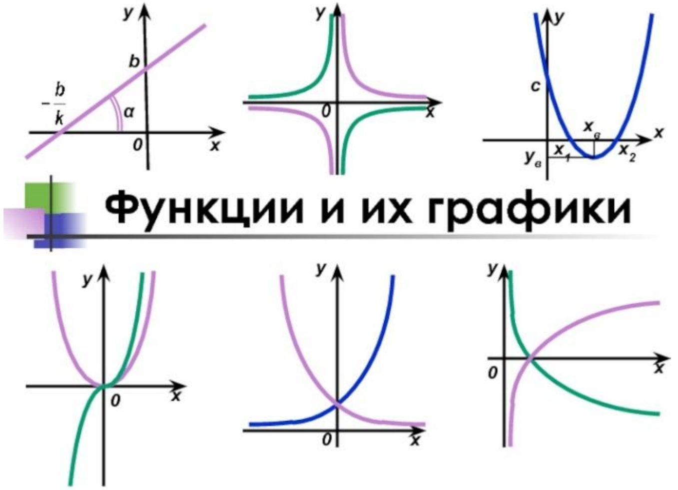
Лекция 1

Понятие функции
Свойства функций



Лекцию подготовила:
Фазлеева Эльмира Илдаровна,
канд. пед. наук, доцент
кафедры теории и технологий
преподавания
математики и информатики ИМиМ

Определение функции

Определение. Пусть каждому числу *x* из множества чисел *X* в силу некоторого (вполне определенного) закона поставлено в соответствие единственное число *y*. Тогда говорят, что *y* есть **функция** от *x*, определенная на множестве *X* и записывают ***y=f*(*x*)** или ***y*(*x*)**.

Или, другими словами:

Если каждому значению ***x*** из некоторого множества поставлено в соответствие по определенному правилу единственное число ***y***, то говорят, что ***на этом множестве задана функция от переменной x***, и записывают ***y = f*** **(*x*)** или ***f*(*x*)**. При этом ***x*** называют ***независимой переменной*** или ***аргументом функции***, а ***y*** – ***зависимой переменной*** или

Область определения, множество значений функции

Определение. Множество значений x (множество X), для которых определены значения $y(x)$, называют **областью определения функции** $y=f(x)$ и обозначают $\boldsymbol{D(y)}$ или $\boldsymbol{D(f)}$.

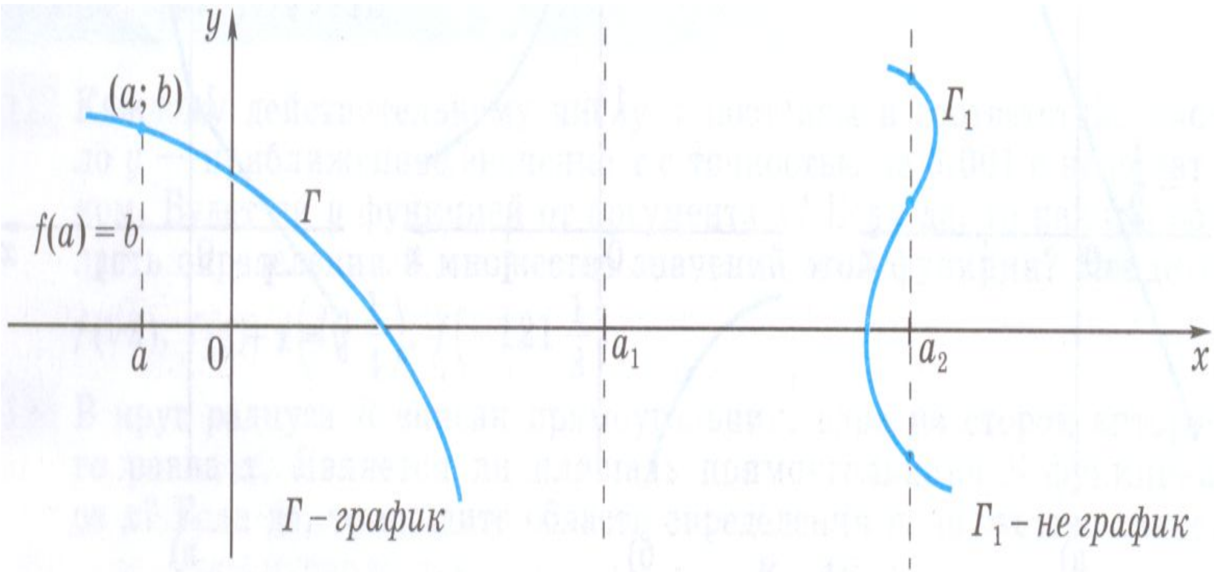
Определение. Множество значений, принимаемых переменной y (множество всех значений зависимой переменной y) называют **множеством значений (областью значений)** или **областью изменения функции** $y=f(x)$ и обозначают $\boldsymbol{E(y)}$ или $\boldsymbol{E(f)}$.

