Математика. 1 курс, 2 семестр

Лекция 6. Криволинейные интегралы

- ***Криволинейные интегралы 1-го рода: основные понятия, свойства и методы вычисления***
- ***Криволинейные интегралы 2-го рода: основные понятия, свойства и методы вычисления***
- ***Формула Грина***
- ***Независимость криволинейных интегралов 2-го рода от пути интегрирования***
- ***Связь между КИ-1 и КИ-2***
- ***Приложения криволинейных интегралов***

Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы первого рода

1.1. Основные понятия

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла первого рода, рассмотрим следующую задачу. *Имеется кривая AB длиной l. Пусть на кривой AB непрерывным образом распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$. (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине.) Плотность $\rho(x, y)$ кривой AB в точке (x, y) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку). Требуется найти массу m кривой AB.*

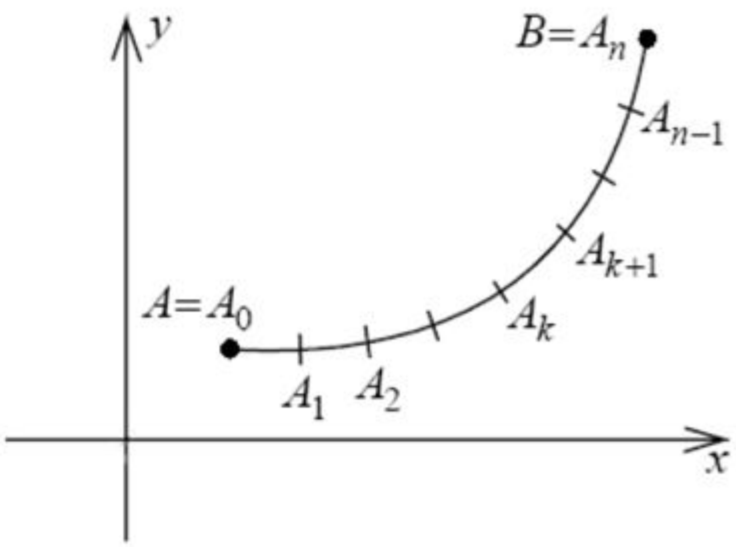


Рис.1.

Разбиваем кривую AB точками $A = A_0$, A_1, A_2, … , A_{n-1}, A_n $=B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k\,A_{k+1}$ ($k = 0,1,2, \ldots ,$ $n-1$) длинами $\Delta l_0,\ \Delta l_1,\ \Delta l_2,\ \ldots \Delta l_k \ldots \Delta l_{n-1}$. Полагаем $\lambda = \max\limits_{0\le k\le n-1} \Delta l_k$. Предполагаем частичные дуги $A_k\,A_{k+1}$ столь малыми, что на дуге $A_k\,A_{k+1}$ плотность распределения массы ρ вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной $\rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$, где точка $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$ любая, принадлежащая дуге $A_k\,A_{k+1}$.

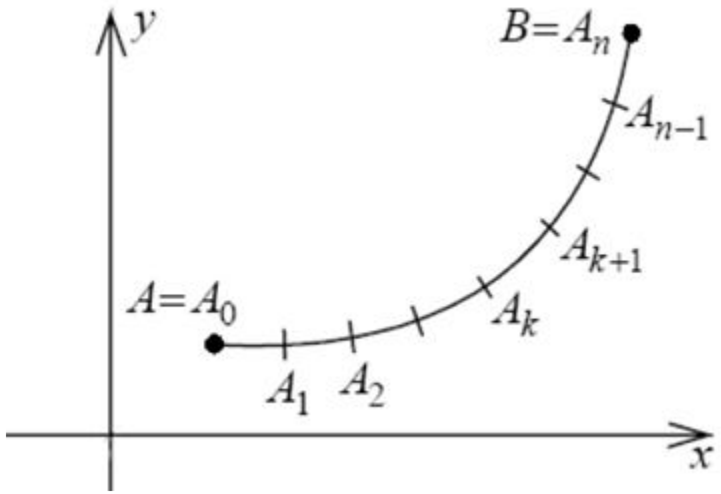
Тогда масса Δm_k частичной дуги $A_k\,A_{k+1}$ кривой AB будет приближенно выражаться формулой $\Delta m_k = \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\,\Delta l_k$. Масса m всей кривой AB будет выражаться приближенно суммой $m \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\,\Delta l_k$.

Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги $A_k A_{k+1}$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу $A_k A_{k+1}$ однородной.

Поэтому за массу m кривой AB естественно принять

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\, \Delta l_k$$

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть на плоскости расположена спрямляемая кривая L длиной l, имеющая концы в точках A и B, и пусть во всех точках кривой определена функция f(x, y).



1. Разобьем кривую AB точками $A = A_0$, A_1, A_2, … , A_{n-1}, $A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0,1,2, \ldots , n-1$) длинами Δl_k . Полагаем $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k$.

2.На каждой дуге $A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку ($\hat{x}_k , \hat{y}_k$) и вычисляем в ней значение функции f, т. е. находим $f(\hat{x}_k , \hat{y}_k)$.

3.Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги: $f(\hat{x}_k , \hat{y}_k)\Delta l_k$, где ($k = 0,1,2, \ldots , n-1$).

4.Складываем все такие произведения. Получаем сумму $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\hat{x}_k , \hat{y}_k)\Delta l_k$,

эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по кривой AB.

5.Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Криволинейным интегралом первого рода *от функции f по кривой L называется конечный предел интегральной суммы* $\sum_{k=0}^{n-1} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\,\Delta l_k$, *если он существует, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек* $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$: $\int_L f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{f}(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\,\Delta l_k$.

Замечание 1. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла первого рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° масса m кривой АВ

определяется по формуле: $m = \int_{AB} \rho(x,y)dl$ *(физический смысл криволинейного интеграла первого рода).*

Замечание 2 . Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой L: $\int_l f(x,y,z)dl$.

Теорема (Условие существования криволинейного интеграла первого рода). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна а каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл первого рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них.*

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования: $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl$.
2. Линейность: $\int\limits_{AB} Cf(x,y)dl = C\int\limits_{AB} f(x,y)dl$, где C=const.
3. Аддитивность: если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2, такие, что $L=L_1 \cup L_2$. При этом L_1 и L_2 имеют единственную общую точку, то $\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl$.
4. Монотонность: если для точек кривой L выполнено неравенство $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\int\limits_{L} f(x,y)dl \le \int\limits_{L} g(x,y)dl$.
5. Теорема о среднем: Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой AB длиной l, то на этой кривой AB найдется точка(x_0, y_0) такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = l \cdot f(x_0, y_0)$$

1.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая AB **задана параметрическим уравнением** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, где x(t) и y(t) – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

Замечание. Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла первого рода от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \; t \in [\alpha; \beta]:$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt \;.$$

- Если кривая AB **явно задана** уравнением y=f(x), $x \in [a;b]$, где f(x) – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x, f(x))\sqrt{1+(y'_x)^2}dx.$$

- Если кривая AB **задана полярно** уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, причем $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi.$$

Пример 1.

Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl$, где L - контур треугольника с вершинами в точках $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$.

$L=L_1\cup L_2\cup L_3$, где L_1- отрезок АВ, L_2- отрезок ВО, L_3- отрезок ОА; по свойству аддитивности получаем:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{AB} f(x,y)dl + \int\limits_{BO} f(x,y)dl + \int\limits_{OB} f(x,y)dl .$$

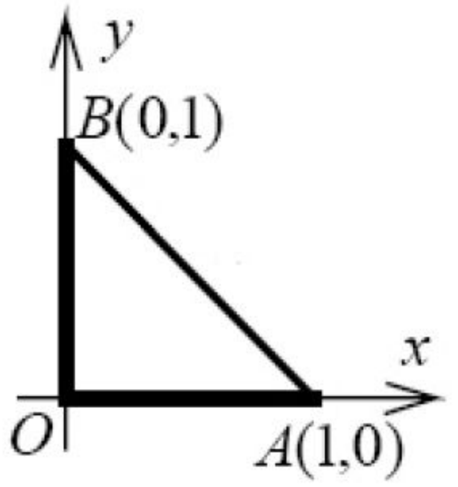


Рис.2

Решение.

1) Рассмотрим L_1- отрезок АВ: подставим координаты точек в уравнение: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, $\dfrac{x-1}{0-1}=\dfrac{y-0}{1-0}$. Получаем уравнение прямой АВ:

$y=1-x$, $x\in[0;1]$, $y'=-1$. Следовательно:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt{2}dx = \sqrt{2}x\Big|_0^1 = \sqrt{2} ;$$

2) Рассмотрим L_1- отрезок ВО: уравнение прямой ВО: x=0, $y \in [0;1]$, $x' = 0$, следовательно:

$$\int\limits_{BO} f(x,y)dl = \int\limits_0^1 (x+y)\sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int\limits_0^1 (0+y)dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2};$$

3) Рассмотрим L_1- отрезок ОА: уравнение прямой ОА: y=0, $x \in [0;1]$, $y' = 0$, следовательно:

$$\int\limits_{OB} f(x,y)dl = \int\limits_0^1 (x+y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int\limits_0^1 (x+0)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\int\limits_L f(x,y)dl = \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

<u>Пример</u> 2. Вычислить $\int\limits_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})dl$, где L – дуга астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3\varphi \\ y = a\sin^3\varphi \end{cases}, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

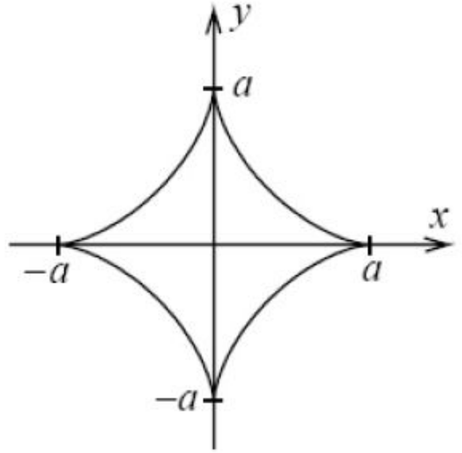


Рис.3

<u>Решение.</u> Имеем $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y_t = 3a\sin^2 t\cos t$;

Поэтому

$$\int\limits_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})dl = \int\limits_0^{2\pi} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt =$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3aa^{\frac{4}{3}}(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t)dt=\frac{1}{2}a^{\frac{7}{3}}(-\cos^6 t+\sin^6 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}a^{\frac{7}{3}}(2+2)=a^{\frac{7}{3}}.$$

<u>Пример</u> 3. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl$, где L –лепесток лемнискаты $r=\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

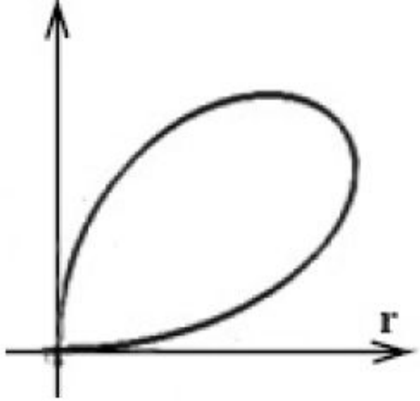


Рис.4

<u>Решение.</u> Имеем $r' = \dfrac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, $(r')^2 = \dfrac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ и $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$; Получаем

$$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi+r\sin\varphi)\sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi+r\sin\varphi)\frac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=\left[\text{ по условию } r=\sqrt{\sin 2\varphi}\ \right]=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi+r\sin\varphi)\frac{1}{r}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=(-\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_L z\,dl$, где L –коническая

винтовая линия: $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$, $t \in [0; t_0]$.

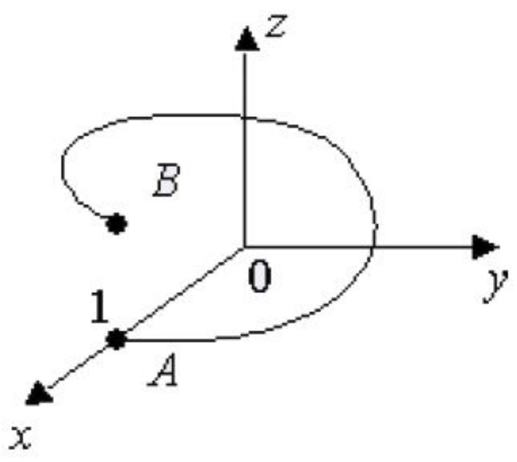


Рис. 5

Решение. Имеем $x'_t = \cos t - t\sin t$, $y'_t = \sin t + t\cos t$, $z'_t = 1$;

Получаем $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{t_0} z\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\,dt =$

$$= \int\limits_{\alpha}^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{t_0} t\sqrt{2 + t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{2}((2+t_0)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решите криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}, \ L:[AB] \ A(0;-2) \ B(4;0);$

2. $\int\limits_L y^3 ds, \ L:[AB], \ A(0;1) \ B(-2;3);$

3. $\int\limits_L y ds, \ L: y=\sin x, \ 0 \le x \le \pi;$

4. $\int\limits_L y ds, \ L:[AB], \ A(0;0) \ B(2;2), \ y^2=2x;$

5. $\int\limits_L xy ds, \ L: ABCD, \ A(0;0) \ B(4;0) \ C(4;2) \ D(0;2);$

6. $\int\limits_L (x+y) ds, \ L: \Delta ABC, \ A(0;0) \ B(1;0) \ C(0;1);$

§2. Криволинейные интегралы второго рода

2.1.Основные понятия.

