КИНЕМАТИКА

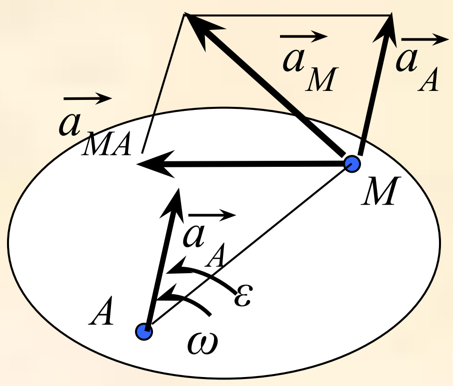
Тема 3. Кинематика твердого тела

Плоское движение.

Определение ускорений точек.

Определение ускорений точек плоской фигуры

<u>Вывод.</u> Ускорение любой точки *M* плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой - нибудь другой точки *A*, принятой за полюс, и ускорения, которое точка *M* получает при вращении фигуры вокруг этого полюса, то есть



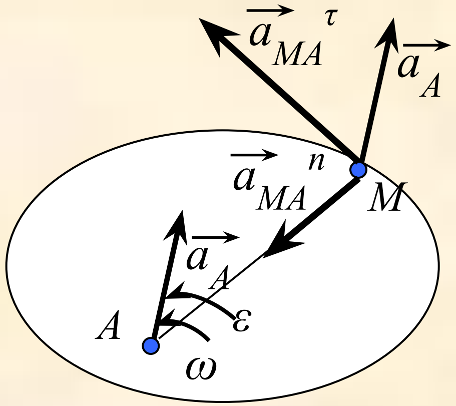
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \quad (1)$$

Этот вывод основывается на положении о том, что плоское движение раскладывается на поступательное движение вместе с полюсом и вращательное движение вокруг полюса.

Ускорение $\vec{a}_{MA}$ может быть разложено на нормальное и касательное ускорения $\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}{}^{n} + \vec{a}_{MA}{}^{\tau}$.

Тогда (1) примет вид:

$$\vec{a}_{M} = \vec{a}_{A} + \vec{a}_{MA}{}^{n} + \vec{a}_{MA}{}^{\tau}, \qquad (2)$$



где $a_{MA}{}^{n} = \omega^{2} \cdot AM$ и вектор $\vec{a}_{MA}{}^{n}$ будет направлен к полюсу A, а $a_{MA}{}^{\tau} = \varepsilon \cdot MA$ и вектор $\vec{a}_{MA}{}^{\tau}$ будет направлен $\perp$ к отрезку MA в сторону ε.

Если полюс А движется по криволинейной траектории, то (2) примет вид

$$\vec{a}_{M} = \vec{a}_{A}{}^{n} + \vec{a}_{A}{}^{\tau} + \vec{a}_{MA}{}^{n} + \vec{a}_{MA}{}^{\tau}. \qquad (3)$$

Модули и направления ускорений: $\vec{a}_A^{\,n},\ \vec{a}_A^{\,\tau},\ \vec{a}_{MA}^{\,n},\ \vec{a}_{MA}^{\,\tau}$

обычно удается определить, поэтому для нахождения полного ускорения можно применять метод проекций.

Проектируя векторное равенство (3) на оси координат, получим:

$$
\begin{aligned}
a_{Mx} &= a_{Ax}^{\,n} + a_{Ax}^{\,\tau} + a_{MAx}^{\,n} + a_{MAx}^{\,\tau},\\
a_{My} &= a_{Ay}^{\,n} + a_{Ax}^{\,\tau} + a_{MAy}^{\,n} + a_{MAy}^{\,\tau},\\
a_{Mz} &= a_{Az}^{\,n} + a_{Az}^{\,\tau} + a_{MAz}^{\,n} + a_{MAz}^{\,\tau}.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

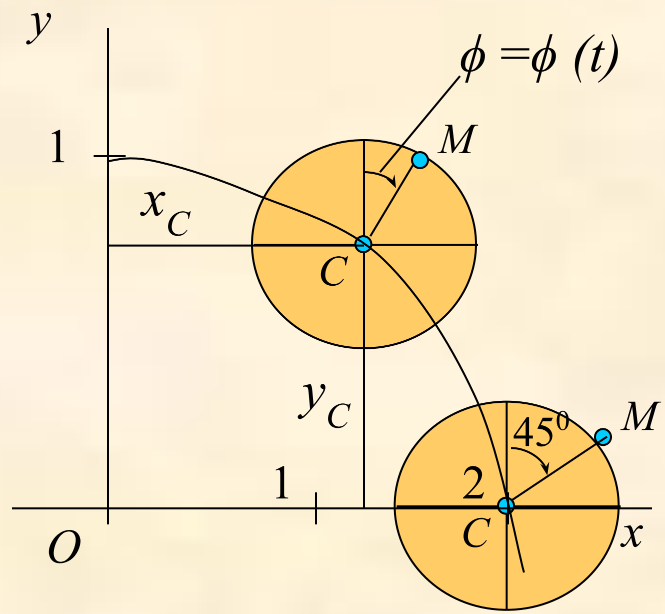
Вычисляя правые части в выражениях (4) найдем проекции вектора полного ускорения на оси координат, тогда его модуль и направление определиться по формулам:

$$\left|\vec{a}_M\right| = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2}$$

$$\cos\alpha = a_{Mx} / |\vec{a}_M|,\quad \cos\beta = a_{My} / |\vec{a}_M|,\quad \cos\gamma = a_{Mz} / |\vec{a}_M|.$$

Пример определения ускорений точек плоской фигуры

Центр *C*, движущегося в вертикальной плоскости диска, имеет уравнения движения $x_C = 2t$ (*м*) и $y_C = -t^2 + 1$ (*м*). Закон вращения диска вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости, $\phi = \pi t^2/4$ (*рад*). Радиус диска $R = 1$ *м*.