График функции

Определение. **Графиком функции** $y=f(x)$ называют множество всех точек координатной плоскости xOy вида $(x; f(x))$, где x – любое число из области определения функции.

Или, другими словами

Графиком функции называется геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, у которых абсциссами служат значения независимой переменной, а ординатами – соответствующие значения функций, т.е. график – это ГМТ $\mathbf{(x; f(x))}$.


y
(a; b)
Γ₁
Γ
f(a) = b
a
0
a₁
a₂
x
Γ – график
Γ₁ – не график

- ## ***Сложная функция***

Определение. Пусть функция $y = F(u)$ определена на множестве G, а функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X и множество всех ее значений принадлежит множеству G. Тогда любому $x \in X$ функция φ ставит в соответствие число $u \in G$, а этому числу u функция F ставит в соответствие число y, т.е. y является функцией от x на множестве X.

Другими словами, получена функция $y = F(\varphi(x))$, определенная на множестве X. Эту функцию называют функцией от функции или **сложной функцией**. Сложную функцию называют также **суперпозицией** или **композицией двух функций** φ и F.

Например, если $y = 2^u$ и $u = x^3$, то для любого действительного x определена сложная функция $y = 2^{x^3}$.

В школьном курсе изучались функции:

$$y = x^n \quad (n \in N), \qquad y = x^{-n} \quad (n \in N), \qquad y = \sqrt[n]{x} \quad (n \in N,\ n \geq 2),$$

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \in R), \qquad y = \sin x,\ \ y = \cos x, \qquad y = tgx,\ \ y = ctgx,$$

$$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1), \qquad y = \log_a(x) \ \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Все эти функции называют **основными элементарными функциями**.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и применения конечного числа суперпозиций, принято называть **элементарными функциями**.

- ## *Способы задания функции*

Функциональная зависимость задана, если заданы область определения и правило, устанавливающее, какое число ***y*** ставится в соответствие числу ***x***, принадлежащему области определения функции.

1. Аналитический способ задания функции

Функция задается формулой, позволяющей получить значение зависимой переменной ***y***, подставив конкретное числовое значение аргумента ***x***.

Примеры.

$$y = x^2 - 5x + 6; \;\; D(y) = (-\infty; +\infty) = R.$$

- Приведем еще примеры:

$$y = \begin{cases} 5, x \in [0; 1], \\ 6 - x, x \in (1; 4]; \end{cases}$$

или

$$y = \begin{cases} x^2, \text{если } x < 0, \\ 1 - x, \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 3, \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Это примеры ***кусочных функций*** – функций, заданных разными формулами на разных промежутках.

2. Табличный способ задания функции

При этом способе задания функции заполняется таблица, в которой даются значения функции для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и т.д.

