

Математика. 1 курс, 2
семестр

Лекция 6. Криволинейные интегралы

- *Криволинейные интегралы*

*1-го рода: основные
понятия, свойства и
методы вычисления*

- *Криволинейные интегралы*

*2-го рода: основные
понятия, свойства и
методы вычисления*

- *Формула Грина*

*• Независимость
криволинейных интегралов
2-го рода от пути
интегрирования*

- *Связь между КИ-1 и КИ-2*

*• Приложения криволинейных
интегралов*

Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы первого рода

1.1. Основные понятия

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла первого рода, рассмотрим следующую задачу. *Имеется кривая AB длиной l . Пусть на кривой AB непрерывным образом распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$. (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине.) Плотность $\rho(x, y)$ кривой AB в точке (x, y) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку). Требуется найти массу m кривой AB .*

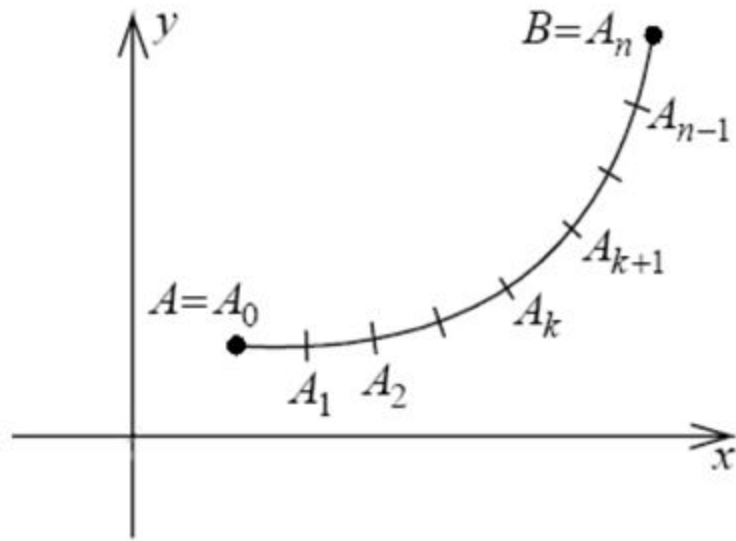


Рис. 1.

Разбиваем кривую АВ точками $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) длинами $\Delta l_0, \Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_k \dots \Delta l_{n-1}$. Полагаем $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k$. Предполагаем частичные дуги $A_k A_{k+1}$ столь малыми, что на дуге $A_k A_{k+1}$ плотность распределения массы ρ вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной $\rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$, где точка (\hat{x}_k, \hat{y}_k) любая, принадлежащая дуге $A_k A_{k+1}$.

Тогда масса Δm_k частичной дуги $A_k A_{k+1}$ кривой АВ будет приближенно выражаться формулой $\Delta m_k = \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k$. Масса m всей кривой АВ будет

выражаться приближенно суммой $m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k$.

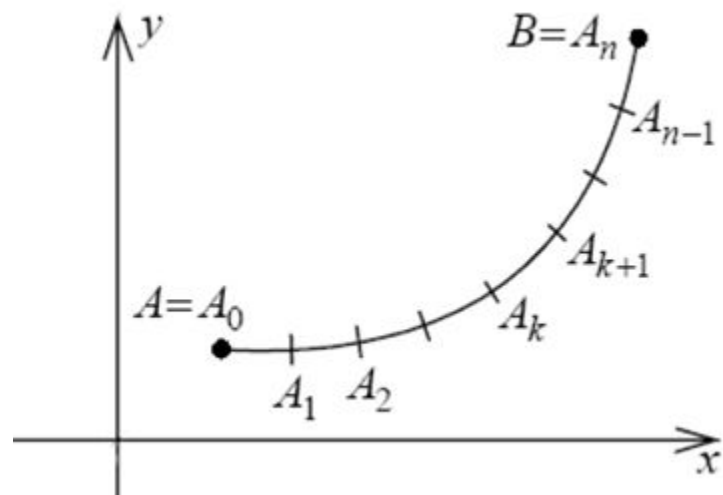
Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги $A_k A_{k+1}$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу $A_k A_{k+1}$ однородной.

Поэтому за массу m кривой АВ естественно принять

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k$$

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла первого рода.

Пусть на плоскости расположена спрямляемая кривая L длиной l , имеющая концы в точках A и B , и пусть во всех точках кривой определена функция $f(x, y)$.



1. Разобьем кривую AB точками $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) длинами Δl_k . Полагаем $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k$.

2. На каждой дуге $A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку (\hat{x}_k, \hat{y}_k) и вычисляем в ней значение функции f , т. е. находим $f(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги: $f(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k$, где ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k$,

эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по кривой AB .

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \rightarrow 0$, и ищем $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$.

Криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L называется конечный предел интегральной суммы $\sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k$, если он существует, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни

от выбора точек (\hat{x}_k, \hat{y}_k) :
$$\int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k) \Delta l_k.$$

Замечание 1. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла первого рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° масса m кривой АВ

определяется по формуле: $m = \int_{AB} \rho(x, y) dl$ (физический смысл криволинейного интеграла первого рода).

Замечание 2. Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой L :
$$\int_l f(x, y, z) dl.$$

Теорема (Условие существования криволинейного интеграла первого рода). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них.

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования: $\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl$.

2. Линейность: $\int_{AB} Cf(x, y)dl = C \int_{AB} f(x, y)dl$, где $C = \text{const}$.

3. Аддитивность: если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 , такие, что $L = L_1 \cup L_2$. При этом L_1 и L_2 имеют единственную общую точку, то $\int_L f(x, y)dl = \int_{L_1} f(x, y)dl + \int_{L_2} f(x, y)dl$.

4. Монотонность: если для точек кривой L выполнено неравенство $f(x, y) \leq g(x, y)$, то $\int_L f(x, y)dl \leq \int_L g(x, y)dl$.

5. Теорема о среднем: Если функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой AB длиной l , то на этой кривой AB найдется точка (x_0, y_0) такая, что

$$\int_{AB} f(x, y)dl = l \cdot f(x_0, y_0)$$

1.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая АВ задана параметрическим уравнением $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t , причем $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt .$$

Замечание. Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла первого рода от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой АВ, заданной параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]:$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt .$$

- ❖ Если кривая АВ **явно задана** уравнением $y=f(x)$, $x \in [a;b]$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, f(x)) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx .$$

- ❖ Если кривая АВ **задана полярно** уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$,

причем $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi .$$

Пример 1.

