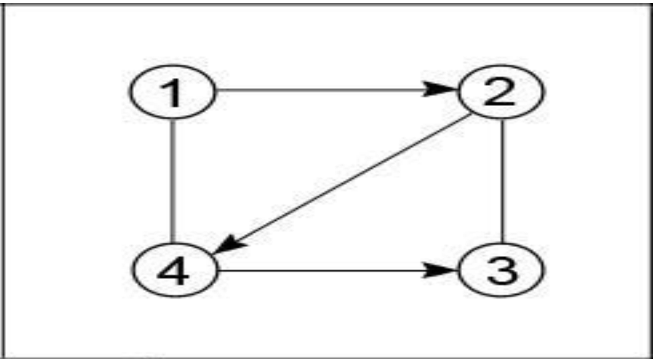
- Транспонированной матрице смежности соответствует граф с противоположной ориентацией.
- Матрица смежности полностью задает ориентированный граф. Любая квадратная матрица, состоящая из единиц и нулей, может быть рассмотрена как матрица смежности, задающая некоторый граф G.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



•

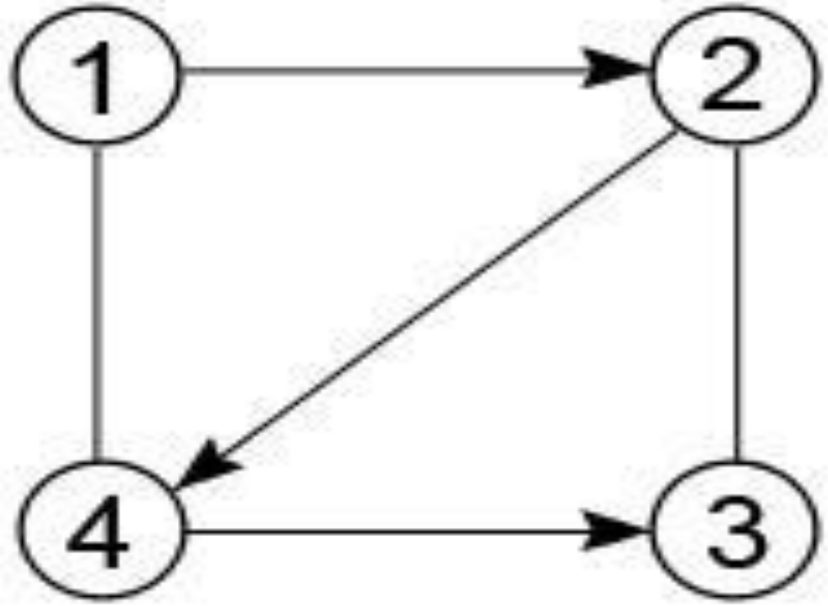
	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	1	0	1	0



Матрица смежности | Рисунок 2 | Соответствующий граф

ЗАДАНИЕ №6 Транспонировать матрицу смежности и построить по ней граф

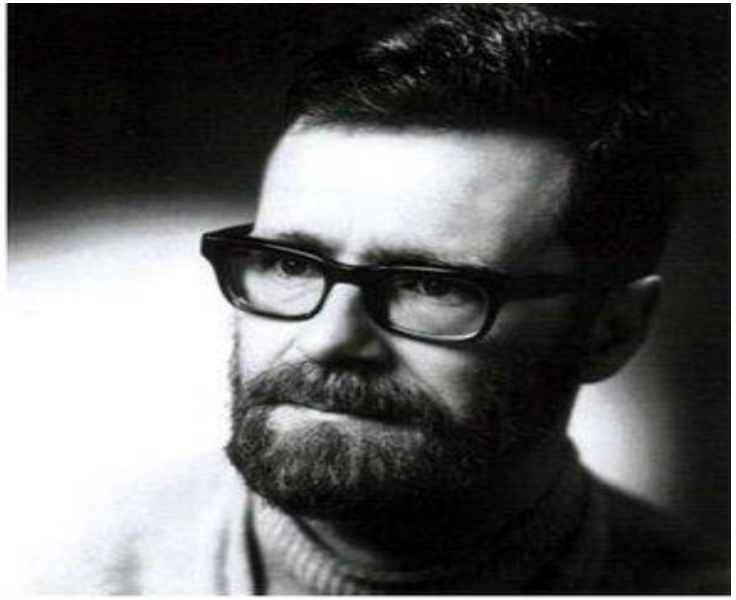
	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	1	0	1	0



