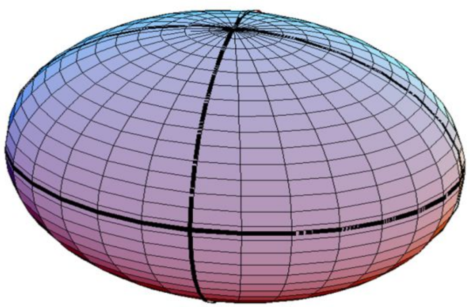
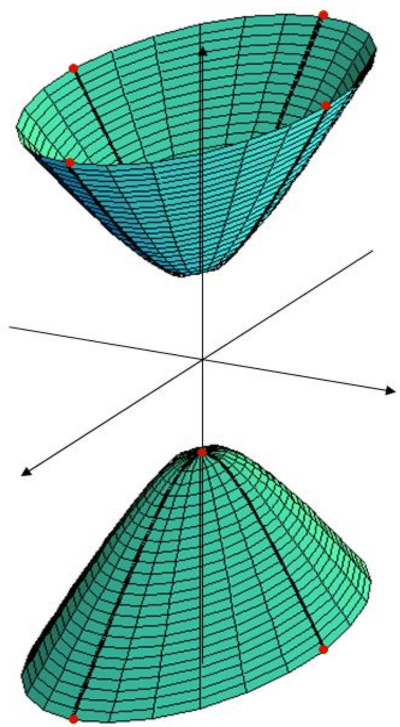
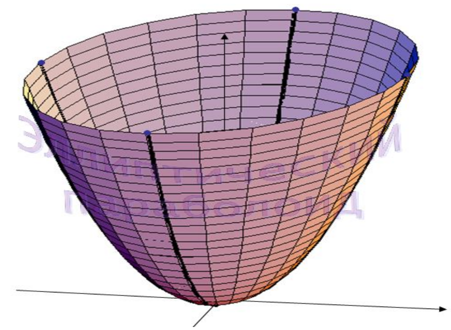
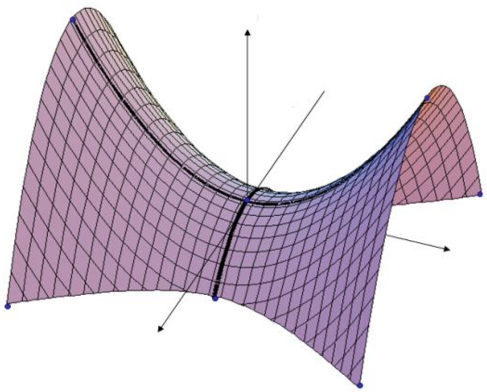
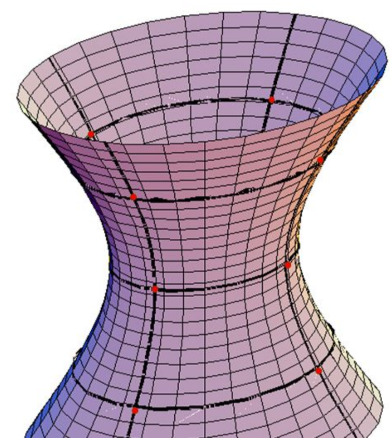
Поверхности второго порядка
1. Классификация
2. Исследование формы











Поверхности второго порядка

Классификация

Алгебраическое описание

Определение. **Уравнением второго порядка от переменных** $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0 = 0, \qquad (1)$$

где α_{ij} и $\alpha_k \in \mathbb{R}$ для всех i, j, k, и хоть одно из чисел α_{ij} отлично от нуля.

Слагаемое $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j$ называется **квадратичной частью уравнения** (1), а слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0$ — его **линейной частью**.

ГМТ на плоскости, задаваемые одним уравнением второго порядка <u>с двумя переменными</u>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad где\ a > 0,\ b > 0,\ a \geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad где\ a > 0,\ b > 0;$$

$$y^2 = 2px, \qquad где\ p > 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \qquad где\ a > 0,\ b > 0,\ a \geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad где\ a > 0,\ b > 0,\ a \geqslant b;$$

