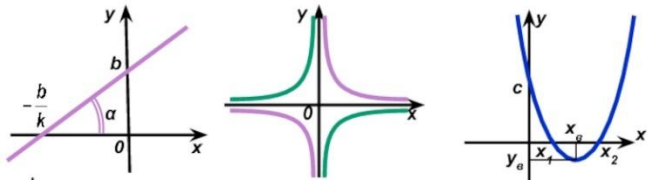
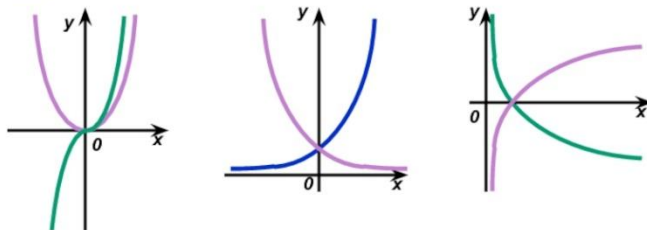


Лекция 1

Понятие функции Свойства функций



Функции и их графики



Лекцию подготовила:
Фазлеева Эльмира Илдаровна,
канд. пед. наук, доцент
кафедры теории и технологий
преподавания
математики и информатики ИМиМ

Определение функции

Определение. Пусть каждому числу x из множества чисел X в силу некоторого (вполне определенного) закона поставлено в соответствие единственное число y . Тогда говорят, что y есть **функция** от x , определенная на множестве X и записывают $y=f(x)$ или $y(x)$.

Или, другими словами:

Если каждому значению x из некоторого множества поставлено в соответствие по определенному правилу единственное число y , то говорят, что **на этом множестве задана функция от переменной x** , и записывают $y = f(x)$ или $f(x)$. При этом x называют **независимой переменной** или **аргументом функции**, а y – **зависимой переменной** или

Область определения, множество значений функции

Определение. Множество значений x (множество X), для которых определены значения $y(x)$, называют **областью определения функции** $y=f(x)$ и обозначают $D(y)$ или $D(f)$.

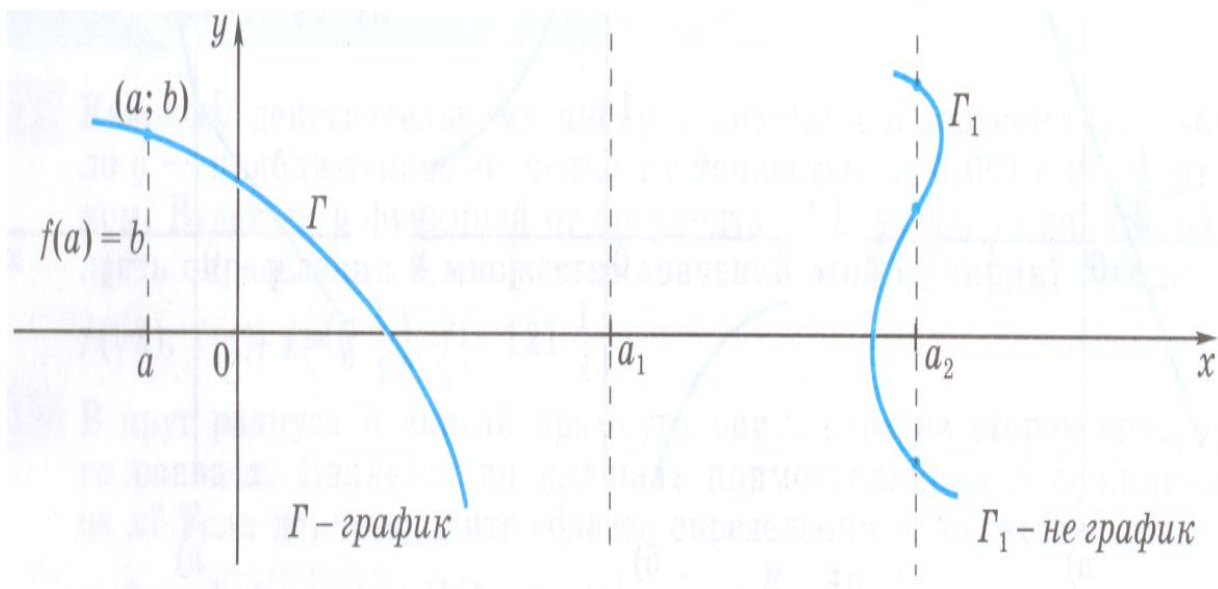
Определение. Множество значений, принимаемых переменной y (множество всех значений зависимой переменной y) называют **множеством значений (областью значений)** или **областью изменения функции** $y=f(x)$ и обозначают $E(y)$ или $E(f)$.