Вычислить $\int_L (x + y)dl$, где L - контур треугольника с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

$L=L_1 \cup L_2 \cup L_3$, где L_1 - отрезок AB , L_2 - отрезок BO , L_3 - отрезок OA ; по свойству аддитивности получаем:

$$\int_L f(x, y)dl = \int_{AB} f(x, y)dl + \int_{BO} f(x, y)dl + \int_{OA} f(x, y)dl.$$

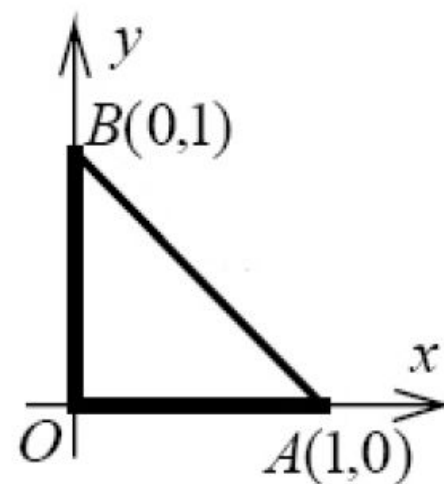


Рис.2

Решение.

1) Рассмотрим L_1 - отрезок AB : подставим координаты точек в уравнение: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 0}{1 - 0}$. Получаем уравнение прямой AB :

$y=1-x$, $x \in [0;1]$, $y' = -1$. Следовательно:

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_0^1 (x + 1 - x)\sqrt{1 + (-1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}x \Big|_0^1 = \sqrt{2};$$

2) Рассмотрим L_1 - отрезок ВО: уравнение прямой ВО: $x=0$, $y \in [0;1]$,
 $x' = 0$, следовательно:

$$\int_{BO} f(x, y) dl = \int_0^1 (x + y) \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_0^1 (0 + y) dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

3) Рассмотрим L_1 - отрезок ОА: уравнение прямой ОА: $y=0$, $x \in [0;1]$,
 $y' = 0$, следовательно:

$$\int_{OB} f(x, y) dl = \int_0^1 (x + y) \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 (x + 0) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\int_L f(x, y) dl = \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$

Пример 2. Вычислить $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl$, где L – дуга астроиды

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \varphi \\ y = a \sin^3 \varphi \end{cases}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right].$$

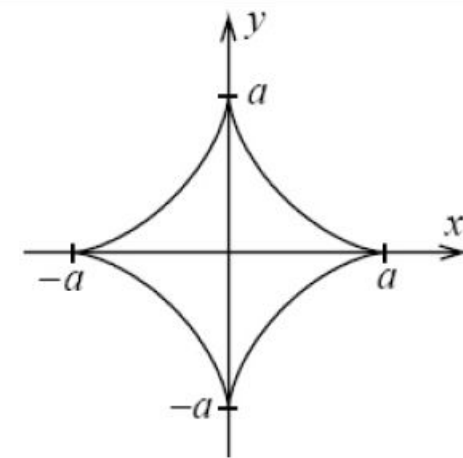


Рис.3

Решение. Имеем $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$;

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl &= \int_0^{2\pi} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3aa^{\frac{4}{3}} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t) dt = \frac{1}{2} a^{\frac{7}{3}} (-\cos^6 t + \sin^6 t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{2} a^{\frac{7}{3}} (2 + 2) = a^{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\int_L (x + y) dl$, где L – лепесток лемнискаты

$$r = \sqrt{\sin 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

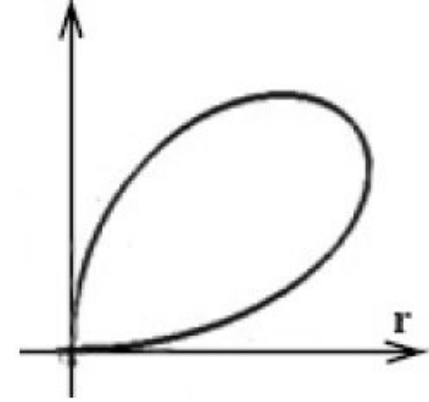


Рис.4

Решение. Имеем $r' = \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, $(r')^2 = \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ и $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$; Получаем

$$\int_L (x + y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \frac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = \left[\text{по условию } r = \sqrt{\sin 2\varphi} \right] = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \frac{1}{r} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = (-\sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.
\end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить $\int_L z dl$, где L – коническая

винтовая линия:
$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases}, t \in [0; t_0].$$

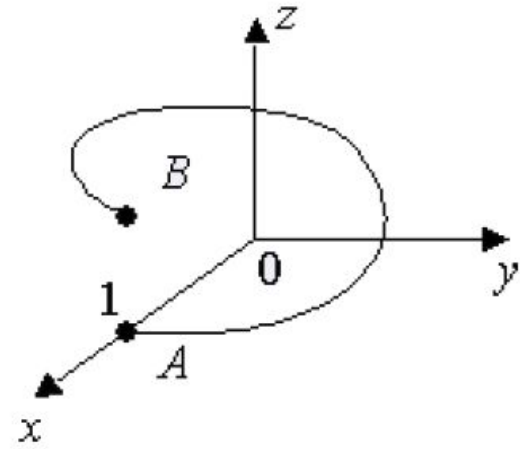


Рис. 5

Решение. Имеем $x'_t = \cos t - t \sin t$, $y'_t = \sin t + t \cos t$, $z'_t = 1$;

Получаем
$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{t_0} z \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt =$$
$$= \int_{\alpha}^{t_0} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1^2} dt = \int_{\alpha}^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt =$$
$$= \frac{1}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{2} ((2 + t_0)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Решите криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int_L \frac{ds}{x-y}, L:[AB] A(0;-2) B(4;0);$

2. $\int_L y^3 ds, L:[AB], A(0;1) B(-2;3);$

3. $\int_L y ds, L:y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi;$

4. $\int_L y ds, L:[AB], A(0;0) B(2;2), y^2 = 2x;$

5. $\int_L xy ds, L:ABCD, A(0;0) B(4;0) C(4;2) D(0;2);$

6. $\int_L (x+y) ds, L:\Delta ABC, A(0;0) B(1;0) C(0;1);$

§2. Криволинейные интегралы второго рода

2.1. Основные понятия.