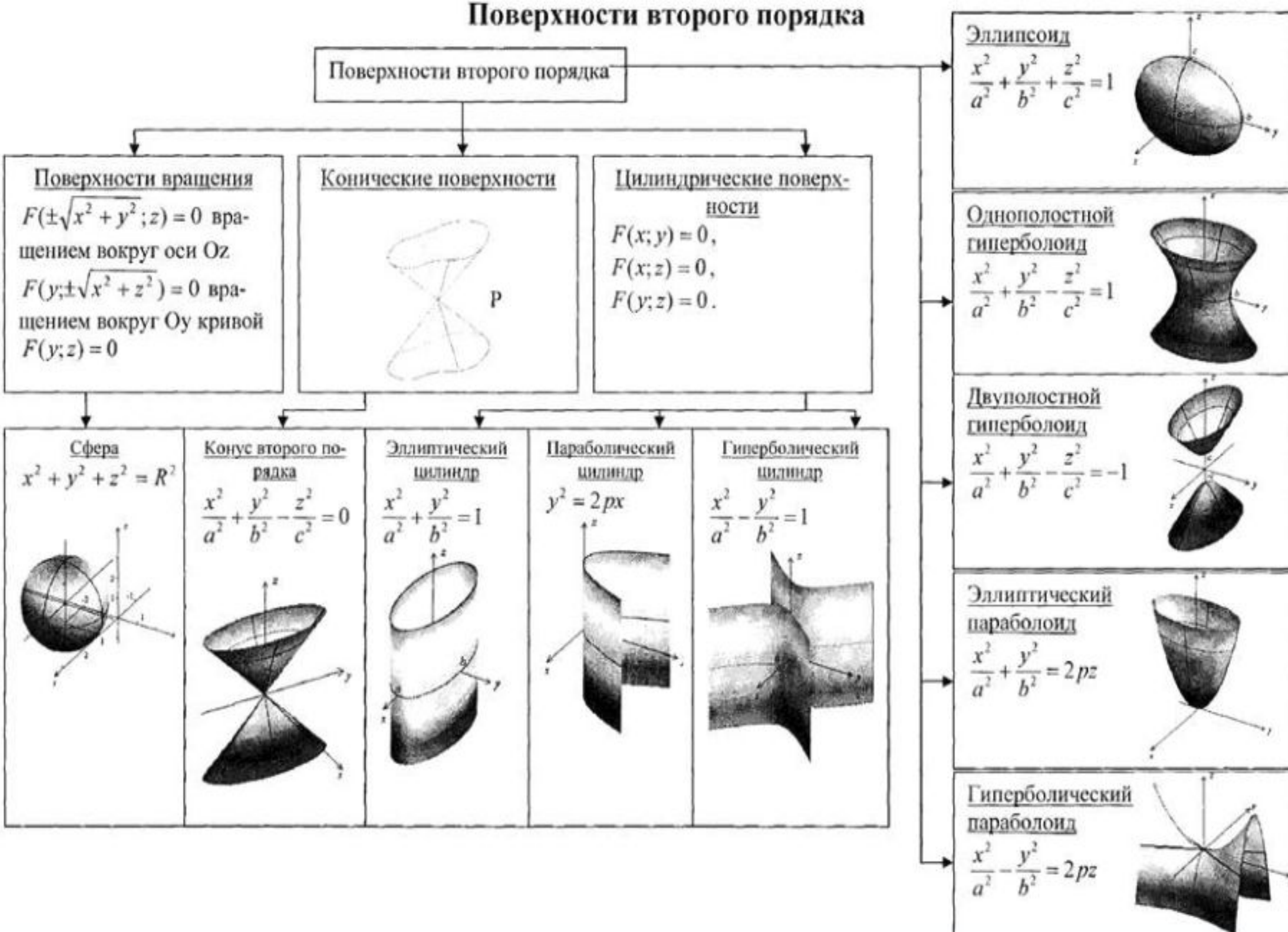
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad где\ a > 0,\ b > 0,\ a \geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad где\ a > 0;$$

$$x^2 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} = -1, \qquad где\ a > 0.$$