График функции

Определение. Графиком функции $y=f(x)$ называют множество всех точек координатной плоскости xOy вида $(x; f(x))$, где x – любое число из области определения функции.

Или, другими словами

Графиком функции называется геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, у которых абсциссами служат значения независимой переменной, а ординатами – соответствующие значения функций, т.е. график – это ГМТ $(x; f(x))$.



• **Сложная функция**

Определение. Пусть функция $y = F(u)$ определена на множестве G , а функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X и множество всех ее значений принадлежит множеству G . Тогда любому $x \in X$ функция φ ставит в соответствие число $u \in G$, а этому числу u функция F ставит в соответствие число y , т.е. y является функцией от x на множестве X .

Другими словами, получена функция $y = F(\varphi(x))$, определенная на множестве X . Эту функцию называют функцией от функции или **сложной функцией**.

Сложную функцию называют также **суперпозицией** или **композицией двух функций** φ и F .

Например, если $y = 2^u$ и $u = x^3$, то для любого действительного x определена сложная функция

$$y = 2^{x^3}.$$

В школьном курсе изучались функции:

$$y = x^n \quad (n \in N), \quad y = x^{-n} \quad (n \in N), \quad y = \sqrt[n]{x} \quad (n \in N, n \geq 2),$$

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \in R), \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1), \quad y = \log_a(x) \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Все эти функции называют **основными элементарными функциями**.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и применения конечного числа суперпозиций, принято называть **элементарными функциями**.

- ***Способы задания функции***

Функциональная зависимость задана, если заданы область определения и правило, устанавливающее, какое число y ставится в соответствие числу x , принадлежащему области определения функции.

1. Аналитический способ задания функции

Функция задается формулой, позволяющей получить значение зависимой переменной y , подставив конкретное числовое значение аргумента x .

Примеры.

$$y = x^2 - 5x + 6; \quad D(y) = (-\infty; +\infty) = R.$$

Приведем еще примеры:

$$y = \begin{cases} 5, & x \in [0; 1], \\ 6 - x, & x \in (1; 4]; \end{cases}$$

или

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Это примеры **кусочных функций** – функций, заданных разными формулами на разных промежутках.

2. Табличный способ задания функции

При этом способе задания функции заполняется таблица, в которой даются значения функции для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и т.д.

Этот способ задания функциональной зависимости удобен для записи результатов наблюдений и измерений в процессе опытов, он распространен в науке, технике, т.е. на практике. Примерами могут служить таблицы измерений температуры пациента в зависимости от времени, зависимости скорости распространения сейсмических волн в толще земной коры от глубины и т.д.

3. Графический способ задания функции

Такое задание дает лишь приближенное значение функции с точностью, которую допускает чтение графика. Чаще всего, графическое задание применяется при обработке наблюдений, когда производится измерение величины, меняющейся при изменении другой величины, играющей роль независимой переменной. Этот способ широко используется в научных исследованиях и в современном производстве.

- **4. Описательный способ задания функции**

При описательном способе зависимость между аргументом и функцией выражается словесным описанием.

Например, y есть наибольшее целое число, не превосходящее x . Эту функцию принято обозначать $y = [x]$.

Пусть $x = 2$. Тогда $[x] = 2$.

Если $x = 5,3$, то $[x] = 5$.

Если $x = -2,17$, то $[x] = -3$.

И т.д.