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла второго рода, рассмотрим следующую задачу. *Пусть в каждой точки кривой AB длиной l определена некоторая сила* $\vec{F}(x,y)$, *и под действием этой силы происходит перемещение точки по кривой AB от точки A до точки B. Необходимо определить работу, которую при этом выполняет сила поля.*

Замечание. Если направление силы $\vec{F}$ совпадает с направлением перемещения $\vec{s}$ по прямой, то работа A= $F\ s$. Если перемещение происходит по прямой, не совпадающей с направление силы $\vec{F}$, то работа равна скалярному произведению векторов $A = Fs\cos\varphi = (\vec{F},\vec{s})$.

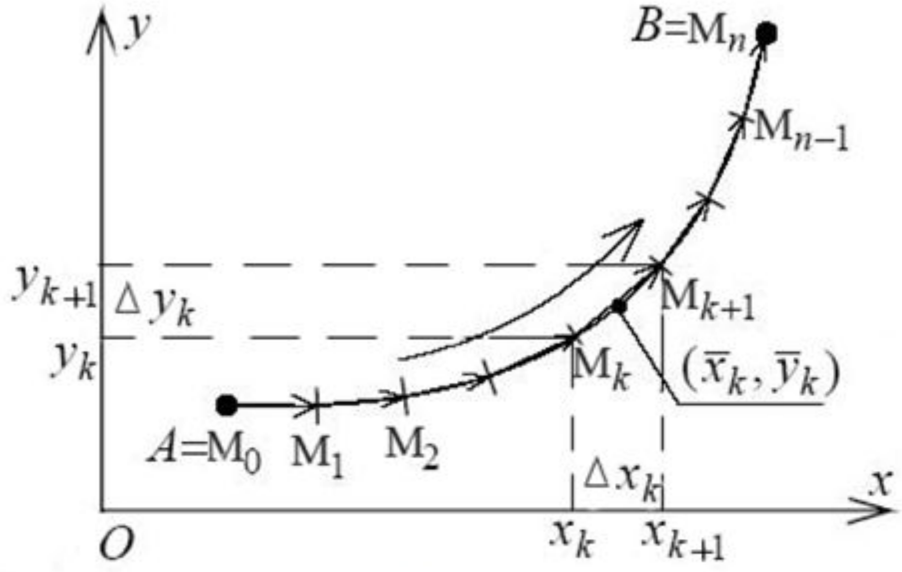


Рис.6

Разбиваем кривую AB точками $A=M_0$, M_1, M_2, … , M_{n-1}, $M_n=B$ произвольным образом на n частичных дуг $M_k M_{k+1}$ ($k=0,1,2,\dots,n-1$). Точки M_k следуют друг за другом вдоль кривой AB в направлении от точки A к точке B.

Если частичные дуги $M_k M_{k+1}$ достаточно малы, то приближенно каждую из них можно заменить отрезком стягивающим концы, и можно предположить, что в силу малости частичных дуг, значение $\vec{F}$ в пределах частичной дуги остается постоянной и равной значению $\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ в одной из точек $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ этой частичной дуги $M_k M_{k+1}$

$$\Delta\vec{s}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j},$$ где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, тогда

$A_k = (\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \Delta\vec{s}_k)$ – работа, которую выполняет сила $\vec{F}$ на частичной дуге $M_k M_{k+1}$.

Пусть $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\cdot\vec{i}+Q(x,y)\cdot\vec{j}$, где $P(x,y)$ проекция $\vec{F}$ силы на ось Ох, где $Q(x,y)$ проекция $\vec{F}$ силы на ось Оу.

Тогда $\vec{F}(\overline{x}_k,\overline{y}_k)=P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\vec{i}+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\vec{j}$,

$$A_k=(\vec{F}(\overline{x}_k,\overline{y}_k),\Delta\vec{s}_k)=P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\Delta x_k+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\Delta y_k \ .$$

$$A\approx\sum_{k=0}^{n-1}\left[P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\Delta x_k+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\Delta y_k\right],$$

для более точного значения надо уменьшать частичные дуги.

Получим формулу: $A_k=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\Delta x_k+Q(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\cdot\Delta y_k\right].$

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть в каждой точке кривой AB определена функция $P(x, y)$. Проделаем следующие операции.

1. Разобьем кривую AB точками $A=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n=B$ произвольным образом на n частичных дуг $M_k M_{k+1}$ ($k = 0,1,2, \ldots , n-1$). Точки M_k следуют друг за другом вдоль кривой AB в направлении от точки A к точке B.

2. На каждой дуге $M_k M_{k+1}$ выберем точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ и найдем значение функции в этой точке $P(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$.

3. Составим сумму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \cdot \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ - проекция дуги $M_k M_{k+1}$ на ось Ox. Пусть $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$.

Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} P(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \cdot \Delta x_k$ *называется интегральной суммой для функции* $P(x, y)$ *по координате x.*

4. Измельчаем дробление так чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Криволинейным интегралом по координате *x* *от функции* $P(x, y)$ *по кривой AB называется конечный предел интегральной суммы* $\sum_{k=0}^{n-1} P(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \cdot \Delta x_k$, *не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек* $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$: $\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \cdot \Delta x_k$.

Аналогично определяется криволинейный интеграл от функции $Q(x, y)$ по координате y: $\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Q(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \cdot \Delta y_k$, где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ - проекция дуги $M_k M_{k+1}$ на ось Oy.

Криволинейным интегралом общего вида второго рода (по координатам) *называется интеграл*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy\,.$$

Замечание 1. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла второго рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° работа, которую выполняет сила поля по кривой AB определяется по формуле: $A = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *(физический смысл криволинейного интеграла второго рода).*

Замечание 2 **.** Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой L:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,.$$

Теорема (Условие существования криволинейного интеграла второго рода). *Если кривая AB гладкая, а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны в каждой точке кривой AB, то криволинейный интеграл второго рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения на части, ни от выбора точек на них.*

Основные свойства криволинейного интеграла второго рода:

1. Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления пути интегрирования: $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$.
2. Если кривая AB точкой C разбита на части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям: $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$.
3. Если кривая AB - прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Ox. Тогда $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ =0. Если кривая AB - прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Оу, тогда $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ =0.

Замечание 1. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L обозначается $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Замечание 2. При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру положительным направлением считается такой обход контура, при котором область, ограниченная контуром, остается слева.