Этот способ задания функциональной зависимости удобен для записи результатов наблюдений и измерений в процессе опытов, он распространен в науке, технике, т.е. на практике. Примерами могут служить таблицы измерений температуры пациента в зависимости от времени, зависимости скорости распространения сейсмических волн в толще земной коры от глубины и т.д.

3. Графический способ задания функции

Такое задание дает лишь приближенное значение функции с точностью, которую допускает чтение графика. Чаще всего, графическое задание применяется при обработке наблюдений, когда производится измерение величины, меняющейся при изменении другой величины, играющей роль независимой переменной. Этот способ широко используется в научных исследованиях и в современном производстве.

- ***4. Описательный способ задания функции***

При описательном способе зависимость между аргументом и функцией выражается словесным описанием.

Например, y есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Эту функцию принято обозначать $y = [x]$.

Пусть $x = 2$. Тогда $[x] = 2$.

Если $x = 5{,}3$, то $[x] = 5$.

Если $x = -2{,}17$, то $[x] = -3$.

И т.д.

- ***Пример 1.*** Найти область определения функции $y = \sqrt{|x-1|(3x-6)} + \frac{3}{x^2+4x-21}$.

Решение. Сначала рассмотрим первое слагаемое. По определению арифметического квадратного корня подкоренное выражение должно принимать неотрицательные значения. Поэтому следует решить следующее неравенство: $|x-1|(3x-6) \geq 0$. Т.к. модуль числа неотрицательная величина,

кроме того, неравенство нестрогое, то оно будет равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ 3x-6 \geq 0, \end{array}\right.$ решением которой является $\{1\} \cup [2;+\infty)$.

Выражение, стоящее в знаменателе должно быть отлично от нуля: $x^2+4x-21 \neq 0$, т.е. $x \neq -7$, $x \neq 3$.

Учитывая оба условия, окончательно имеем: $x \in \{1\} \cup [2;3) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $D(f) = \{1\} \cup [2;3) \cup (3;+\infty)$.

- ***Пример 2.*** Найти область определения функции

$$y = \left(9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-3x+1\right)}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Решение. По определению степени с рациональным показателем имеем:

$$9-\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-3x+1\right)}>0, \quad \text{откуда} \quad 3^{\log_4\left(x^2-3x+1\right)}<3^2 \Leftrightarrow \log_4\left(x^2-3x+1\right)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1<16, \\ x^2-3x+1>0. \end{cases}$$

Решением полученной системы неравенств является:

$$\left(\frac{3-\sqrt{69}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{69}}{2}\right).$$

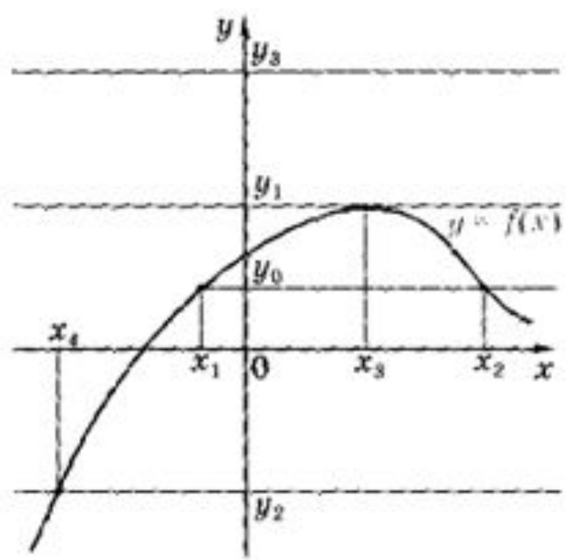
Ответ: $D(y)=\left(\frac{3-\sqrt{69}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{69}}{2}\right).$

- ***Определение степени с рациональным показателем:***

Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Приведем **общее правило нахождения множества значений функции** и продемонстрируем его на конкретном примере.