- **Пример 1.** Найти область определения функции

$$y = \sqrt{|x - 1|(3x - 6)} + \frac{3}{x^2 + 4x - 21}.$$

Решение. Сначала рассмотрим первое слагаемое. По определению арифметического квадратного корня подкоренное выражение должно принимать неотрицательные значения. Поэтому следует решить следующее неравенство: $|x - 1|(3x - 6) \geq 0$. Т.к. модуль числа неотрицательная величина,

кроме того, неравенство нестрогое, то оно будет равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ 3x - 6 \geq 0, \end{cases} \text{ решением которой является } \{1\} \cup [2; +\infty).$$

Выражение, стоящее в знаменателе должно быть отлично от нуля:

$$x^2 + 4x - 21 \neq 0, \text{ т.е. } x \neq -7, \quad x \neq 3.$$

Учитывая оба условия, окончательно имеем: $x \in \{1\} \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $D(f) = \{1\} \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$.

- **Пример 2.** Найти область определения функции

$$y = \left(9 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 3x + 1)} \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Решение. По определению степени с рациональным показателем имеем:

$$9 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 3x + 1)} > 0, \quad \text{откуда} \quad 3^{\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 3x + 1)} < 3^2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 3x + 1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 < 16, \\ x^2 - 3x + 1 > 0. \end{cases}$$

Решением полученной системы неравенств является:

$$\left(\frac{3 - \sqrt{69}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{69}}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } D(y) = \left(\frac{3 - \sqrt{69}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{69}}{2} \right).$$

- **Определение степени с рациональным показателем:**

Степенью числа $a > 0$ с рациональным

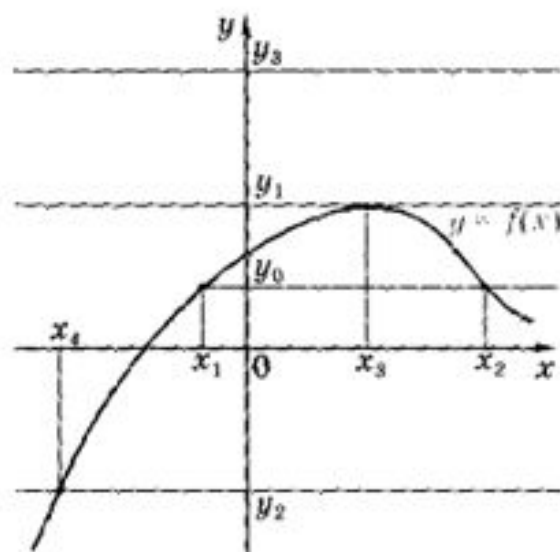
показателем $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, n –

натуральное число ($n > 1$), называется число

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Приведем **общее правило нахождения множества значений функции** и продемонстрируем его на конкретном примере.

Нахождение множества значений $E(f)$ функции f при $x \in D(f)$ связано с решением уравнений. Действительно, для того, чтобы число y_0 являлось значением функции f , необходимо и достаточно, чтобы уравнение $y_0 = f(x)$ имело корень $x \in D(f)$. Это уравнение в зависимости от значения y_0 может иметь одно решение, несколько решений или не иметь их совсем (см. рис.)



Пример 3. Найти множество значений функции: $y = \frac{4x+8}{x^2+5}$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных значений x , так как знаменатель $x^2+5 \neq 0$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому нам достаточно найти множество тех значений y_0 , при которых

$$y_0 = \frac{4x+8}{x^2+5} \quad (1)$$

имеет решение $x \in D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$y_0x^2 - 4x + 5y_0 - 8 = 0. \quad (2)$$

Если $y_0 \neq 0$, то уравнение (2) – квадратное уравнение, имеющее решение тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен.

Имеем:

$$\frac{D}{4} = -5y_0^2 + 8y_0 + 4.$$

Решая неравенство $-5y_0^2 + 8y_0 + 4 \geq 0$, получим: $y_0 \in \left[-\frac{2}{5}; 2\right]$.

Но $y_0 \neq 0$ по предположению, поэтому $y_0 \in \left[-\frac{2}{5}; 0\right) \cup (0; 2]$.

Если $y_0 = 0$, то уравнение (2) принимает вид: $4x + 8 = 0$. Оно имеет решение $x = -2$. Таким образом, $y_0 = 0$ тоже принадлежит множеству значений функции $y = \frac{4x+8}{x^2+5}$. Окончательно получаем: $E(f) = \left[-\frac{2}{5}; 2\right]$.

Ответ: $E(f) = \left[-\frac{2}{5}; 2\right]$.