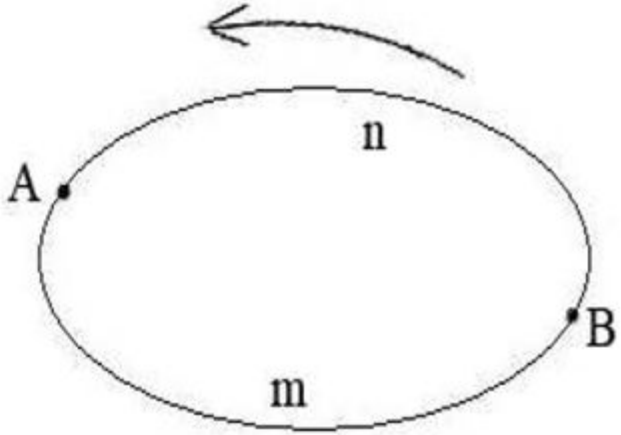


Рис.7

4. Если кривая AB - замкнутый контур, то криволинейный интеграл не зависит от выбора начальной точки на этом контуре, а зависит только от направления обхода:

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint\limits_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$\oint\limits_{BnAmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

❖ Если кривая AB **задана параметрическим уравнением** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

Замечание. Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла первого рода от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическим уравнением: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt$$

❖ Если кривая АВ **явно задана** уравнением y=f(x), $x \in [a;b]$, где f(x) – непрерывно дифференцируемая функция, и ее производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x))dx \, .$$

Пример 1. . Вычислить $\int\limits_L xdy - ydx$, где L – окружность радиуса R с центром в начале координат, которая обходится против часовой стрелки.

Решение. Окружность имеет параметрические уравнения: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, при $t \in [0;2\pi]$.

$$\int\limits_L xdy - ydx = \int\limits_0^{2\pi} (R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t))dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)dt == \int\limits_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy$, где L – отрезок от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$, по прямой AB.

Решение. Рассмотрим L- отрезок AB: подставим координаты точек в уравнение: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-2}{4-2}$. Получаем уравнение прямой AB: $y=2x$, $x \in [1;2]$. Т. к $dy = y'dx = 2dx$, то

$$\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy = \int\limits_1^2 (x \cdot 2x - 1)dx + x^2 2x \cdot 2dx =$$

$$\int\limits_1^2 (2x^2 - 1 + 4x^3)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x + x^4\right)\Bigg|_1^2 = \frac{56}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dx + 2zdy + xydz$, где L – линия заданная уравнениями $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in [1;2]$.

Решение.

$$\int\limits_L (x+y)dx + 2zdy + xydz = \int\limits_1^2 (t+t^2)dt + 2(3-t)\cdot 2tdt + t\cdot t^2(-dt) =$$

$$= \int\limits_1^2 (t + t^2 + 12t - 4t^2 - t^3)dt = \int\limits_1^2 (13t - 3t^2 - t^3)dt = \left(\frac{13}{2}t^2 - t^3 - \frac{1}{4}t^4\right)\Big|_1^2 = \frac{35}{4}$$

2.3. Формула Остроградского-Грина

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода вида $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где L -замкнутый самонепересекающийся контур, расположенный в плоскости Oxy.

Область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром, называется **односвязной**.

Если на контуре L выбрать какое-нибудь направление интегрирования, то оказывается безразличным, какую точку на L взять за начало (а значит, и конец) пути интегрирования (см. рис 7). При вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру используют положительное направление.

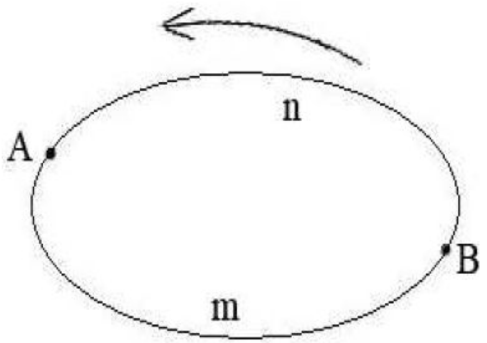


Рис.7

Теорема: *Если кривая L- замкнутая граница области D, а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *в замкнутой области D (включая границу L), то справедлива* ***формула Остроградского-Грина****:*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

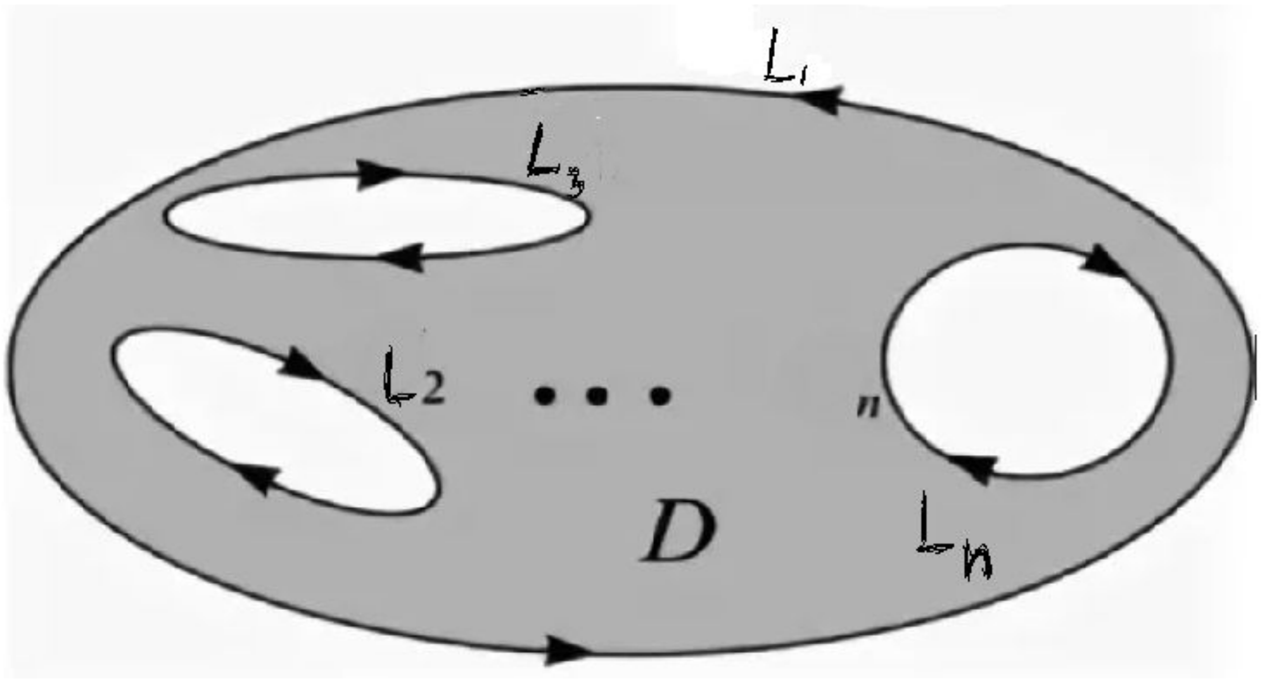
. Причем интегрирование производится вдоль кривой L в положительном направлении.