Нахождение множества значений $E(f)$ функции f при $x \in D(f)$ связано с решением уравнений. Действительно, для того, чтобы число y_0 являлось значением функции f, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $y_0 = f(x)$ имело корень $x \in D(f)$. Это уравнение в зависимости от значения y_0 может иметь одно решение, несколько решений или не иметь их совсем (см. рис.)



Пример 3. Найти множество значений функции: $y = \dfrac{4x+8}{x^2+5}$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных значений x, так как знаменатель $x^2+5 \neq 0$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому нам достаточно найти множество тех значений y_0, при которых

$$y_0 = \frac{4x+8}{x^2+5} \qquad (1)$$

имеет решение $x \in D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$y_0 x^2 - 4x + 5y_0 - 8 = 0. \qquad (2)$$

Если $y_0 \neq 0$, то уравнение (2) – квадратное уравнение, имеющее решение тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен. Имеем:

$$\frac{D}{4} = -5y_0^2 + 8y_0 + 4.$$

Решая неравенство $-5y_0^2+8y_0+4\geq 0$, получим: $y_0\in\left[-\frac{2}{5};2\right]$.

Но $y_0\neq 0$ по предположению, поэтому $y_0\in\left[-\frac{2}{5};0\right)\cup(0;2]$.

Если $y_0=0$, то уравнение (2) принимает вид: $4x+8=0$. Оно имеет решение $x=-2$. Таким образом, $y_0=0$ тоже принадлежит множеству значений функции $y=\frac{4x+8}{x^2+5}$. Окончательно получаем: $E(f)=\left[-\frac{2}{5};2\right]$.

Ответ: $E(f)=\left[-\frac{2}{5};2\right]$.

Таким образом, можно сформулировать нижеследующий ***алгоритм* нахождения множества значений функции:**

Чтобы найти область значений функции, надо уравнение функции разрешить относительно x и определить условия, накладываемые на y.

- ## ***Свойства функций***

1^0 ***Четность функций***

Определение. Числовое множество называют ***симметричным относительно начала координат***, если этому множеству вместе с числом ***x*** принадлежит и противоположное ему число ***- x***.

Примерами таких множеств являются: любой отрезок вида [-*a*; *a*], любой интервал (-*a*; *a*), вся числовая ось (-∞; +∞). В качестве примера еще можно привести: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Определение. Пусть область определения функции ***y*** **=** ***f*(*x*)** является множеством, симметричным относительно начала координат.

Функция ***y*** **=** ***f*(*x*)** называется ***четной,*** если

f*(-*x*) = *f*(*x*)** для любого ***x из области определения функции.

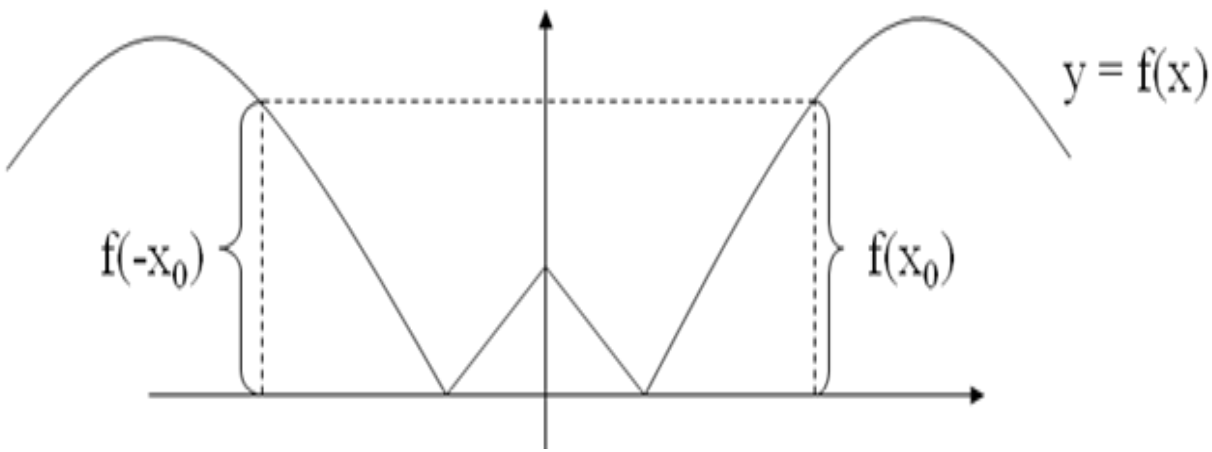
Функция ***y*** **=** ***f*(*x*)** называется ***нечетной,*** если