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла второго рода, рассмотрим следующую задачу. Пусть в каждой точке кривой AB длиной l определена некоторая сила $\vec{F}(x, y)$, и под действием этой силы происходит перемещение точки по кривой AB от точки A до точки B . Необходимо определить работу, которую при этом выполняет сила поля.

Замечание. Если направление силы \vec{F} совпадает с направлением перемещения \vec{s} по прямой, то работа $A = F s$. Если перемещение происходит по прямой, не совпадающей с направлением силы \vec{F} , то работа равна скалярному произведению векторов $A = F s \cos \varphi = (\vec{F}, \vec{s})$.

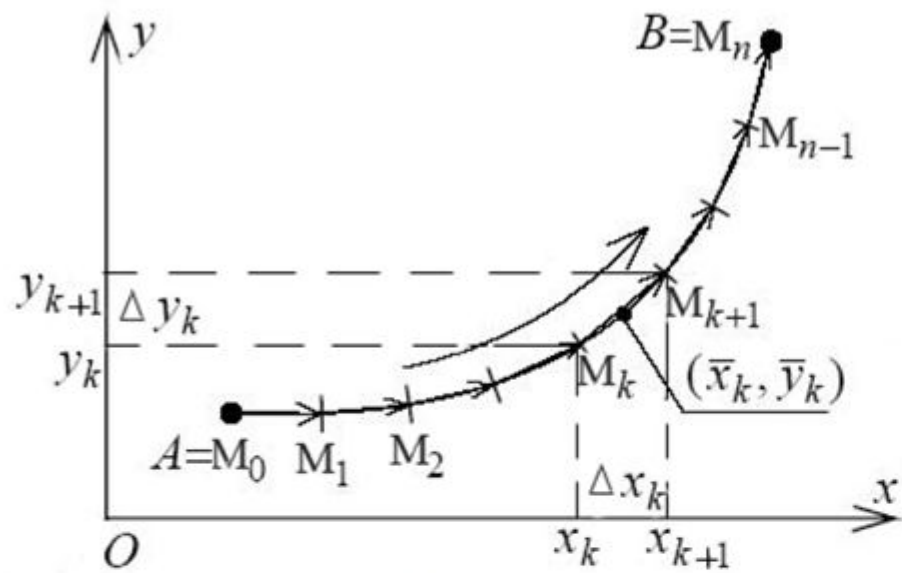


Рис.6

Разбиваем кривую АВ точками $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n=B$ произвольным образом на n частичных дуг $M_k M_{k+1}$ ($k=0,1,2, \dots, n-1$). Точки M_k следуют друг за другом вдоль кривой АВ в направлении от точки А к точке В.

Если частичные дуги $M_k M_{k+1}$ достаточно малы, то приближенно каждую из них можно заменить

отрезком стягивающим концы, и можно предположить, что в силу малости частичных дуг, значение \vec{F} в пределах частичной дуги остается постоянной и равной значению $\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ в одной из точек (\bar{x}_k, \bar{y}_k) этой частичной дуги $M_k M_{k+1}$

$$\Delta \vec{s}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}, \text{ где } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \text{ тогда}$$

$A_k = (\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \Delta \vec{s}_k)$ – работа, которую выполняет сила \vec{F} на частичной дуге $M_k M_{k+1}$.

Пусть $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$, где $P(x, y)$ проекция \vec{F} силы на ось Ox , где $Q(x, y)$ проекция \vec{F} силы на ось Oy .

Тогда $\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \vec{i} + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \vec{j}$,

$$A_k = (\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \Delta\vec{s}_k) = P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta y_k .$$

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} [P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta y_k],$$

для более точного значения надо уменьшать частичные дуги.

Получим формулу: $A_k = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} [P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta y_k]$.

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть в каждой точке кривой AB определена функция $P(x, y)$.

Проделаем следующие операции.

1. Разобьем кривую AB точками $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n=B$ произвольным образом на n частичных дуг $M_k M_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Точки M_k следуют друг за другом вдоль кривой AB в направлении от точки A к точке B .

2. На каждой дуге $M_k M_{k+1}$ выберем точку (\bar{x}_k, \bar{y}_k) и найдем значение функции в этой точке $P(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$.

3. Составим сумму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ -

проекция дуги $M_k M_{k+1}$ на ось Ox . Пусть $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$.

Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k$ называется интегральной суммой для функции $P(x, y)$ по координате x .

4. Измельчаем дробление так чтобы $\lambda \rightarrow 0$, и ищем $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$.

Криволинейным интегралом по координате x от функции $P(x, y)$ по кривой AB называется конечный предел интегральной суммы $\sum_{k=0}^{n-1} P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на от-

резки, ни от выбора точек (\bar{x}_k, \bar{y}_k) :
$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл от функции

$Q(x, y)$ по координате y :
$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta y_k,$$
 где

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ - проекция дуги $M_k M_{k+1}$ на ось Oy .

Криволинейным интегралом общего вида второго рода (по координатам) называется интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy .$$

Замечание 1. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла второго рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° работа, которую выполняет сила поля по кривой AB определяется по формуле:

$$A = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ (физический смысл криволинейного интеграла второго рода).}$$

Замечание 2 . Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой L :

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

Теорема (Условие существования криволинейного интеграла второго рода). Если кривая AB гладкая, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в каждой точке кривой AB , то криволинейный интеграл второго рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них.

Основные свойства криволинейного интеграла второго рода:

1. Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} = - \int_{BA} .$$

2. Если кривая AB точкой C разбита на части AC и CB , то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям:

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB} .$$

3. Если кривая AB - прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Ox .

Тогда $\int_{AB} P(x, y) dx = 0$. Если кривая

AB - прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и пер-

пендикулярный к оси Oy , тогда $\int_{AB} Q(x, y) dy = 0$.

Замечание 1. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L обозначается

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy .$$

Замечание 2. При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру положительным направлением считается такой обход контура, при котором область, ограниченная контуром, остается слева.

