

Общая задача нелинейного программирования



План:

1.Общая постановка задачи;

2.Классификация задач нелинейного программирования;

3.Классификация методов нелинейного программирования;

4.Области применения нелинейного программирования.

1. Общая постановка задачи

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & i = \overline{1, m_1}, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

и доставляющий экстремум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_j — переменные, $j = \overline{1, n}$; f, g_i — заданные функции от n переменных, b_i — фиксированные значения.

2.Классификация задач нелинейного программирования

□ По числу переменных:

- Задача одномерной оптимизации (ЗОО);
- Задача многомерной оптимизации (ЗМО).

□ По виду ограничений:

- Задача безусловной оптимизации (ЗБУ);
- Задача условной оптимизации (ЗУО).

□ По степени гладкости функций, входящих в задачу:

- Гладкие;
- Негладкие.

□ По виду функции (например):

- Задача квадратичного программирования (ЗКП);
- Задача выпуклого программирования (ЗВП).

3. Классификация методов нелинейного программирования

Для задачи нелинейного программирования в отличие от задач линейного программирования нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения. к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

3. Классификация методов нелинейного программирования

Для решения задачи нелинейного программирования было предложено много методов, которые можно классифицировать по различным признакам.

▣ **По количеству локальных критериев в целевой функции** методы делятся на:

- однокритериальные,
- многокритериальные.

▣ **По длине вектора** методы делятся на:

- однопараметрические или одномерные ($n=1$),
- многопараметрические или многомерные ($n>1$).

▣ **По наличию ограничений** методы делятся на:

- без ограничений (безусловная оптимизация),
- с ограничениями (условная оптимизация).

3. Классификация методов нелинейного программирования

- По типу информации, используемой в алгоритме поиска экстремума методы делятся на:
 - методы прямого поиска, т.е. методы, в которых при поиске экстремума целевой функции используются только ее значения;
 - градиентные методы первого порядка, в которых при поиске экстремума функции используются значения ее первых производных;
 - градиентные методы второго порядка, в которых при поиске экстремума функции наряду с первыми производными используются и вторые производные.

3. Классификация методов нелинейного программирования

Из нелинейного программирования наиболее разработаны задачи, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Однако даже для таких задач оптимальное решение может быть найдено для определенного класса целевых функций. Например, когда целевая функция сепарабельная или квадратичная. При этом следует отметить, что в отличие от задач линейного программирования, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией точки могут находиться внутри многогранника, на его ребре или в вершине.

3. Классификация методов нелинейного программирования

При решении задач нелинейного программирования для целевой функции необходимо определить глобальный максимум или глобальный минимум. Глобальный максимум (минимум) функции — это ее наибольшее (наименьшее) значение из локальных максимумов (минимумов). Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задач, так как большинство существующих методов нелинейного программирования не позволяет установить, является найденный экстремум локальным или глобальным. Поэтому имеется возможность в качестве оптимального решения принять локальный экстремум, который может существенно отличаться от глобального.

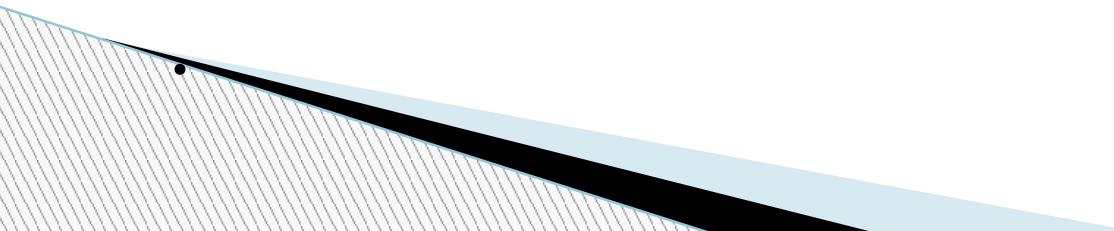
4. Области применения нелинейного программирования

ЗНП встречается в естественных науках, технике, экономике, математике, в сфере деловых отношений и в науке управления государством.