f*(-*x*) = -*f*(*x*)** для любого ***x из области определения функции.

Определение. Не нечетную и не четную функцию называют ***функцией общего вида***.

- Следующие теоремы выявляют особенности графиков четных и нечетных функций.

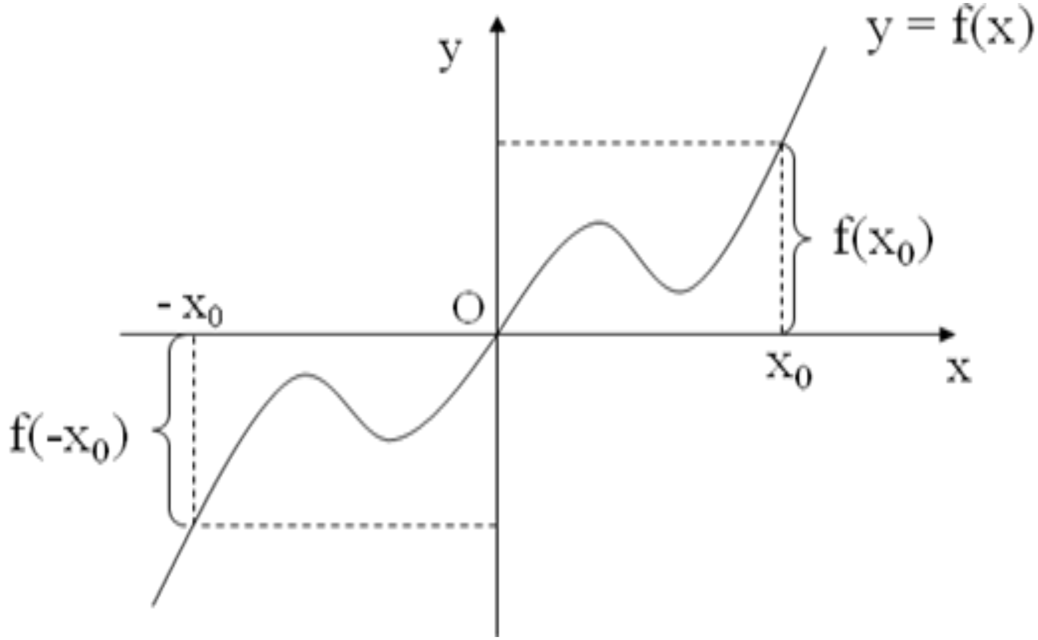
Теорема 1. Если функция $y = f(x),\ x \in X$ является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.



Доказательство: Пусть точка $M\left(x; f(x)\right)$ – точка графика рассматриваемой функции. Так как по условию функция четная, то, во-первых, $(-x) \in X$ и, во-вторых, $f(-x) = f(x)$. Значит, точка $M_1\left(-x; f(x)\right)$ также принадлежит графику функции. Но точки M и M_1 симметричны относительно оси ординат.

Таким образом, график четной функции вместе с каждой своей точкой содержит точку, симметричную с ней относительно оси ординат. Поэтому график четной функции симметричен относительно оси ординат.

- ***Теорема 2.*** Если функция $y = f(x),\ x \in X$ является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.