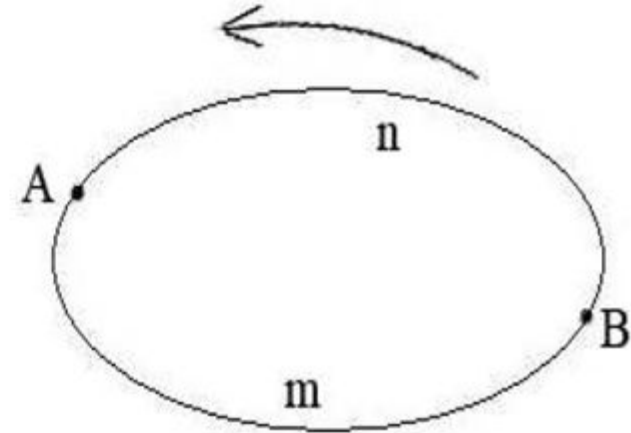


Рис.7

4. Если кривая AB - замкнутый контур, то криволинейный интеграл не зависит от выбора начальной точки на этом контуре, а зависит только от направления обхода:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{AmBnA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{BnAmB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

2.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

❖ Если кривая AB задана параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta], \quad \text{где } x(t) \text{ и } y(t) \text{ – непрерывно дифференцируе-}$$

мые функции параметра t , причем $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$, то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt .$$

Замечание. Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла первого рода от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой АВ,

заданной параметрическим уравнением:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta]:$$

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

- ❖ Если кривая АВ **явно задана** уравнением $y=f(x)$, $x \in [a; b]$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, и ее производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx .$$

Пример 1. Вычислить $\int_L xdy - ydx$, где L – окружность радиуса R с центром в начале координат, которая обходится против часовой стрелки.

Решение. Окружность имеет параметрические уравнения:
$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$$
 при $t \in [0; 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \int_L xdy - ydx &= \int_0^{2\pi} (R \cos t \cdot R \cos t - R \sin t \cdot (-R \sin t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy$, где L – отрезок от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$, по прямой AB.

Решение. Рассмотрим L- отрезок AB: подставим координаты точек в уравнение: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2}$. Получаем уравнение прямой AB: $y=2x$, $x \in [1;2]$. Т. к $dy = y'dx = 2dx$, то

$$\int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy = \int_1^2 (x \cdot 2x - 1)dx + x^2 2x \cdot 2dx =$$
$$\int_1^2 (2x^2 - 1 + 4x^3)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x + x^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{56}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\int_L (x + y)dx + 2zdy + xydz$, где L – линия задан-

ная уравнениями $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in [1; 2].$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_L (x + y)dx + 2zdy + xydz &= \int_1^2 (t + t^2)dt + 2(3 - t) \cdot 2tdt + t \cdot t^2 (-dt) = \\ &= \int_1^2 (t + t^2 + 12t - 4t^2 - t^3)dt = \int_1^2 (13t - 3t^2 - t^3)dt = \left(\frac{13}{2}t^2 - t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

2.3. Формула Остроградского-Грина

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода вида

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \text{ где } L \text{ - замкнутый самонепересекающийся контур,}$$

расположенный в плоскости Oxy .

Область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром, называется **односвязной**.

Если на контуре L выбрать какое-нибудь направление интегрирования, то оказывается безразличным, какую точку на L взять за начало (а значит, и конец) пути интегрирования (см. рис 7). При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру используют положительное направление.

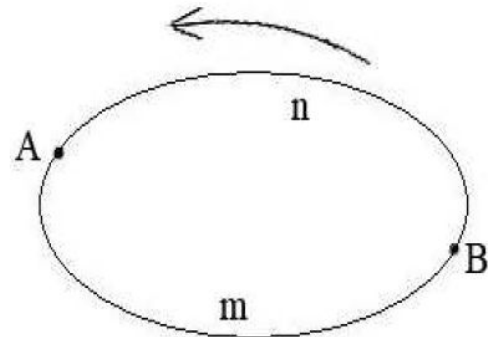


Рис.7

Теорема: Если кривая L - замкнутая граница области D , а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой области D (включая границу L), то справедлива формула Остроградского-Грина:

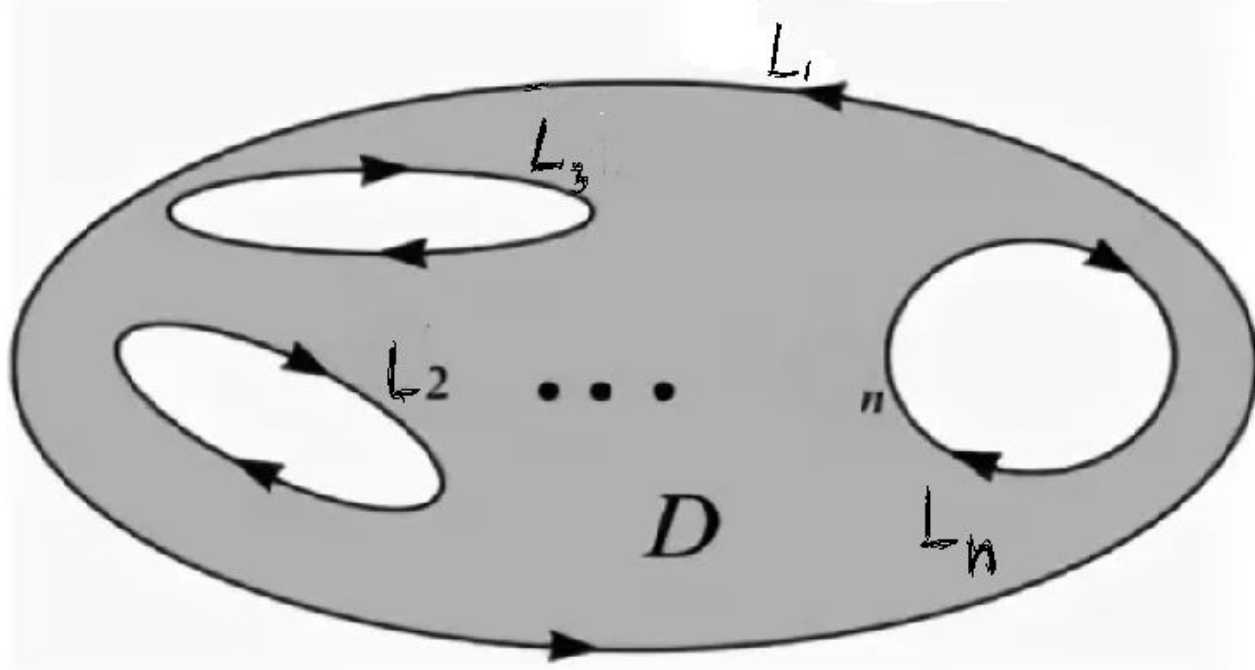
$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$
 Причем интегрирование производится вдоль кривой L в положительном направлении.

