

# Занимательная математика АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:  
УРАВНЕНИЯ И  
НЕРАВЕНСТВА С  
ПАРАМЕТРАМИ

$$F(x; a) = 0$$

$$F(x; a) > 0$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

Под **уравнением с параметром**, обычно принято понимать, **уравнение вида  $f(x;a)=0$** , где  **$x$  – переменная**, относительно которой надо решить уравнение,  **$a$  – произвольное действительное число**, параметр.

Трудностей при решении уравнений с параметрами довольно много, так как в зависимости от параметра уравнение может принимать совершенно разный вид.

Так, при одном значении параметра уравнение может не иметь решений, при другом бесконечно много решений, при третьем значении решаться одним способом, при четвертом совершенно другим. Мы постараемся разобрать основные принципы, которыми следует руководствоваться при решении уравнений.

# Уравнения и неравенства с параметрами

**Пример.** Решить относительно  $x$ :

а)  $3a(a-3)x = a-3$

б)  $3a(a-3)x > a-3$

**Решение.**

а) Нам с вами дано обычное линейное уравнение, решается которое довольно просто, число в правой части уравнения делим на коэффициент при  $x$  в левой части уравнения.

В правой части уравнения число равняется  $a-3$ .

В левой части уравнения коэффициент при  $x$  равен  $3a(a-3)$ .

Тогда решение в общем виде будет  $x = \frac{a-3}{3a(a-3)}$  параметр  $a$  может принимать любые значения. Мы прекрасно знаем, что на ноль делить нельзя, тогда  $3a(a-3) \neq 0$ , что означает  $a \neq 0$  и  $a \neq 3$ .

То есть мы получили, при  $a=0$  и  $a=3$  – решений нет, так как на ноль делить нельзя.

При всех остальных значениях параметра  $a$ ,

$$x = \frac{a-3}{3a(a-3)} = \frac{1}{3a}$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

б) Нам так же дано обычное линейное неравенство. В этом случае нам стоит учесть еще одно условие. В зависимости от знака коэффициента при  $x$ , мы меняем, либо не меняем знак неравенства, при делении на этот коэффициент.

В этот раз рассмотрим случаи:

1.  $a=0$    2.  $a=3$    3.  $a<0$    4.  $0<a<3$    5.  $a>3$

1.  $a=0$  В этом случае неравенство принимает вид  $0 \cdot x > -3$ , которое выполняется при любых  $x$ .

2.  $a=3$  В этом случае неравенство принимает вид  $0 \cdot x > 0$ , которое не имеет решений.

3.  $a<0$  Коэффициент  $3a(a-3)$  положителен, значит, при делении на этот коэффициент, знак неравенства остается прежним, тогда решением в этом случае будет  $x > \frac{1}{3a}$

# Уравнения и неравенства с параметрами

4.  $0 < a < 3$  В этом случае, коэффициент отрицателен. тогда нам следует знак неравенства сменить на противоположный,  $x < \frac{1}{3a}$

5.  $a > 3$  Коэффициент  $3a(a-3)$  положителен, значит, при делении на этот коэффициент, знак неравенства остается прежним, тогда решением в этом случае будет  $x > \frac{1}{3a}$ . Пункты 3 и 5 можно объединить в один при записи в ответ.

**Ответ:** а) Уравнение не имеет решений при  $a=0$  и  $a=3$ . При всех других  $a$  решением уравнения будет  $x = \frac{1}{3a}$

б) При  $a=0$ , неравенство выполняется при любых  $x$ .  
Если  $a=3$ , то решений нет.

Если  $a < 0$  и  $a > 3$ , то  $x > \frac{1}{3a}$

Если  $0 < a < 3$ , то  $x < \frac{1}{3a}$

# Уравнения и неравенства с параметрами

**Пример.** Решить уравнение:

$$2(a - 2)x^2 + 4(a + 1)x + (2a + 2) = 0$$

**Решение.**

При решении квадратных уравнений с параметром, как правило, следует рассматривать два случая:

1. коэффициент при старшей степени равен нулю.
2. коэффициент при старшей степени не равен нулю.

Рассмотрим первый случай. При  $a=2$ , наше уравнение принимает вид обычного линейного уравнения:

$$0 \cdot x^2 + 12x + 6 = 0, \text{ т. е. } x = -\frac{1}{2}$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

Перейдем ко второму случаю, найдем дискриминант нашего уравнения:

$$\begin{aligned} D &= (4(a+1))^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a-2)(2a+2) = \\ &= 16(a^2 + 2a + 1) - 8(2a^2 + 2a - 4a - 4) = \\ &= 16a^2 + 32a + 16 - 16a^2 + 16a + 32 = 48a + 48 = 48(a+1) \end{aligned}$$

Дальше следует рассуждать о знаке дискриминанта.