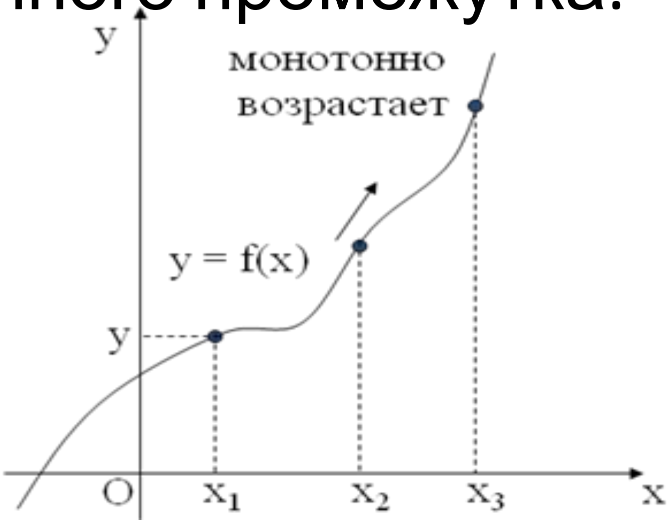
Доказательство: Пусть точка $M\left(x; f(x)\right)$ – точка графика рассматриваемой функции. Так как по условию функция нечетная, то, во-первых, $(-x) \in X$ и, во-вторых, $f(-x) = -f(x)$. Значит, точка $M_1\left(-x; -f(x)\right)$ также принадлежит графику функции. Но точки M и M_1 симметричны относительно начала координат.

Таким образом, график нечетной функции вместе с каждой своей точкой содержит точку, симметричную с ней относительно начала координат. Поэтому график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

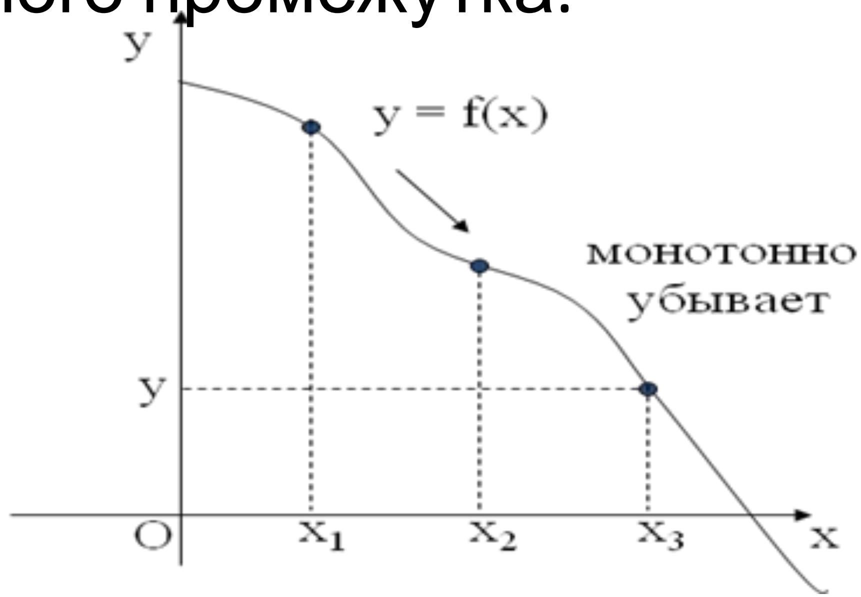
При построении графиков четной и нечетной функций достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно начала координат для нечетной функции и относительно оси ординат для четной функции.

2^0 *Монотонность функций*

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей в некотором промежутке,*** если для любых двух значений x из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка.



Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей в некотором промежутке***, если для любых двух значений x из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка.



Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными функциями***.

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается, а ордината убывающей – уменьшается.