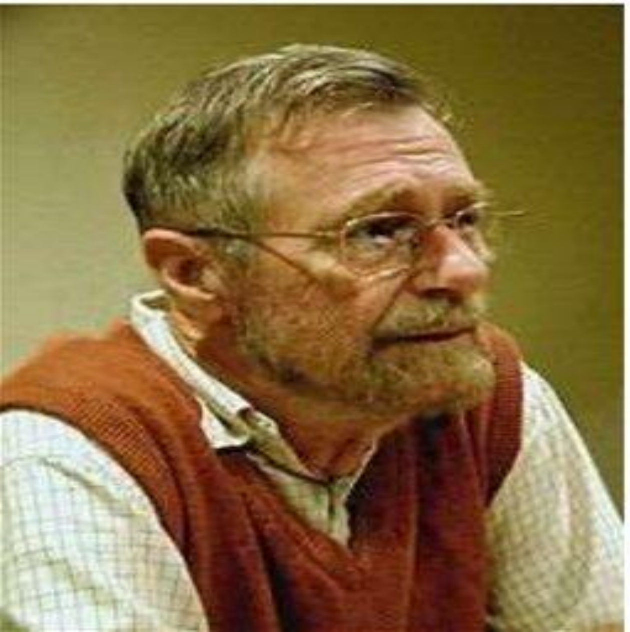
Матрица смежности | Рисунок 2 | Соответствующий граф

Алгоритм Дейкстры

Метод считается одним из наиболее эффективных алгоритмов решения задачи. Предложен в 1959 г. голландским математиком Дейкстрой (1930-2002), известным, в частности, своей борьбой против безбрежного использования в программировании оператора ***go to***. Эта борьба привела к существенному улучшению стиля программирования.



Эдсгер Вибе **Дейкстра**

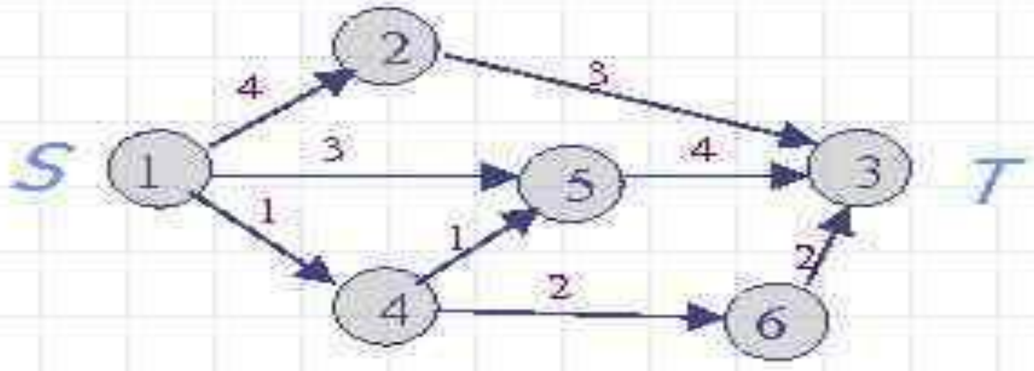


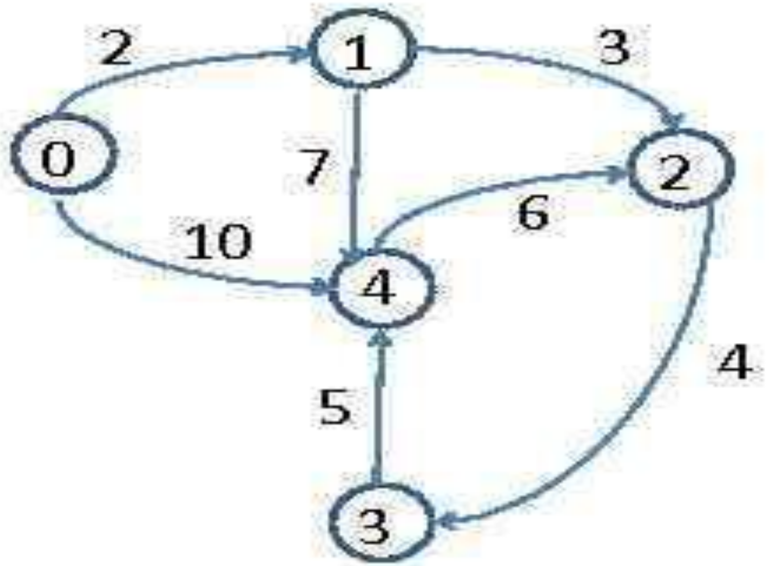
Главная идея, лежащая в основе алгоритма Дейкстры
Предположим, что нам известны m вершин, ближайших к вершине **S** (близость любой вершины **X** к вершине **S** определяется длиной кратчайшего пути, ведущего из **S** в **X**). Пусть также известны сами кратчайшие пути, соединяющие вершину **S** с выделенными m вершинами). Нужно ввести правило, как может быть определена (m+1)-я ближайшая к **S** вершина.

Тезис Дейкстры

В основе алгоритма лежит тезис Дейкстры:

Если кратчайший путь между заданными вершинами s и t лежит через вершину u, то длина части пути от s до u должна быть минимальна





Алгоритм Дейкстры. Пример

№	S	w	D[w]	D[1]	D[2]	D[3]	D[4]
0	{0}	-	-	2	$+\infty$	$+\infty$	10
1	{0, 1}	1	2	2	5	$+\infty$	9
2	{0, 1, 2}	2	5	2	5	9	9
3	{0, 1, 2, 3}	3	9	2	5	9	9
4	{0, 1, 2, 3, 4}	4	9	2	5	9	9

ЗАДАНИЕ №7

АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ: НАЙТИ КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ из вершины 0 (старт) в вершину 24(финиш)