Таким образом, можно сформулировать нижеследующий алгоритм нахождения множества значений функции:

Чтобы найти область значений функции, надо уравнение функции разрешить относительно x и определить условия, накладываемые на y .

- ## Свойства функций

1⁰ Четность функций

Определение. Числовое множество называют **симметричным относительно начала координат**, если этому множеству вместе с числом x принадлежит и противоположное ему число $-x$.

Примерами таких множеств являются: любой отрезок вида $[-a; a]$, любой интервал $(-a; a)$, вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$. В качестве примера еще можно привести: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Определение. Пусть область определения функции $y = f(x)$ является множеством, симметричным относительно начала координат.

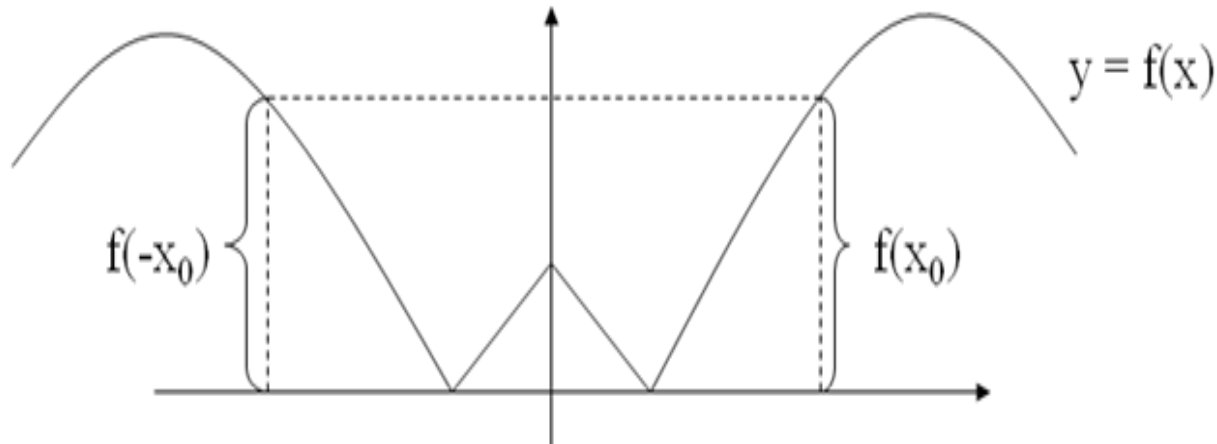
Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции.

Определение. Не нечетную и не четную функцию называют **функцией общего вида**.

- Следующие теоремы выявляют особенности графиков четных и нечетных функций.

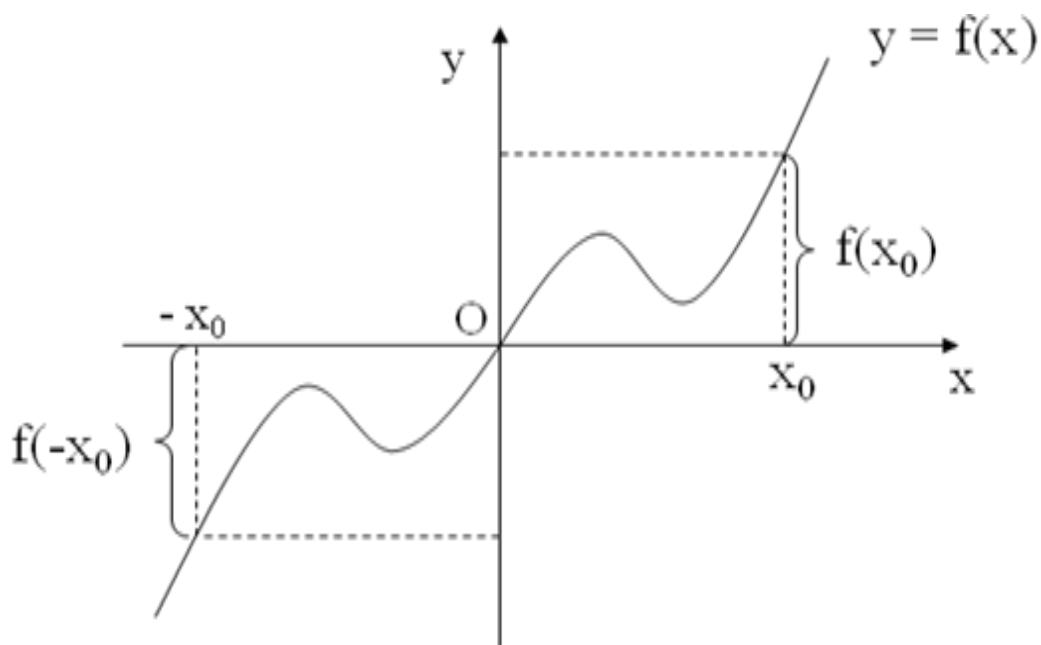
Теорема 1. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.