Область, ограниченная замкнутым самонепересекающимся контуром L_1 и $n - 1$ замкнутыми самонепересекающимися контурами L_2, L_3, \dots, L_n , лежащими внутри L_1 и вне друг друга, называется **n -связной** (рис.8).



Замечание 1. Формула справедлива и для области D , которую можно разбить параллельными прямыми вдоль оси Ox или оси Oy на конечное число областей.

Замечание 2. Формула справедлива и для многосвязной области, если под контуром L понимать объединение всех контуров L_1, L_2, \dots, L_n , ограничивающих область D , причем направление интегрирования такое, что наблюдатель, обходящий контур L в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной L , слева от себя.



Пример 1. . Вычислить $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, где L – контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

Решение. В данном интеграле $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = (x + y)^2$.

Следовательно $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y)$.

Таким образом, $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy =$

$\iint_D 2(x - y)dxdy$, где область D треугольник

ABC . Уравнение прямой AB : $y = x$. Уравнение BC : $y = 4 - x$, $x \in [1;2]$. Вычисляем двойной интеграл по данной области:

$$\iint_D 2(x - y)dxdy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x - y)dy = -\frac{4}{3}.$$

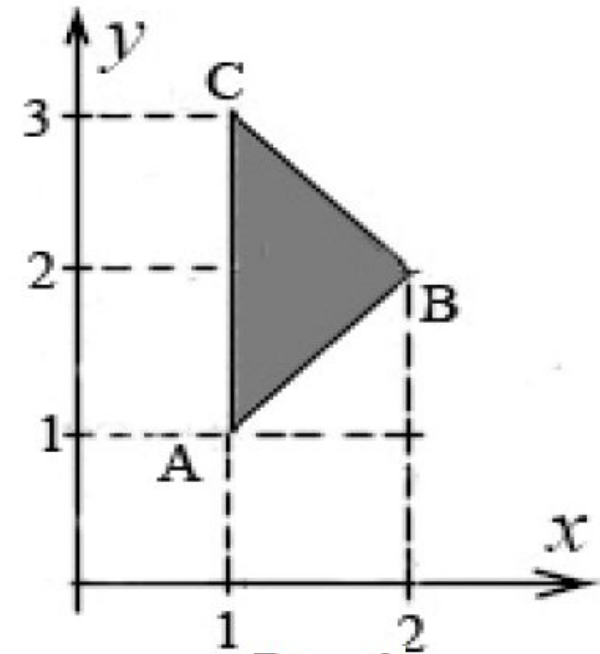


Рис.9

Пример 2. Вычислить $\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. В данном интеграле $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$,
 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$.

Таким образом, $\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

Введем полярные координаты: $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in [0; 2\pi]$.

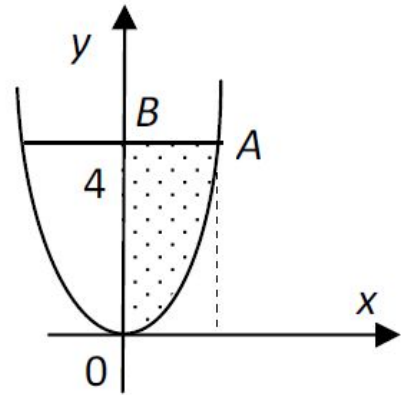
Тогда, $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 4^2 d\varphi = 8\pi$.

Пример 3. Вычислить $\oint_C (y + 2x)dx + 2(x + y)dy$, где C образован линиями

$$y = 4x^2, \quad y = 4, \quad x = 0:$$

а) непосредственно;

б) по формуле Остроградского-Грина.



Решение. а) Строим контур OAB (рис.10). Обход контура совершаем против часовой стрелки.

$$\oint_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = \frac{71}{3} - 5 - 16 = \frac{8}{3}.$$

Рис. 10

$$\begin{aligned} \int_{OA} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy &= \left| \begin{array}{l} y = 4x^2 \\ dy = 8xdx \end{array} \right| = \int_0^1 (4x^2 + 2x)dx + 2(x + 4x^2)8xdx = \\ &= \int_0^1 (64x^3 + 20x^2 + 2x)dx = \left(16x^4 + 20\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = 16 + \frac{20}{3} + 1 = \frac{71}{3}. \end{aligned}$$

$$\int_{AB} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ dy = 0 \end{array} \right| = \int_1^0 (4 + 2x)dx = \left. (4x + x^2) \right|_1^0 = -5.$$

$$\int_{BO} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ dx = 0 \end{array} \right| = \int_4^0 2ydy = y^2 \left. \right|_4^0 = -16.$$

б) Вычисляем по формуле Остроградского-Грина

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

$$P = y + 2x, \quad Q = 2(x + y) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = (y + 2x)'_y = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)'_x = 2.$$

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{4x^2}^4 dy = \int_0^1 dx \cdot y \Big|_{4x^2}^4 = \int_0^1 (4 - 4x^2) dx = \\ &= \left(4x - 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

2.4. Криволинейные интегралы второго рода, независимые от пути интегрирования

В некоторых случаях криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от того, каким образом линия интегрирования соединяет начальную A и конечную B точки плоскости. Важность этого свойства вытекает из его интерпретации как работы по перемещению материальной точки в силовом поле $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ вдоль кривой L . Поэтому независимость криволинейного интеграла от способа соединения начальной и конечной точек кривой интегрирования эквивалентна независимости работы в соответствующем силовом поле от пути материальной точки (силовое поле является потенциальным, т. е. в нем выполняется закон сохранения энергии).