Область, ограниченная замкнутым самонепересекающимся контуром L_1 и $n-1$ замкнутыми самонепересекающимися контурами L_2, L_3, …, L_n, лежащими внутри L_1 и вне друг друга, называется ***n* –связной** (рис.8) .

рис.8

Замечание 1. Формула справедлива и для области D, которую можно разбить параллельными прямыми вдоль оси Ox или оси Oy на конечное число областей.

Замечание 2. Формула справедлива и для многосвязной области, если под контуром L понимать объединение всех контуров L_1, L_2, … , L_n, ограничивающих область D, причем направление интегрирования такое, что наблюдатель, обходящий контур L в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной L, слева от себя.



Пример 1. . Вычислить $\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, где L – контур треугольника с вершинами A(1,1), B(2,2), C(1,3), пробегаемый против часовой стрелки.

Решение. В данном интеграле $P(x,y)=2(x^2+y^2)$, $Q(x,y)=(x+y)^2$.

Следовательно $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)-4y=2(x-y)$.

Таким образом, $\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$ = $\iint\limits_D 2(x-y)dxdy$, где область D треугольник ABC. Уравнение прямой AB: $y=x$. Уравнение BC: $y=4-x$, $x\in[1;2]$. Вычисляем двойной интеграл по данной области:

$$\iint\limits_D 2(x-y)dxdy=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{-x+4}(x-y)dy=-\frac{4}{3}.$$

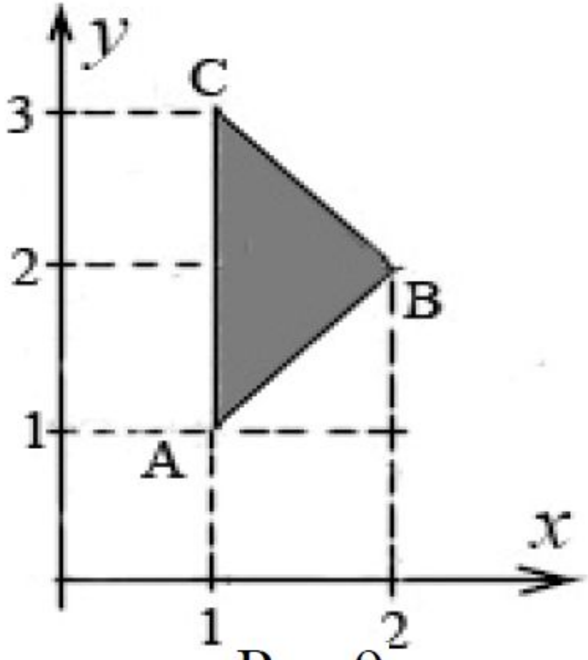


Рис.9

Пример 2. Вычислить $\oint_L xy^2dy - yx^2dx$, где L – окружность $x^2+y^2=4$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. В данном интеграле $P(x,y)=-x^2y$, $Q(x,y)=xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$.

Таким образом, $\oint_L xy^2dy - yx^2dx = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$.

Введем полярные координаты: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0;2\pi]$.

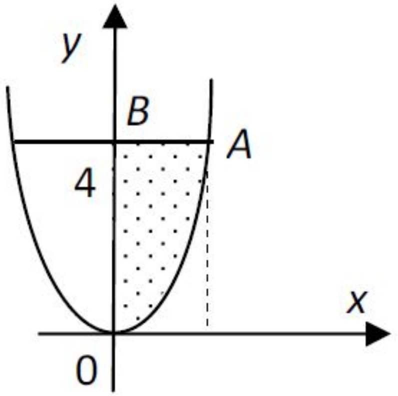
Тогда, $\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_D r^2 rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2dr = \frac{1}{4}\int_0^1 4^2 d\varphi = 8\pi$.

Пример 3. Вычислить $\oint\limits_C (y+2x)dx + 2(x+y)dy$, где C образован линиями

$y = 4x^2$, $y = 4$, $x = 0$:

а) непосредственно;

б) по формуле Остроградского-Грина.



Решение. а) Строим контур OAB (рис.10). Обход контура совершаем против часовой стрелки.

$$\oint\limits_C = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO} = \frac{71}{3} - 5 - 16 = \frac{8}{3}.$$

Рис. 10

$$\int\limits_{OA} (y+2x)dx + 2(x+y)dy = \begin{vmatrix} y = 4x^2 \\ dy = 8xdx \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 \left(4x^2 + 2x\right)dx + 2\left(x + 4x^2\right)8xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(64x^3 + 20x^2 + 2x\right)dx = \left(16x^4 + 20\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = 16 + \frac{20}{3} + 1 = \frac{71}{3}.$$

$$\int\limits_{AB}(y+2x)dx+2(x+y)dy=\begin{vmatrix}y=4\\dy=0\end{vmatrix}=\int\limits_{1}^{0}(4+2x)dx=\left(4x+x^{2}\right)\Big|_{1}^{0}=-5.$$

$$\int\limits_{BO}(y+2x)dx+2(x+y)dy=\begin{vmatrix}x=0\\dx=0\end{vmatrix}=\int\limits_{4}^{0}2ydy=y^{2}\Big|_{4}^{0}=-16.$$

б) Вычисляем по формуле Остроградского-Грина $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$.

$P = y + 2x$, $Q = 2(x + y) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = (y + 2x)'_x = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)'_y = 2$.

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D dxdy = \int_0^1 dx \int_{4x^2}^4 dy = \int_0^1 dx \cdot y \Big|_{4x^2}^4 = \int_0^1 \left(4 - 4x^2\right) dx =$$

$$= \left(4x - 4\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

2.4. Криволинейные интегралы второго рода, независимые от пути интегрирования

В некоторых случаях криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от того, каким образом линия интегрирования соединяет начальную A и конечную B точки плоскости. Важность этого свойства вытекает из его интерпретации как работы по перемещению материальной точки в силовом поле $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ вдоль кривой L. Поэтому независимость криволинейного интеграла от способа соединения начальной и конечной точек кривой интегрирования эквивалентна независимости работы в соответствующем силовом поле от пути материальной точки (силовое поле является потенциальным, т. е. в нем выполняется закон сохранения энергии).