При исследовании функции на возрастание или убывание в некотором промежутке сначала надо проверить, задана ли функция в этом промежутке. Чаще всего, функция ***y = f(x)*** не является возрастающей (или убывающей) во всей области ее определения, но из области определения обычно можно указать промежутки, на которых функция является возрастающей (или убывающей). Их называют ***промежутками монотонности*.**

3^0 Периодичность функций

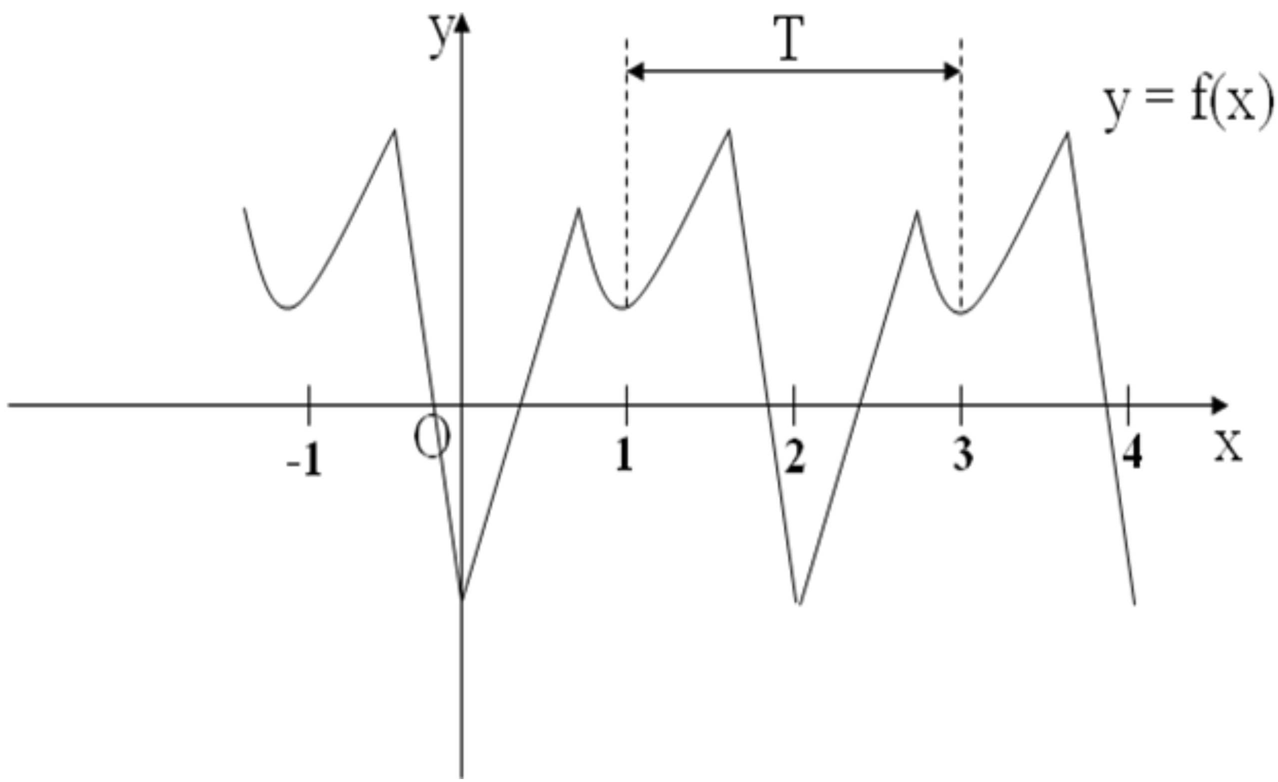
Определение.

Функция ***y = f*(*x*)** с областью определения $\boldsymbol{D}$ называется ***периодической***, если существует такое отличное от нуля число $\boldsymbol{T}$, что выполнены два условия:

1) Если $x \in D$, то $x + T, x - T$ также принадлежат D;
2) Для любого $(x + T) \in D, (x - T) \in D$ справедливо равенство

$$f(x + T) = f(x) = f(x - T).$$

Число $\boldsymbol{T}$ называется ***периодом функции y = f*(*x*)**.



y
T
y = f(x)
O
-1
1
2
3
4
x

- Из этого определения следует, что если T – период функции *y = f*(*x*), то $2T$ – также ее период. Действительно, имеем:

1) $x \in D \Rightarrow (x+T) \in D$, но из $(x+T) \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow \big((x+T)+T\big) \in D$, т.е. $(x+2T) \in D$.