Если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ односвязной области D можно соединить различными кривыми, и значение интегралов $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по всевозможным кривым AB одинаково, то криволинейный интеграл второго рода называется независимым от пути интегрирования и обозначается $\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Теорема (Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования). Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D , в которой функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Следствие 1. Если криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от пути интегрирования и точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — начальных и конечных точек кривой интегрирования, то подынтегральное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x, y)$ и справедлива формула:

$$\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} dU(x, y) = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1).$$

Следствие 2. Если подынтегральное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции, и L — замкнутый путь интегрирования, то $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла второго рода по пространственной кривой AB

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz : \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = dU(x, y, z),$$

$$\int_{(x_1; y_1; z_1)}^{(x_2; y_2; z_2)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Пример 3. Вычислить $\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

Решение.

$$P(x, y) = x^4 + 4xy^3, \quad Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y}. \text{ Значит этот интеграл не зави-}$$

сит от пути интегрирования. Выбираем в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Имеем на первом участке AC : $y = -1, x \in [-2; 3], dy = 0$. На втором участке CB : $x = 3, y \in [-1; 0], dx = 0$.

$$\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy = \int_{-2}^3 (x^4 - 4x)dx + \int_{-1}^0 (54y^2 - 5y^4)dy = 62.$$

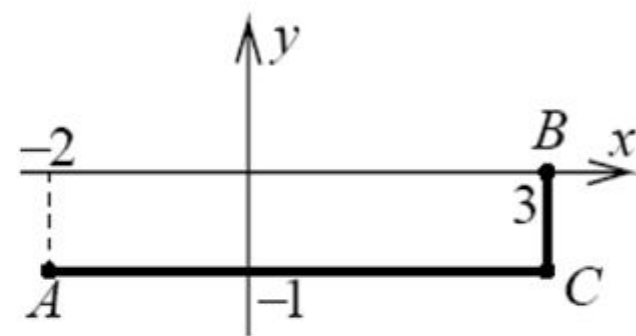


Рис. 11

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Решите криволинейные интегралы второго рода:

1. $\int_L \frac{x}{y} dx - \frac{y-x}{x} dy, L: y = x^2, A(2;4) B(1;1);$

2. $\int_L 2xy dx + x^2 dy, L: y = \frac{x^2}{4}, 0 \leq x \leq 2;$

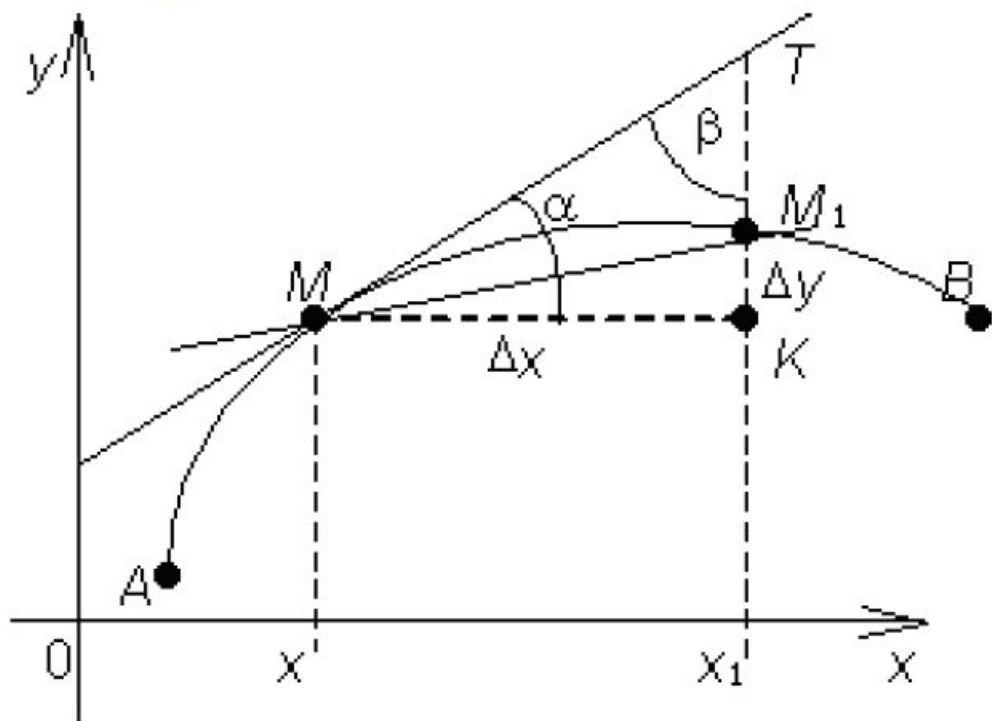
3. $\int_L \sqrt{x} dx + \sqrt{y} dy, L: [AB], A(0;0) B(1;1), y = \sqrt{x};$

4. $\int_L (x + 2y) dx + (y - x^2) dy, L: y = x^2 + 2x + 2, -1 \leq x \leq 0;$

5. $\int_L (x - y) dx + (y^2 + 1) dy, L: -1 \leq y \leq 0, x \geq y^2 - 1;$

§3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Для начала вспомним геометрический смысл производной



$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Это выражение - угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$. Пусть дуга AB линии L задана функцией $y = f(x)$, и в точке M к ней проведены касательная MT и секущая MM_1 (см. рис. 12).

Рис. 12

Теперь можно записать связь между двумя типами криволинейных интегралов: $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)dl$, где L - дуга AB и $\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$, где β - угол между касательной и осью Oy .

$$\text{Тогда } \int_L Pdx + Qdy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta)dl .$$

Подчеркнём, что угол α связан с тем направлением касательной, которое отвечает выбранному направлению дуги AB . Если изменить направление, криволинейный интеграл слева, а значит, и справа изменит знак на противоположный.

Для трёхмерного пространства запишем аналогичную формулу: $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)dl$, где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ - направляющие косинусы касательной в предположении, что её направление совпадает с направлением интегрирования.

