

КИНЕМАТИКА

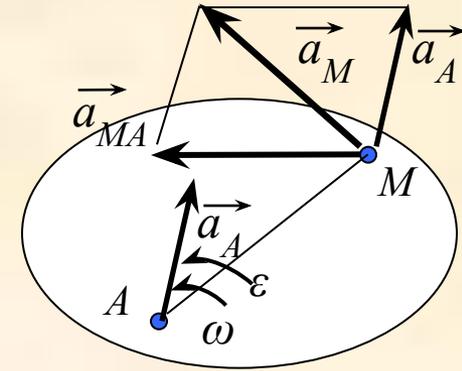
Тема 3. Кинематика твердого тела

Плоское движение.

Определение ускорений точек.

Определение ускорений точек плоской фигуры

Вывод. Ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса, то есть



$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \quad (1)$$

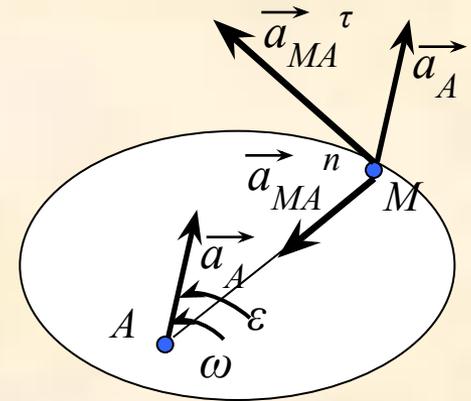
Этот вывод основывается на положении о том, что плоское движение раскладывается на поступательное движение вместе с полюсом и вращательное движение вокруг полюса.

Ускорение \vec{a}_{MA} может быть разложено на нормальное и касательное ускорения $\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau$.

Тогда (1) примет вид:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau, \quad (2)$$

где $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM$ и вектор \vec{a}_{MA}^n будет направлен к полюсу A , а $a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot MA$ и вектор \vec{a}_{MA}^τ будет направлен \perp к отрезку MA в сторону ε .



Если полюс A движется по криволинейной траектории, то (2) примет вид

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau. \quad (3)$$

Модули и направления ускорений: $\overset{\boxtimes}{a}_A^n$, $\overset{\boxtimes}{a}_A^\tau$, $\overset{\boxtimes}{a}_{MA}^n$, $\overset{\boxtimes}{a}_{MA}^\tau$

обычно удается определить, поэтому для нахождения полного ускорения можно применять метод проекций.

Проектируя векторное равенство (3) на оси координат, получим:

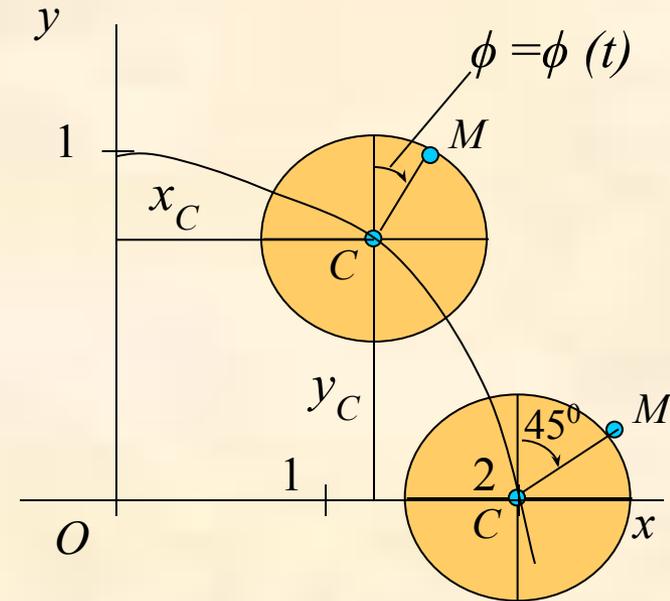
$$\begin{aligned} a_{Mx} &= a_{Ax}^n + a_{Ax}^\tau + a_{MAx}^n + a_{MAx}^\tau, \\ a_{My} &= a_{Ay}^n + a_{Ax}^\tau + a_{MAy}^n + a_{MAy}^\tau, \\ a_{Mz} &= a_{Az}^n + a_{Az}^\tau + a_{MAz}^n + a_{MAz}^\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Вычисляя правые части в выражениях (4) найдем проекции вектора полного ускорения на оси координат, тогда его модуль и направление определятся по формулам:

$$\begin{aligned} \left| \overset{\boxtimes}{a}_M \right| &= \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2} \\ \cos\alpha &= a_{Mx} / \left| \overset{\boxtimes}{a}_M \right|, \quad \cos\beta = a_{My} / \left| \overset{\boxtimes}{a}_M \right|, \quad \cos\gamma = a_{Mz} / \left| \overset{\boxtimes}{a}_M \right|. \end{aligned}$$

Пример определения ускорений точек плоской фигуры

Центр C , движущегося в вертикальной плоскости диска, имеет уравнения движения $x_C = 2t$ (м) и $y_C = -t^2 + 1$ (м). Закон вращения диска вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости, $\phi = \pi t^2/4$ (рад). Радиус диска $R = 1$ м.