Доказательство: Пусть точка $M(x; f(x))$ – точка графика рассматриваемой функции. Так как по условию функция четная, то, во-первых, $(-x) \in X$ и, во-вторых, $f(-x) = f(x)$. Значит, точка $M_1(-x; f(x))$ также принадлежит графику функции. Но точки M и M_1 симметричны относительно оси ординат.

Таким образом, график четной функции вместе с каждой своей точкой содержит точку, симметричную с ней относительно оси ординат. Поэтому график четной функции симметричен относительно оси ординат.

- **Теорема 2.** Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.



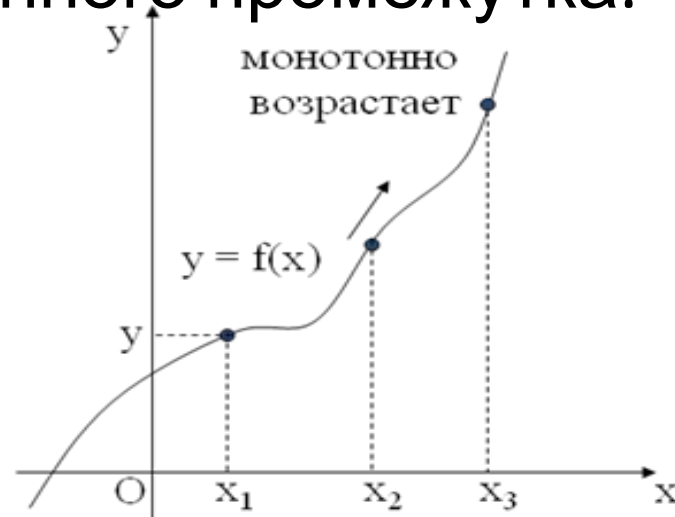
Доказательство: Пусть точка $M(x; f(x))$ – точка графика рассматриваемой функции. Так как по условию функция нечетная, то, во-первых, $(-x) \in X$ и, во-вторых, $f(-x) = -f(x)$. Значит, точка $M_1(-x; -f(x))$ также принадлежит графику функции. Но точки M и M_1 симметричны относительно начала координат.

Таким образом, график нечетной функции вместе с каждой своей точкой содержит точку, симметричную с ней относительно начала координат. Поэтому график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

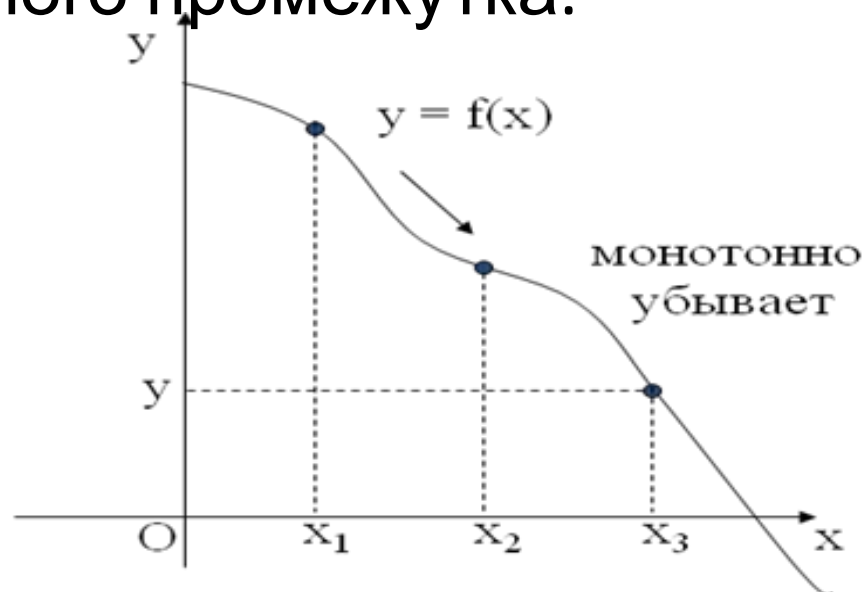
При построении графиков четной и нечетной функций достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно начала координат для нечетной функции и относительно оси ординат для четной функции.