Если точки $A(x_1;y_1)$ *и* $B(x_2;y_2)$ *односвязной области D можно соединить различными кривыми, и значение интегралов* $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *по всевозможным кривым AB одинаково, то* ***криволинейный интеграл второго рода*** *называется* ***независимым от пути интегрирования*** *и обозначается* $\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Теорема (Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования). *Для того чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial P}{\partial y}$, *необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Следствие 1. *Если криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *не зависит от пути интегрирования и точек* $A(x_1;y_1)$ *и* $B(x_2;y_2)$ *– начальных и конечных точек кривой интегрирования, то подынтегральное выражение* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *является полным дифференциалом некоторой функции* $U = U(x,y)$ *и справедлива формула:*

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} dU(x,y) = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1).$$

Следствие 2. *Если подынтегральное выражение* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *является полным дифференциалом некоторой функции, и* L *- замкнутый путь интегрирования, то* $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла второго рода по пространственной кривой AB

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz: \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z),$$

$$\int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1).$$

Пример 3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

Решение.

$P(x,y)=x^4+4xy^3$, $\qquad Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Значит этот интеграл не зависит от пути интегрирования. Выбираем в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Имеем на первом участке AC: $y=-1$, $x\in[-2;3]$, $dy=0$. На втором участке CB: $x=3$, $y\in[-1;0]$, $dx=0$.

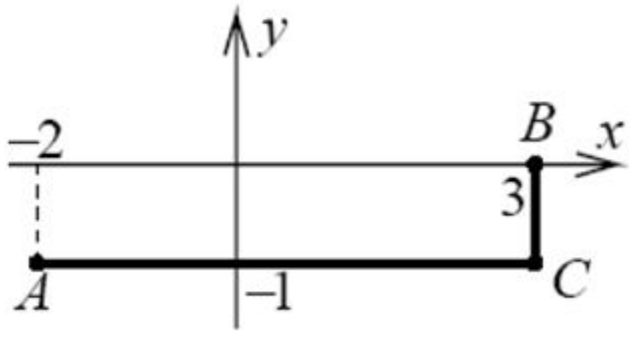


Рис. 11

$$\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=\int\limits_{-2}^{3}(x^4-4x)dx+\int\limits_{-1}^{0}(54y^2-5y^4)dx=62.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ .

Решите криволинейные интегралы второго рода:

1. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx - \frac{y-x}{x}dy,\ L: y = x^2,\ A(2;4)\ B(1;1);$

2. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy,\ L: y = \frac{x^2}{4},\ 0 \le x \le 2;$

3. $\int\limits_L \sqrt{x}dx + \sqrt{y}dy,\ L: [AB],\ A(0;0)\ B(1;1),\ y = \sqrt{x}\ ;$

4. $\int\limits_L (x+2y)dx + (y - x^2)dy,\ L: y = x^2 + 2x + 2,\ -1 \le x \le 0;$

5. $\int\limits_L (x-y)dx + (y^2+1)dy,\ L: -1 \le y \le 0,\ x \ge y^2 - 1;$

§3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Для начала вспомним геометрический смысл производной

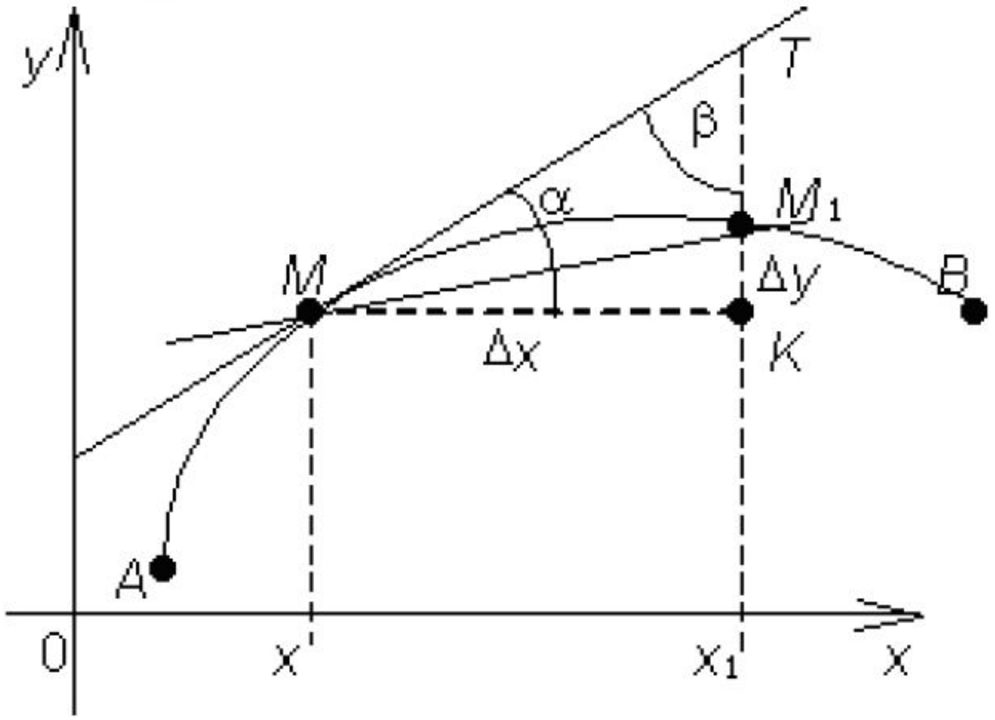


Рис. 12

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Это выражение - угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$. Пусть дуга AB линии L задана функцией $y = f(x)$, и в точке M к ней проведены касательная MT и секущая MM_1 (см. рис. 12).

Теперь можно записать связь между двумя типами криволинейных интегралов: $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl$, где L - дуга AB и $\sin\alpha = \sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$, где β - угол между касательной и осью Oy.

Тогда $\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$.

Подчеркнём, что угол α связан с тем направлением касательной, которое отвечает выбранному направлению дуги AB. Если изменить направление, криволинейный интеграл слева, а значит, и справа изменит знак на противоположный.

Для трёхмерного пространства запишем аналогичную формулу: $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы касательной в предположении, что её направление совпадает с направлением интегрирования.

§4. Некоторые приложения криволинейных интегралов

4.1.Приложения криволинейного интеграла первого рода

<table>
<tr><td colspan="3">Длина кривой AB находится по формуле $L=\int\limits_{AB} dl$, если кривая задана в</td></tr>
<tr><td colspan="2">в прямоугольных координатах уравнением</td><td>в полярных координатах уравнением</td></tr>
<tr><td>$y=f(x)$, то
$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$</td><td>$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ то
$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$</td><td rowspan="2">$r=r(\varphi)$, то
$dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$</td></tr>
<tr><td>$x=f(y)$, то
$dl=\sqrt{1+(x')^2}\,dy$</td><td>(описывается вектором)
$\vec{r}\left[x(t);y(t);z(t)\right]$, то
$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt$</td></tr>
</table>

Площадь цилиндрической поверхности	
Поверхность $z = f(x,y)$, направляющая поверхности – кривая AB, образующая параллельна оси Oz.	$S = \int\limits_{AB} f(x,y)dl$

<u>Пример 1.</u> Найти длину кардиоиды $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos(2t), \\ y = 2a\sin t - a\sin(2t), \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi$.