Аналогично получаем, что $(x-2T) \in D$.

2) $f(x+2T) = f\big((x+T)+T\big) = f(x+T) = f(x)$

Таким образом, $2T$ удовлетворяет обоим условиям определения. Следовательно, является периодом функции.

Аналогично проверяется, что $3T, 4T$ и вообще любое число вида $nT, n \in N$, является периодом функции.

- Покажем теперь, что если T – период функции *y = f*(*x*), то $-T$ – также ее период. Действительно, имеем:

1) $x \in D \Rightarrow (x - T) \in D$, $(x + T) \in D$.

2)$f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T)$.

Таким образом, $-T$ удовлетворяет обоим условиям определения. Следовательно, является периодом функции.

Аналогично проверяется, что $-2T, -3T, \ldots$ является периодом функции.

Можем прийти к следующему выводу: периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Если, например, T – период функции, то любое число вида $kT, k \in Z$, также является периодом функции.

Определение. Наименьший из множества положительных периодов функции называется **основным периодом.**

Примерами периодических функций служат все тригонометрические функции.

Периодической является и всякая постоянная функция, причем ее периодом служит любое ненулевое число. Например: $y = 2$; $y = 10$.

4^0 *Асимптоты графиков функций*

Определение. Горизонтальная или наклонная прямая называются ***асимптотой*** графика функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ при $\boldsymbol{x} \to \pm\,\infty$, если при $\boldsymbol{x} \to \pm\,\infty$ расстояние от точки графика до точки с той же абсциссой, лежащей на прямой, стремится к нулю.

- ***Определение.*** Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой графика функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения.

- ***Определение.*** Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном интервале $(a; +\infty)$. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$),

если $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

(соответственно если $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

В случае, когда $\boldsymbol{k \neq 0}$ асимптота называется ***наклонной***, когда $\boldsymbol{k = 0}$ – ***горизонтальной***.

- **Способы нахождения асимптот**

I способ: Предположим, что график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$, тогда по определению асимптоты

$f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$

Отсюда $kx = f(x) - \alpha(x) - b,$

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} - \frac{b}{x}.$$

Так как при $x \to +\infty$: $\alpha(x) \to 0$ и $\frac{1}{x} \to 0$, то

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Далее можно найти b по формуле:

$$k = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

II способ (относится к дробно-рациональным функциям):

Если степень числителя дробно-рациональной функции равна степени знаменателя или больше степени знаменателя на единицу, то график этой функции имеет асимптоту, в первом случае – горизонтальную, во втором случае – наклонную. Чтобы найти эту асимптоту, надо выделить из дроби целую часть.

Эта целая часть в первом случае окажется числом $\boldsymbol{b}$, во втором – многочленом первой степени $\boldsymbol{kx + b}$. Уравнения $\boldsymbol{y = b}$, $\boldsymbol{y = kx + b}$ и являются уравнениями искомых асимптот, в первом случае – горизонтальной, во втором – наклонной.

- ## Упражнения

1. Найти область определения функции:

$y = \frac{1}{\lg(1-\sqrt{x^2-1})}$.

2. Найти множество значений функции:

$y = \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} - 2$.

3. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \frac{3-4x^2-x}{2x-1}$; б) $y = \sqrt{x^2 + x - 20}$

4. Доказать, что функция $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ убывает на $(0;\ +\infty)$.

5. Проверить функции на четность:

а) $y = \frac{x^4-3x^3+x-1}{1-x}$; б) $y = -x|x^2 - 2|$;

в) $y = (x^2 + x)(2 - x)$.

Спасибо за внимание!