2^o Монотонность функций

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей в некотором промежутке**, если для любых двух значений x из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка.



Определение. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей в некотором промежутке**, если для любых двух значений x из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из данного промежутка.



Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными функциями***.

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается, а ордината убывающей – уменьшается.

При исследовании функции на возрастание или убывание в некотором промежутке сначала надо проверить, задана ли функция в этом промежутке. Чаще всего, функция $y = f(x)$ не является возрастающей (или убывающей) во всей области ее определения, но из области определения обычно можно указать промежутки, на которых функция является возрастающей (или убывающей). Их называют ***промежутками монотонности***.

3⁰ Периодичность функций

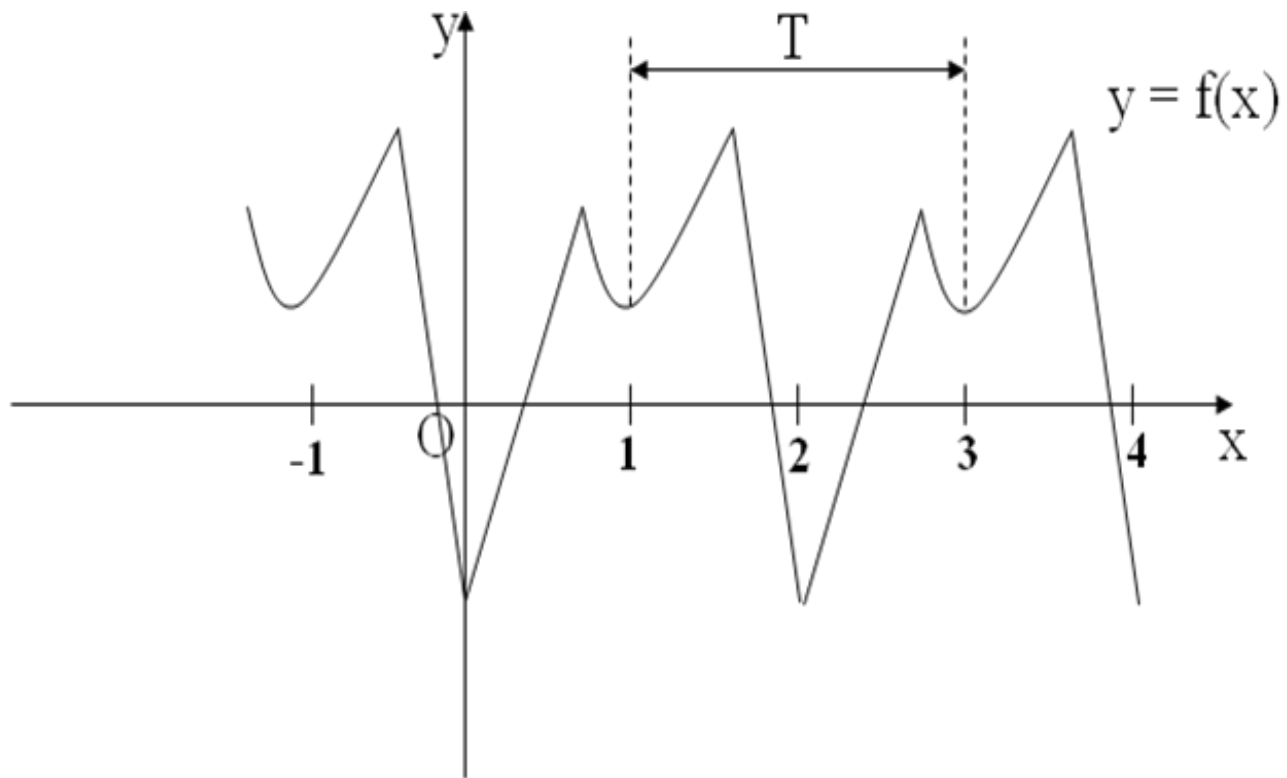
Определение.

Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T , что выполнены два условия:

- 1) Если $x \in D$, то $x + T, x - T$ также принадлежат D ;
- 2) Для любого $(x + T) \in D, (x - T) \in D$ справедливо равенство

$$f(x + T) = f(x) = f(x - T).$$

Число T называется **периодом функции** $y = f(x)$.



• Из этого определения следует, что если T – период функции $y = f(x)$, то $2T$ – также ее период. Действительно, имеем:

1) $x \in D \Rightarrow (x + T) \in D$, но из $(x + T) \in D \Rightarrow \Rightarrow ((x + T) + T) \in D$, т.е. $(x + 2T) \in D$.

Аналогично получаем, что $(x - 2T) \in D$.

2) $f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$

Таким образом, $2T$ удовлетворяет обоим условиям определения. Следовательно, является периодом функции.

Аналогично проверяется, что $3T, 4T$ и вообще любое число вида $nT, n \in N$, является периодом функции.

- Покажем теперь, что если T – период функции $y = f(x)$, то $-T$ – также ее период. Действительно, имеем:

$$1) x \in D \Rightarrow (x - T) \in D, (x + T) \in D.$$

$$2) f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T).$$

Таким образом, $-T$ удовлетворяет обоим условиям определения. Следовательно, является периодом функции.

Аналогично проверяется, что $-2T, -3T, \dots$ является периодом функции.

Можем прийти к следующему выводу: периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Если, например, T – период функции, то любое число вида $kT, k \in \mathbb{Z}$, также является периодом функции.

Определение. Наименьший из множества положительных периодов функции называется **основным периодом**.

Примерами периодических функций служат все тригонометрические функции.

Периодической является и всякая постоянная функция, причем ее периодом служит любое ненулевое число. Например: $y = 2$; $y = 10$.

4⁰ Асимптоты графиков функций

Определение. Горизонтальная или наклонная прямая называются **асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$, если при $x \rightarrow \pm \infty$ расстояние от точки графика до точки с той же абсциссой, лежащей на прямой, стремится к нулю.

- **Определение.** Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой графика функции** $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения.

- **Определение.** Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном интервале $(a; +\infty)$. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно при $x \rightarrow -\infty$),

если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$

(соответственно если $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$).

В случае, когда $k \neq 0$ асимптота называется **наклонной**, когда $k = 0$ – **горизонтальной**.

- **Способы нахождения асимптот**

I способ: Предположим, что график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow +\infty$, тогда по определению асимптоты

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Отсюда $kx = f(x) - \alpha(x) - b$,

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} - \frac{b}{x}.$$

Так как при $x \rightarrow +\infty$: $\alpha(x) \rightarrow 0$ и $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, то

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Далее можно найти b по формуле:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

II способ (относится к дробно-рациональным функциям):

Если степень числителя дробно-рациональной функции равна степени знаменателя или больше степени знаменателя на единицу, то график этой функции имеет асимптоту, в первом случае – горизонтальную, во втором случае – наклонную. Чтобы найти эту асимптоту, надо выделить из дроби целую часть.

Эта целая часть в первом случае окажется числом b , во втором – многочленом первой степени $kx + b$. Уравнения $y = b$, $y = kx + b$ и являются уравнениями искомых асимптот, в первом случае – горизонтальной, во втором – наклонной.

Упражнения

1. Найти область определения функции:

$$y = \frac{1}{\lg(1 - \sqrt{x^2 - 1})}.$$

2. Найти множество значений функции:

$$y = \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} - 2.$$

3. Найти асимптоты графиков функций:

$$\text{а) } y = \frac{3 - 4x^2 - x}{2x - 1}; \quad \text{б) } y = \sqrt{x^2 + x - 20}$$

4. Доказать, что функция $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ убывает на $(0; +\infty)$.

5. Проверить функции на четность:

$$\text{а) } y = \frac{x^4 - 3x^3 + x - 1}{1 - x}; \quad \text{б) } y = -x|x^2 - 2|;$$

$$\text{в) } y = (x^2 + x)(2 - x).$$

Спасибо за внимание!