§4. Некоторые приложения криволинейных интегралов

4.1. Приложения криволинейного интеграла первого рода

<i>Длина кривой AB</i> находится по формуле $L = \int_{AB} dl$, если кривая задана в		
в прямоугольных координатах уравнением		в полярных координатах уравнением
$y = f(x)$, то $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$	$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$	$r = r(\varphi)$, то $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$
$x = f(y)$, то $dl = \sqrt{1 + (x')^2} dy$	(описывается вектором) $\vec{r}[x(t); y(t); z(t)]$, то $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$	

Площадь цилиндрической поверхности

Поверхность $z = f(x, y)$, направляющая поверхности – кривая AB , образующая параллельна оси Oz .

$$S = \int_{AB} f(x, y) dl$$

Пример 1. Найти длину кардиоиды $\begin{cases} x = 2a \cos t - a \cos(2t), \\ y = 2a \sin t - a \sin(2t), \end{cases}$ где $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Прежде чем найти dl , найдем производные $x' = -2a \sin t + 2a \sin(2t)$, $y' = 2a \cos t - 2a \cos(2t)$.

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2a \sqrt{(\sin t - \sin(2t))^2 + (\cos t - \cos(2t))^2} dt = \\ &= 2a \sqrt{4 \left(\frac{1 - \cos t}{2} \right)} dt = 4a \sqrt{\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = 4a \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

$$L = \int_{AB} dl = 4a \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt = -8a \cos \left(\frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 16a \text{ (ед.)}.$$

Физические приложения криволинейного интеграла первого рода

1) Приведем в виде таблицы физические приложения криволинейного интеграла первого рода для материальной кривой AB (провод, цепь, трос, ...), имеющей в точке M плотность $\rho = \rho(M)$.

Вычислить	На плоскости $M(x, y)$	В пространстве $M(x, y, z)$
Массу кривой	$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl$	$m = \int_{AB} \rho(x, y, z) dl$
Статистические моменты	$M_x = \int_{AB} y \rho(x, y) dl$ $M_y = \int_{AB} x \rho(x, y) dl$	$M_x = \int_{AB} \rho(x, y, z) \sqrt{y^2 + z^2} dl$ $M_y = \int_{AB} \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + z^2} dl$ $M_z = \int_{AB} \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + y^2} dl$
Координаты центра масс	$x_0 = \frac{M_x}{m}, y_0 = \frac{M_y}{m}$	$x_0 = \frac{M_x}{m}, y_0 = \frac{M_y}{m}, z_0 = \frac{M_z}{m}$

Вычислить	На плоскости $M(x, y)$	В пространстве $M(x, y, z)$
Моменты инерции	относительно начала координат:	
	$I_O = \int_{AB} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dl$	$I_O = \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$
	относительно оси Ox :	
	$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x, y) dl$	$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$
	относительно оси Oy :	
	$I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x, y) dl$	$I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$

Вычислить	На плоскости $M(x, y)$	В пространстве $M(x, y, z)$
Моменты инерции первого порядка		$M_{yz} = \int_{AB} x\rho(x, y, z)dl,$ $M_{xz} = \int_{AB} y\rho(x, y, z)dl$ $M_{xy} = \int_{AB} z\rho(x, y, z)dl$
Координаты центра тяжести		$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}$
Сила притяжения точечной массы материальной кривой	$F = \gamma \cdot m_0 \int_{AB} \frac{\rho}{r^3} dl$, где γ - постоянная тяготения, m_0 - масса точки M , $r = \vec{r} $	
	$\vec{r} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$	$\vec{r} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

2) *Плоское установившееся течение несжимаемой жидкости* находится по формуле: $Q = \int_{AB} v dl$, где v – проекция скорости \vec{v} на нормаль к кривой AB .

Пример 2: Определить массу проволоки, имеющей форму отрезка от точки $A(0,0)$ до $B(4,3)$. Масса распределена вдоль отрезка плотностью $\rho = x - y$.

Решение. Уравнение прямой AB имеет вид: $y = \frac{3x}{4}$, $x \in [0;4]$, тогда

$$y' = \frac{3}{4};$$

$$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl = \int_{AB} (x - y) dl = \int_0^4 \left(x - \frac{3x}{4}\right) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \frac{5}{16} \int_0^4 x dx = \frac{5}{2}.$$

4.2. Приложения криволинейного интеграла второго рода

Геометрические приложения криволинейного интеграла второго рода. Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L , можно найти по формулам

$$S = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx,$$
 при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Объем тела, образованного вращением замкнутой кривой относительно оси Ox
Предположим, что область R расположена в верхней полуплоскости $y \geq 0$ и ограничена гладкой, кусочно-непрерывной и замкнутой кривой C , обход которой осуществляется против часовой стрелки.

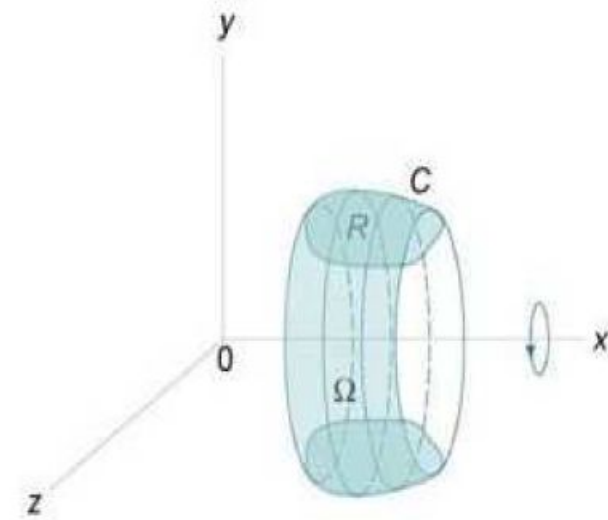


Рис. 15

В результате вращения области R вокруг оси Ox образуется тело Ω (рис. 15). Объем данного тела определяется формулами

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx = -2\pi \oint_C xy dy = -\frac{\pi}{2} \oint_C 2xy dy + y^2 dx$$

Физические приложения криволинейного интеграла второго рода

Вычислить	Дано	Формула
<i>Работу переменной силы</i>	Переменная сила $\vec{F}(P(x, y); Q(x, y))$, криволинейный участок AB	$A = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$
<i>Закон Ампера Магнитное поле</i>	Индукция магнитного поля \vec{B} вдоль замкнутого контура C , направление тока $d\vec{r}$ (рис. 20).	$\mu_0 I = \oint_C \vec{B} d\vec{r}$, где μ_0 магнитная проницаемость вакуума, равная $1,26 \times 10^{-6}$

Вычислить	Дано	Формула
<p style="text-align: center;"><i>Закон Фарадея Электродвижущую силу</i></p>	<p>Индукция магнитного поля \vec{E} вдоль замкнутого контура C, направление тока $d\vec{r}$ (рис. 21).</p>	$\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$