<u>Решение.</u> Прежде чем найти *dl*, найдем производные $x' = -2a\sin t + 2a\sin(2t)$, $y' = 2a\cos t - 2a\cos(2t)$.

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = 2a\sqrt{(\sin t - \sin(2t))^2 + (\cos t - \cos(2t))^2}\,dt =$$

$$= 2a\sqrt{4\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)}dt = 4a\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

$$L = \int\limits_{AB} dl = 4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -8a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 16a\ (ед.).$$

Физические приложения криволинейного интеграла первого рода

1) Приведем в виде таблицы физические приложения криволинейного интеграла первого рода для материальной кривой AB (провод, цепь, трос, …), имеющей в точке M плотность $\rho = \rho(M)$.

Вычислить	На плоскости $M(x,y)$	В пространстве $M(x,y,z)$
Массу кривой	$m = \int\limits_{AB} \rho(x,y)dl$	$m = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)dl$
Статистические моменты	$M_x = \int\limits_{AB} y\rho(x,y)dl$ $M_y = \int\limits_{AB} x\rho(x,y)dl$	$M_x = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\sqrt{y^2+z^2}dl$ $M_y = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\sqrt{x^2+z^2}dl$ $M_z = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2}dl$
Координаты центра масс	$x_0 = \frac{M_x}{m},\ y_0 = \frac{M_y}{m}.$	$x_0 = \frac{M_x}{m},\ y_0 = \frac{M_y}{m},\ z_0 = \frac{M_z}{m}.$

<table>
<tr><th>Вычислить</th><th>На плоскости $M(x,y)$</th><th>В пространстве $M(x,y,z)$</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Моменты инерции</td><td colspan="2">относительно начала координат:</td></tr>
<tr><td>$I_O = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2)\rho(x,y)dl$</td><td>$I_O = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dl$</td></tr>
<tr><td colspan="2">относительно оси Ox:</td></tr>
<tr><td>$I_x = \int\limits_{AB} y^2\rho(x,y)dl$</td><td>$I_x = \int\limits_{AB} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dl$</td></tr>
<tr><td colspan="2">относительно оси Oy:</td></tr>
<tr><td>$I_y = \int\limits_{AB} x^2\rho(x,y)dl$</td><td>$I_y = \int\limits_{AB} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dl$</td></tr>
<tr><td></td><td>относительно оси Oz:
$I_z = \int\limits_{AB} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dl$</td></tr>
</table>

Вычислить	На плоскости $M(x,y)$	В пространстве $M(x,y,z)$
Моменты инерции первого порядка		$M_{yz} = \int\limits_{AB} x\rho(x,y,z)dl,$ $M_{xz} = \int\limits_{AB} y\rho(x,y,z)dl$ $M_{xy} = \int\limits_{AB} z\rho(x,y,z)dl$
Координаты центра тяжести		$x_c = \frac{M_{yz}}{m},\ y_c = \frac{M_{xz}}{m},\ z_c = \frac{M_{xy}}{m}$
Сила притяжения точечной массы материальной кривой	$F = \gamma \cdot m_0 \int\limits_{AB} \frac{\rho}{r^3} dl$,где γ - постоянная тяготения, m_0 - масса точки M , $r = \lvert\vec{r}\rvert$	
	$\vec{r} = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$	$\vec{r} = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$

2) *Плоское установившееся течение несжимаемой жидкости* находится по формуле: $Q = \int\limits_{AB} v\,dl$, где v – проекция скорости $\vec{v}$ на нормаль к кривой AB.

<u>**Пример 2:**</u> Определить массу проволоки, имеющей форму отрезка от точки A(0,0) до B(4,3). Масса распределена вдоль отрезка плотностью $\rho = x - y$.

<u>**Решение.**</u> Уравнение прямой *AB* имеет вид: $y = \dfrac{3x}{4}$, $x \in [0;4]$, тогда

$y' = \dfrac{3}{4}$;

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x, y)dl = \int\limits_{AB} (x - y)dl = \int\limits_{0}^{4} (x - \frac{3x}{4})\sqrt{1 + \frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int\limits_{0}^{4} xdx = \frac{5}{2}.$$

4.2.Приложения криволинейного интеграла второго рода

Геометрические приложения криволинейного интеграла второго рода. *Площадь* S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формулам $S = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$, при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Объем тела, образованного вращением замкнутой кривой относительно оси Оx Предположим, что область R расположена в верхней полуплоскости $y \geq 0$ и ограничена гладкой, кусочно-непрерывной и замкнутой кривой С, обход которой осуществляется против часовой стрелки.

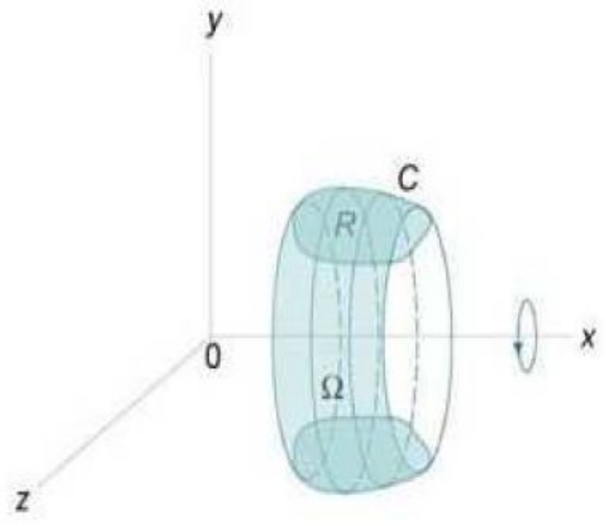


Рис. 15

В результате вращения области R вокруг оси Ox образуется тело Ω (рис. 15). Объем данного тела определяется формулами

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx = -2\pi \oint_C xydy = -\frac{\pi}{2} \oint_C 2xydy + y^2 dx$$

Физические приложения криволинейного интеграла второго рода

Вычислить	Дано	Формула
Работу переменной силы	Переменная сила $\vec{F}(P(x,y);Q(x,y))$, криволинейный участок AB	$A = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
Закон Ампера Магнитное поле	Индукция магнитного поля $\vec{B}$ вдоль замкнутого контура C, направление тока $d\vec{r}$ (рис. 20).	$\mu_0 I = \oint_C \vec{B} d\vec{r}$, где μ_0 магнитная проницаемость вакуума, равная $1{,}26 \times 10^{-6}$