**а)** При  $D < 0$ , корней уравнения нет. В нашем случае, при  $a < -1$  – решений нет.

**б)** При  $D = 0$ , один корень. В нашем случае, при  $a = -1$  – одно решение. Найдем это решение

$$x = \frac{-4(a+1)}{4(a-2)} = \frac{-4 \cdot 0}{4 \cdot (-3)} = 0$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

в) При  $D > 0$ , два корня уравнения. В нашем случае, при  $a > -1$  – два решения.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{48(a+1)}}{4(a-2)} = \frac{-4(a+1) \pm 4\sqrt{3(a+1)}}{4(a-2)} \\ &= \frac{-(a+1) \pm \sqrt{3(a+1)}}{(a-2)}\end{aligned}$$

**Ответ:**

При  $a=2$ ,  $x=-0,5$ . При  $a < -1$  – решений нет.

При  $a=-1$ ,  $x=0$ .

При  $a > -1$ ,  $x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{3(a+1)}}{(a-2)}$

# Уравнения и неравенства с параметрами

**Пример.** Решить уравнение:

$$\sqrt{x+a} = (a-2x)$$

**Решение.** Начнем с обычного действия, возведем обе части уравнения в квадрат.

$$(\sqrt{x+a})^2 = (a-2x)^2$$

$$4x^2 - (4a+1)x + (a^2 - a) = 0$$

$$x + a = a^2 - 4ax + 4x^2$$

Найдем дискриминант данного уравнения.

$$D = (4a+1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - a) = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 16a = 24a + 1$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

Перейдем к рассмотрению трех возможных случаев:

1.  $D < 0$ , при  $a < -\frac{1}{24}$ , решений нет.

2.  $D = 0$ , при  $a = -\frac{1}{24}$ . Решив уравнение получим  $x = \frac{5}{48}$ .

проверим выполняется ли равенство  $\sqrt{\frac{5}{48} - \frac{1}{24}} \neq -\frac{1}{24} - \frac{10}{48}$ ,

значит уравнение не имеет корней в данном случае.

3.  $D > 0$ , при  $a > -\frac{1}{24}$ , два корня уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{4a + 1 \pm \sqrt{24a + 1}}{8}$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

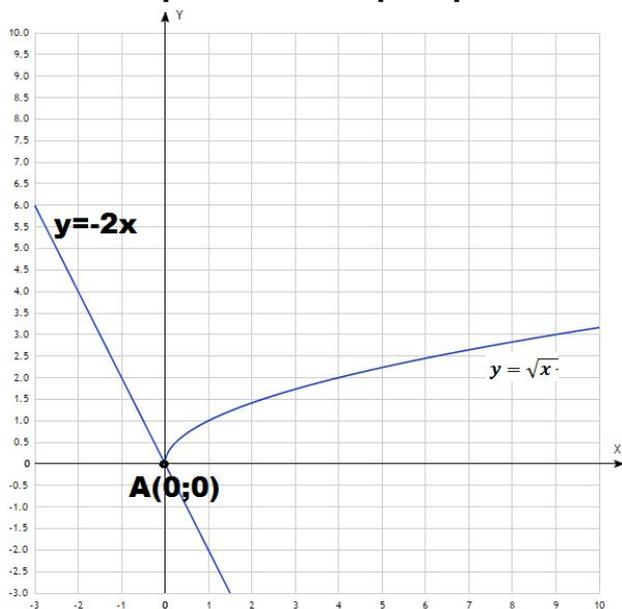
Осталось выполнить проверку полученных корней, но проверка таких корней, представляет собой довольно таки сложную операцию. Давайте построим два графика функции и найдем их точки пересечения.

$$y = \sqrt{x+a} \text{ и } y = a - 2x$$

Рассмотрим три случая для значений параметра  $a$ :

а.  $a=0$  б.  $a<0$  в.  $a>0$

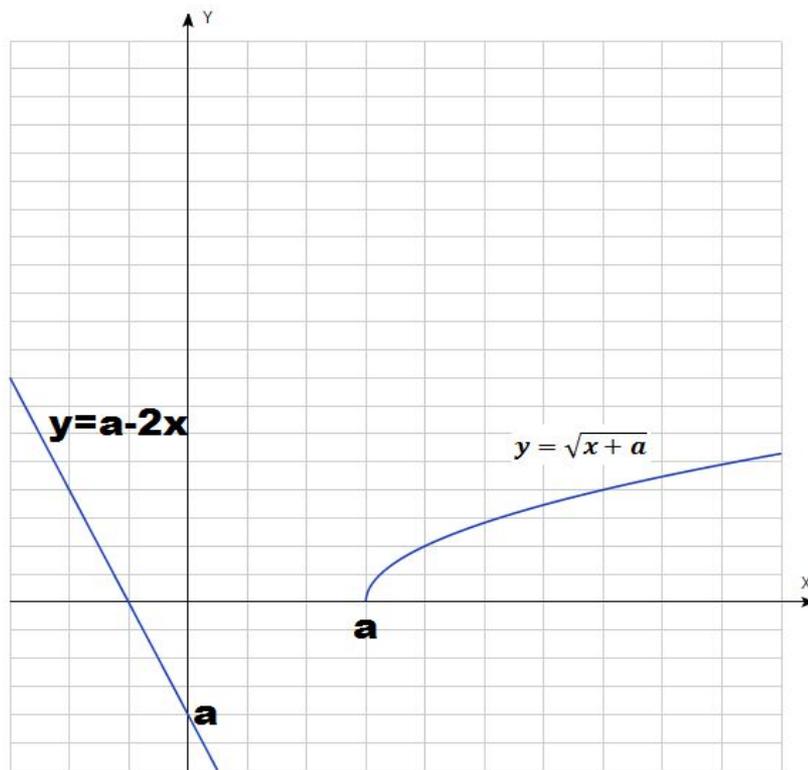
а. При  $a=0$ , графики выглядят следующим образом