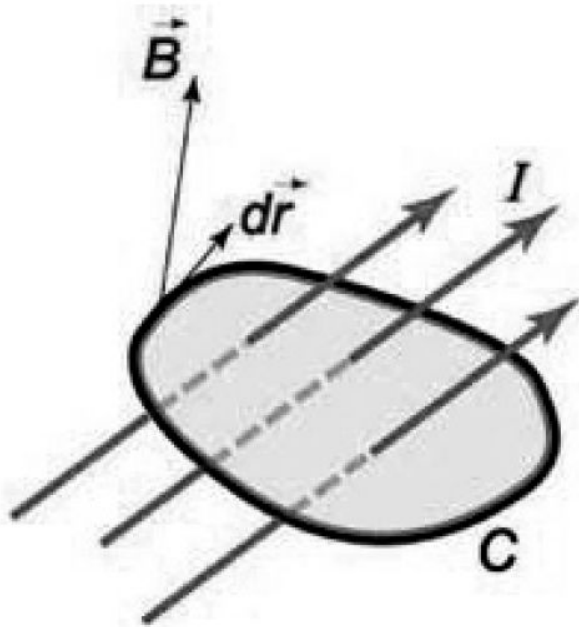


Рис. 20

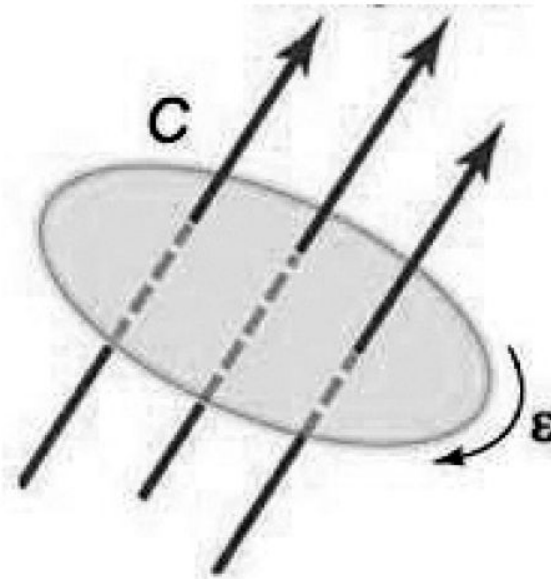


Рис. 21

Пример 4: Найти работу, совершаемую полем $\vec{F}(xy; x + y)$ при перемещении тела от начала координат $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по траектории L

а) L – отрезок прямой $y = x$;

б) L – линия заданная, уравнением $y = \sqrt{x}$.

Решение: а) Вычислим работу при перемещении вдоль прямой $y = x$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{AB} xy dx + (x + y) dy = \int_0^1 xx dx + (x + x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

┌

б) Определим теперь работу при перемещении вдоль кривой $y = \sqrt{x}$.

$$A = \int_{AB} xy dx + (x + y) dy = \int_0^1 x \sqrt{x} dx + (x + \sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} =$$

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{37}{30}.$$

Пример 1: Вычислить индукцию магнитного поля \vec{B} в вакууме на расстоянии r от оси бесконечно длинного проводника с током I .

Решение. Чтобы найти магнитное поле на расстоянии r от проводника, рассмотрим круговой контур радиуса r , расположенный перпендикулярно проводнику с током (рисунок 22). По-

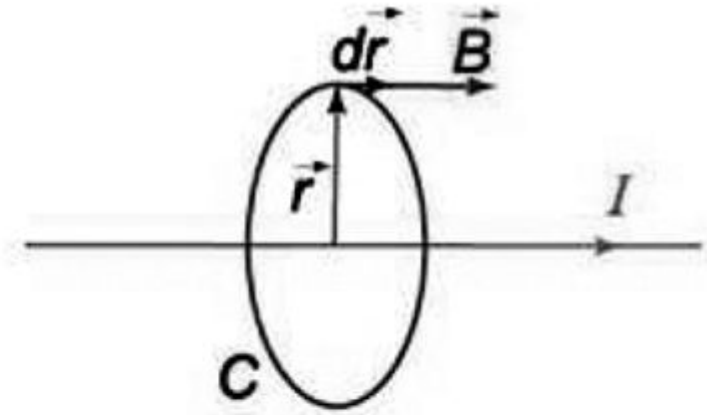


Рис. 22

скольку поле \vec{B} направлено по касательной к круговому контуру в любой его точке, то скалярное произведение векторов

$$\vec{B} \text{ и } d\vec{r} \text{ есть просто } B \cdot dr. \text{ Тогда можно записать: } \mu_0 I = \oint_C \vec{B} d\vec{r}$$

$$= \oint_C B dr = B \oint_C dr = B \cdot 2\pi r. \text{ В результате получаем } \mu_0 I = B \cdot 2\pi r,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Пример 2: Оценить значение электродвижущей силы \mathcal{E} и электрического поля E , возникающих в кольце радиусом 1 см у пассажира самолета, при полете самолета в магнитном поле Земли со скоростью 900 км/ч.

Решение. Согласно закону Фарадея $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$. С другой стороны, при за-

данных условиях $\mathcal{E} = 2rBv$, где v – скорость самолета, B – индукция магнитного поля Земли. Подставляя заданные величины $v = 900 \text{ км/ч} = 250 \text{ м/с}$,

$r = 1 \text{ см} = 0,01 \text{ м}$, $B = 5 \times 10^{-5} \text{ Т}$ находим значение электродвижущей силы:

$\mathcal{E} = 2rBv = 2 \cdot 0,01 \cdot 250 \cdot 5 \times 10^{-5} = 0,00025 \text{ В}$. Напряженность возникающего электрического поля найдем по формуле:

$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$. В силу симмет-

рии, наведенное электрическое поле будет иметь постоянную амплитуду в любой точке кольца. Оно будет направлено по касательной к кольцу в любой его точке. Это позволяет легко вычислить криволинейный интеграл.

$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} d\vec{r} = \oint_C E dr \cdot \cos 0 = E \oint_C dr = 2\pi r E$. Следовательно, напряженность

электрического поля равна $E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{0,00025}{2\pi \cdot 0,01} = 0,004 \text{ В/м.}$