Вычислить	Дано	Формула
Закон Фарадея Электродвижущую силу	Индукция магнитного поля $\vec{E}$ вдоль замкнутого контура C, направление тока $d\vec{r}$ (рис. 21).	$\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$

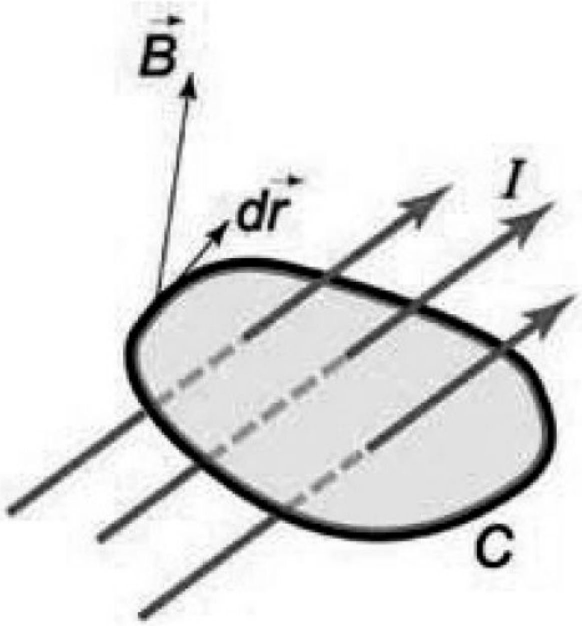


Рис. 20

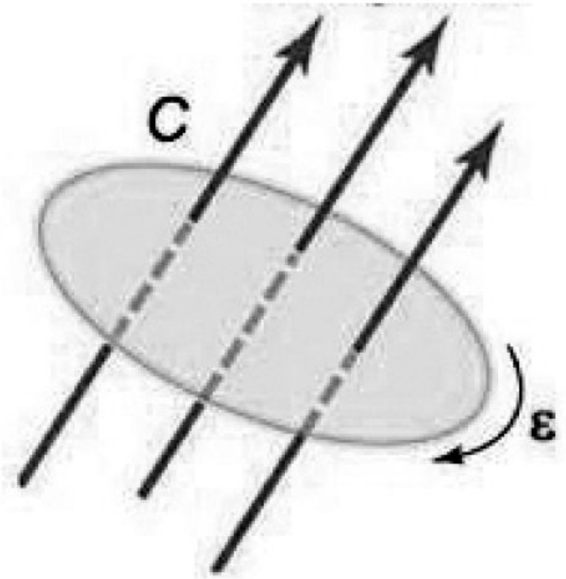


Рис. 21

Пример 4: Найти работу, совершаемую полем $\vec{F}(xy; x+y)$ при перемещении тела от начала координат O(0,0) до точки $A(1,1)$ по траектории L

а) L − отрезок прямой $y = x$;

б) L − линия заданная, уравнением $y = \sqrt{x}$.

Решение: а) Вычислим работу при перемещении вдоль прямой $y = x$.

$$A = \int_{AB} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 xxdx + (x+x)dx = \int_0^1 (x^2 + 2x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

б) Определим теперь работу при перемещении вдоль кривой $y = \sqrt{x}$.

$$A = \int_{AB} xydx + (x+y)dy = \int_0^1 x\sqrt{x}dx + (x+\sqrt{x})\frac{dx}{2\sqrt{x}} =$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2})dx = = \left(\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{37}{30}.$$

Пример 1: Вычислить индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в вакууме на расстоянии r от оси бесконечно длинного проводника с током I.

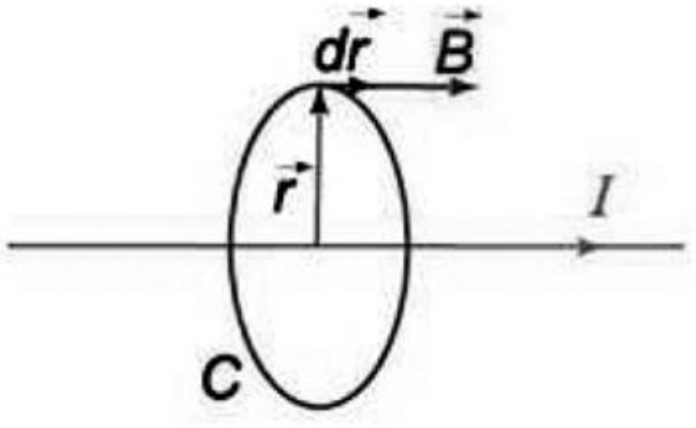


Рис. 22

Решение. Чтобы найти магнитное поле на расстоянии r от проводника, рассмотрим круговой контур радиуса r, расположенный перпендикулярно проводнику с током (рисунок 22). Поскольку поле $\vec{B}$ направлено по касательной к круговому контуру в любой его точке, то скалярное произведение векторов $\vec{B}$ и $d\vec{r}$ есть просто $B \cdot dr$. Тогда можно записать: $\mu_0 I = \oint\limits_C \vec{B} d\vec{r}$ $= \oint\limits_C B dr = B \oint\limits_C dr = B \cdot 2\pi r$. В результате получаем $\mu_0 I = B \cdot 2\pi r$, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Пример 2: Оценить значение электродвижущей силы ε и электрического поля E, возникающих в кольце радиусом 1 *см* у пассажира самолета, при полете самолета в магнитном поле Земли со скоростью 900 *км/ч*.

Решение. Согласно закону Фарадея $\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$. С другой стороны, при заданных условиях $\varepsilon = 2rBv$, где v − скорость самолета, B − индукция магнитного поля Земли. Подставляя заданные величины v =900 *км/ч*=250 *м/с* , r=1 *см* =0,01 *м*, B=5×10^{-5} Т находим значение электродвижущей силы: $\varepsilon = 2rBv = 2\cdot 0{,}01\cdot 250\cdot 5\times10^{-5} = 0{,}00025\,В$. Напряженность возникающего электрического поля найдем по формуле: $\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$. В силу симметрии, наведенное электрическое поле будет иметь постоянную амплитуду в любой точке кольца. Оно будет направлено по касательной к кольцу в любой его точке. Это позволяет легко вычислить криволинейный интеграл. $\varepsilon = \oint_C \vec{E} d\vec{r} = \oint_C E dr \cdot \cos 0 = E \oint_C dr = 2\pi r E$. Следовательно, напряженность электрического поля равна $E = \dfrac{\varepsilon}{2\pi r} = \dfrac{0{,}00025}{2\pi \cdot 0{,}01} = 0{,}004\ В/м.$