Графики пересекаются в одной точке  $A(0;0)$ , значит уравнение имеет одно решение  $x=0$ .

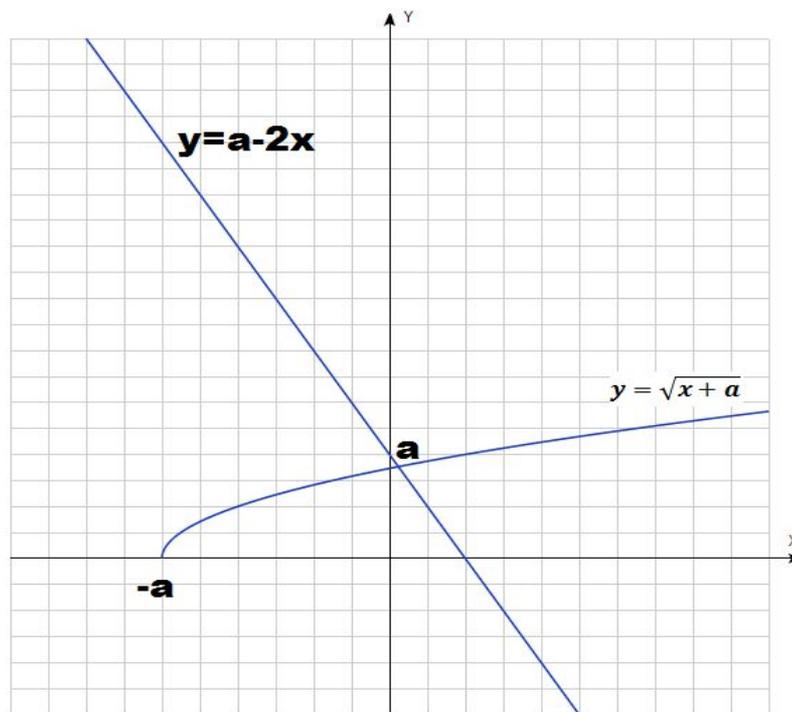
# Уравнения и неравенства с параметрами

б. При  $a < 0$ , график корня квадратного сместится вправо на  $a$  единиц, а график линейной функции сместится на  $a$  единиц вниз. Как видно из схематического рисунка, наши графики не могут пересечься, значит, корней нет.



# Уравнения и неравенства с параметрами

в. При  $a > 0$ , графики функций пересекаются в одной точке. Выше мы получили два возможных корня уравнения, нам нужно выбрать один из этих корней удовлетворяющий графику ниже.



# Уравнения и неравенства с параметрами

Мы можем заметить, что абсцисса точки пересечения больше нуля, но меньше чем  $a/2$ .

Проверим наши корни

$$\frac{4a + 1 + \sqrt{24a + 1}}{8} < \frac{a}{2}$$

$$4a + 1 + \sqrt{24a + 1} < 4a$$

$\sqrt{24a + 1} < -1$  — не возможно, значит  $a \in \emptyset$  для этого корня.

# Уравнения и неравенства с параметрами

Для уверенности в правильности решения проверим второй корень.

$$\frac{4a + 1 - \sqrt{24a + 1}}{8} < \frac{a}{2}$$

$$4a + 1 - \sqrt{24a + 1} < 4a$$

$$-\sqrt{24a + 1} < -1$$

$$\sqrt{24a + 1} > 1$$

$a > 0$ , получили верное неравенство.

**Ответ:** При  $a=0$ ,  $x=0$ .

При  $a < 0$ , решений нет.

$$\text{При } a > 0, x = \frac{4a + 1 - \sqrt{24a + 1}}{8}$$

# Уравнения и неравенства с параметрами

**Задачи для самостоятельного решения.**

**1.** Решить относительно  $x$ :

а)  $5a(a-4)x = a-4$

б)  $5a(a-4)x < a-4$

**2.** Решить уравнение:

$$4(a-1)x^2 + 4(a+3)x + (a+1) = 0$$

**3.** Решить уравнение:

$$\sqrt{-x+a} = (a+2x)$$