Определить ускорение точки *M* диска в момент времени $t_1 = 1$ *c*.

Решение

1. Определим положение диска и точки *M* в момент времени t_1.

Координаты точки *C*: $x_{C1} = 2 \cdot 1 = 2$; $y_{C1} = -1^2 + 1 = 0$. Положение точки *M* определяется углом $\phi_1 = \pi \cdot 1^2/4 = \pi/4 = 45^0$.

2. Выберем полюс и применим метод проекций.

Для определения ускорения точки M воспользуемся формулой (2), принимая в качестве полюса точку С. Тогда получим $\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}{}^n + \vec{a}_{MC}{}^\tau$.

Или в проекциях на оси координат

$$a_{Mx} = a_{Cx} + a_{MCx}{}^n + a_{MCx}{}^\tau,$$
$$a_{My} = a_{Cy} + a_{MCy}{}^n + a_{MCy}{}^\tau. \qquad (1)$$

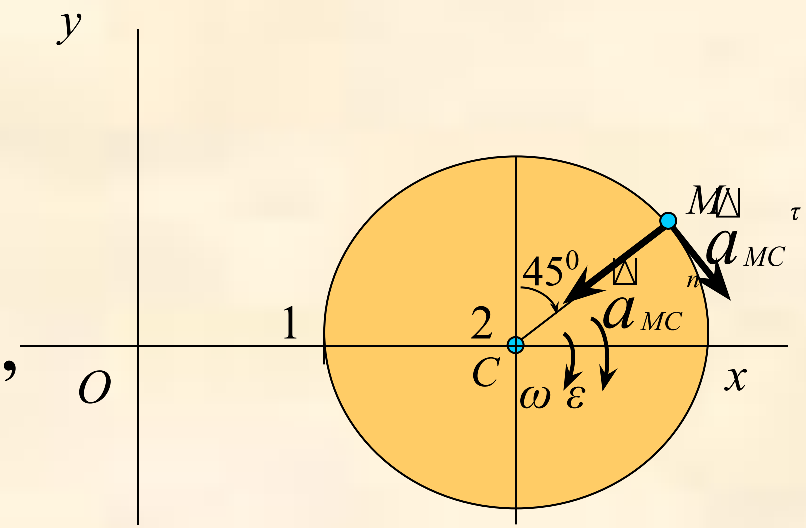
3. Определим величины, входящие в правые части равенств (1).

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C = 0; \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C = -2. \qquad (2)$$

Величину $a_{MC}{}^n$ найдем по формуле $a_{MC}{}^n = \omega^2 \cdot CM =$

$$= \dot{\varphi}^2 \cdot CM = \pi t^2/4|_{t=1} = \pi/4.$$

Вектор $\vec{a}_{MC}^{\,n}$ будет направлен к центру диска, то есть к точке *C*.



Проекции на оси вектора $\vec{a}_{MC}^{\,n}$

$$a_{MCx}^{\,n} = - a_{MC}^{\,n} \cdot \cos 45^0 = -\pi\sqrt{2}/8 = -0{,}56,$$
$$a_{MCy}^{\,n} = - a_{MC}^{\,n} \cdot \cos 45^0 = -0{,}56. \qquad (3)$$

Величину $a_{MC}^{\,\tau}$ найдем по формуле $a_{MC}^{\,\tau} = \varepsilon \cdot CM = \ddot{\varphi} \cdot CM = \pi/2.$

Вектор $\vec{a}_{MC}^{\,\tau}$ будет направлен по касательной, т. е. $\perp$ отрезку CM.

Проекции на оси вектора $\vec{a}_{MC}^{\,\tau}$

$$a_{MCx}^{\,\tau} = a_{MC}^{\,\tau} \cdot \cos 45^0 = \pi \cdot \sqrt{2}/4 = 1{,}11,$$
$$a_{MCy}^{\,\tau} = - a_{MC}^{\,\tau} \cdot \cos 45^0 = -1{,}11. \qquad (4)$$

Подставляя значения (2) – (4) в выражения (1), получим

$$a_{Mx} = 0 - 0{,}56 + 1{,}11 = 0{,}55,$$
$$a_{My} = -2 - 0{,}56 - 1{,}11 = -3{,}67.$$

Модуль и направление вектора ускорения точки *M* определим по формулам:

$$|\vec{a}_M| = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{0{,}55^2 + (-3{,}67)^2} = 3{,}71 \, м/с^2.$$

$$\cos(\alpha) = a_{Mx} / |\vec{a}_М| = 0{,}55 / 3{,}71 = 0{,}15.$$

$$\alpha = \arccos(0{,}15) = 1{,}42 \text{ рад.} \approx 81^0.$$

Изобразим вектор ускорения на рисунке