НП, например, связано с основной экономической задачей. В экономике рассматриваются задачи о распределении ограниченных ресурсов таким образом, чтобы либо максимизировать эффективность, либо, если изучается потребитель, максимизировать потребление. НЛП, очевидно, соответствует этой схеме. Целевая функция здесь может отражать эффективность, которую мы пытаемся максимизировать, в то время как ограничения могут выражать условия, вызванные недостатком ресурсов. Аналогично целевая функция может быть математическим выражением потребления. Таким образом, имеется прямая связь между задачей НЛП и основной экономической задачей.

4. Области применения нелинейного программирования

В такой общей постановке определение точных форм функций может оказаться невозможным; однако в конкретных применениях точный вид всех функций часто может быть определен непосредственно. Рассмотрим некоторое промышленное предприятие, например производящее пластмассы. Здесь за эффективность может быть принята прибыль, а ограничения интерпретированы как наличная рабочая сила, производственные площади, производительность оборудования и т. д. В таком конкретном случае обычно имеются исходные количественные данные, и тогда задача НЛП может быть точно сформулирована и решена.



4. Области применения нелинейного программирования

Метод «затраты—эффективность» также укладывается в схему НЛП. Метод был разработан для использования при принятии решений в **управлении государством**, когда вместо функции прибыли имеется общая функция эффективности — благосостояния. Здесь возникают две тесно связанные задачи НЛП: либо максимизация эффекта при ограниченных затратах, либо минимизация затрат при условии, чтобы эффект был выше некоторого минимального уровня. При огромном количестве данных, имеющихся в распоряжении различных государственных учреждений, конкретные задачи метода «затраты — эффективность» часто могут быть хорошо смоделированы с помощью НЛП. Если даже проблема слишком расплывчата для формулировки в виде задачи НЛП, то часто с помощью НЛП удастся получить первые приближения или же решить различные ее части.

4. Области применения нелинейного программирования

Упомянутые применения НЛП концентрированы на задачах о принятии решений. Действительно, существенная сторона НЛП заключается в том, что оно является подспорьем индивидууму — исполнителю или человеку, принимающему государственное решение. Конечно, опытный человек, принимающий решение, не считает, что решение задачи НЛП непосредственно является лучшим ответом на вопросы реального мира. Полученное решение является, естественно, лишь рекомендуемым и принимающий его должен исследовать предположения и точность постановки задачи НЛП, прежде чем принять окончательное решение. Несмотря на это, многие задачи программирования прошли проверку на практике и решение их, подсказанное оптимальной точкой, применяется почти без каких-либо изменений.

4. Области применения нелинейного программирования

Очевидные задачи НЛП часто возникают в науке. В **физике**, например, целевой функцией может быть потенциальная энергия, а ограничениями — различные уравнения движения. При этом минимизация целевой функции определит устойчивое состояние системы. Соответственно, изменяя целевую функцию, можно определить состояние с наибольшей тепловой энергией, кинетической энергией и т. д. В **химии** близкой задачей является определение молекулярной структуры, минимизирующей свободную энергию Гиббса. В **общественных науках** и **психологии** возникает задача минимизации социальной напряженности, когда индивидуумы или группы ограничены тем, что должны следовать определенным законам поведения.

4. Области применения нелинейного программирования

Очевидные задачи НЛП часто возникают в науке. В **физике**, например, целевой функцией может быть потенциальная энергия, а ограничениями — различные уравнения движения. При этом минимизация целевой функции определит устойчивое состояние системы. Соответственно, изменяя целевую функцию, можно определить состояние с наибольшей тепловой энергией, кинетической энергией и т. д. В **химии** близкой задачей является определение молекулярной структуры, минимизирующей свободную энергию Гиббса. В **общественных науках** и **психологии** возникает задача минимизации социальной напряженности, когда индивидуумы или группы ограничены тем, что должны следовать определенным законам поведения.