Определить ускорение точки M диска в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

1. Определим положение диска и точки M в момент времени t_1 .

Координаты точки C : $x_{C1} = 2 \cdot 1 = 2$; $y_{C1} = -1^2 + 1 = 0$. Положение точки M определяется углом $\phi_1 = \pi \cdot 1^2/4 = \pi/4 = 45^\circ$.

2. Выберем полюс и применим метод проекций.

Для определения ускорения точки M воспользуемся формулой (2), принимая в качестве полюса точку C . Тогда получим $a_M = a_C + a_{MC}^n + a_{MC}^\tau$.

Или в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} a_{Mx} &= a_{Cx} + a_{MCx}^n + a_{MCx}^\tau, \\ a_{My} &= a_{Cy} + a_{MCy}^n + a_{MCy}^\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

3. Определим величины, входящие в правые части равенств (1).

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C = 0; \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C = -2. \quad (2)$$

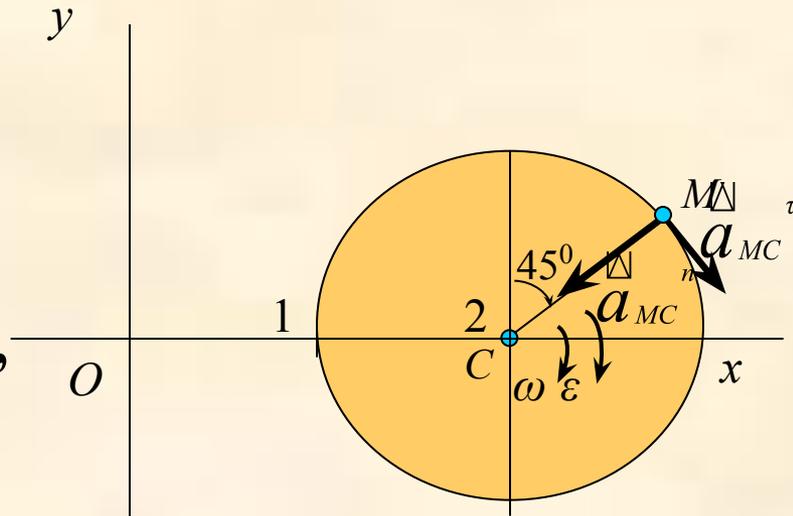
Величину a_{MC}^n найдем по формуле $a_{MC}^n = \omega^2 \cdot CM =$
 $= \phi^2 \cdot CM = \pi t^2/4|_{t=1} = \pi/4.$

Вектор \vec{a}_{MC}^n будет направлен к центру диска, то есть к точке C .

Проекции на оси вектора \vec{a}_{MC}^n

$$a_{MCx}^n = -a_{MC}^n \cdot \cos 45^\circ = -\pi\sqrt{2}/8 = -0,56,$$

$$a_{MCy}^n = -a_{MC}^n \cdot \cos 45^\circ = -0,56. \quad (3)$$



Величину a_{MC}^τ найдем по формуле $a_{MC}^\tau = \varepsilon \cdot CM = \varphi \cdot CM = \pi/2$.

Вектор \vec{a}_{MC}^τ будет направлен по касательной, т. е. \perp отрезку CM .

Проекции на оси вектора \vec{a}_{MC}^τ

$$a_{MCx}^\tau = a_{MC}^\tau \cdot \cos 45^\circ = \pi \cdot \sqrt{2}/4 = 1,11, \quad (4)$$

$$a_{MCy}^\tau = -a_{MC}^\tau \cdot \cos 45^\circ = -1,11.$$

Подставляя значения (2) – (4) в выражения (1), получим

$$a_{Mx} = 0 - 0,56 + 1,11 = 0,55,$$

$$a_{My} = -2 - 0,56 - 1,11 = -3,67.$$

Модуль и направление вектора ускорения точки M определим по формулам:

$$|\vec{a}_M| = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{0,55^2 + (-3,67)^2} = 3,71 \text{ м/с}^2.$$

$$\cos(\alpha) = a_{Mx} / |\vec{a}_M| = 0,55 / 3,71 = 0,15.$$

$$\alpha = \arccos(0,15) = 1,42 \text{ рад.} \approx 81^\circ.$$

Изобразим вектор ускорения на рисунке