Поверхности второго порядка

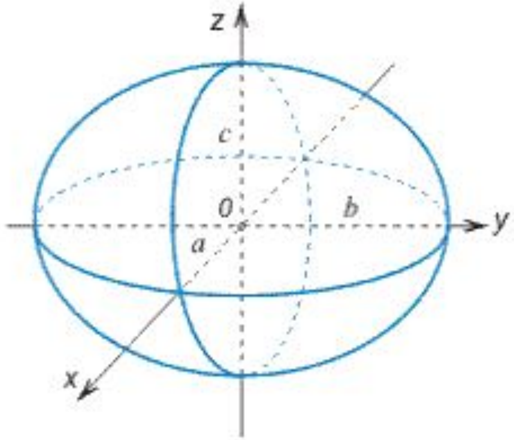


Фигуры вращения, эллипсоиды

Эллипсоид

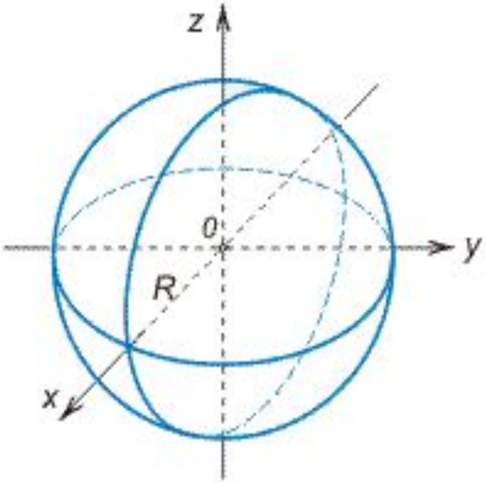
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a, b, c — полуоси



Сфера (частный случай эллипсоида)

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

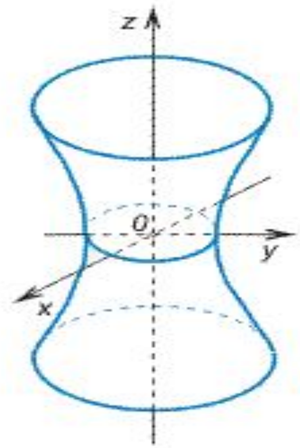


Гиперболоиды: Однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, двуполостный — вокруг действительной.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

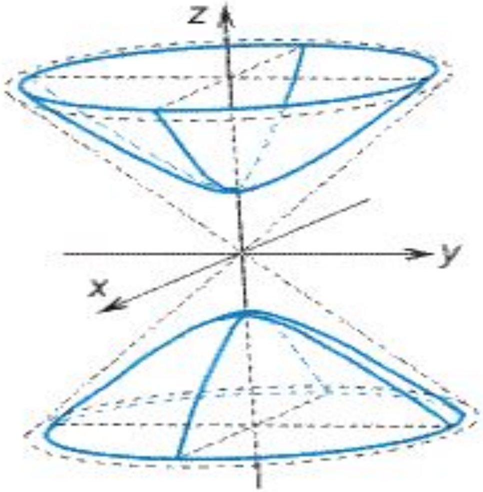
c — действительная полуось,
a и b — мнимые полуоси



Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

c — действительная полуось,
a и b — мнимые полуоси

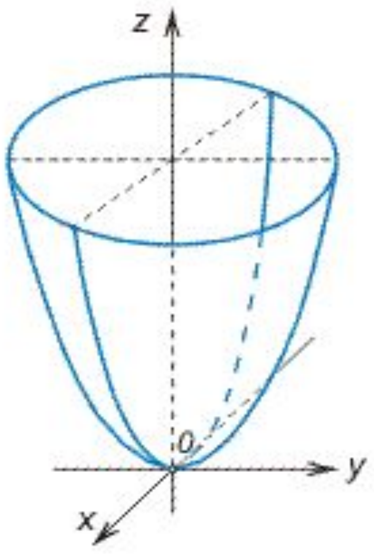


Параболоиды
Эллиптический параболоид

если a=b - эллиптический параболоид представляет собой поверхность вращения, образованную вращением параболы вокруг её оси симметрии.

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

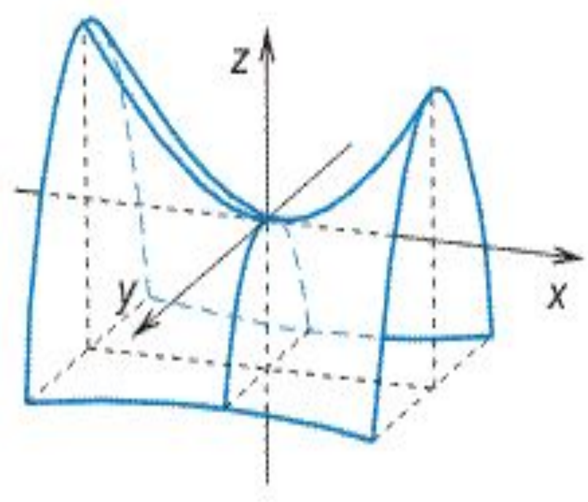


Параболоиды

<u>Гиперболический параболоид </u>может быть образован движением параболы, ветви которой направлены вниз, по параболе, ветви которой направлены вверх

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

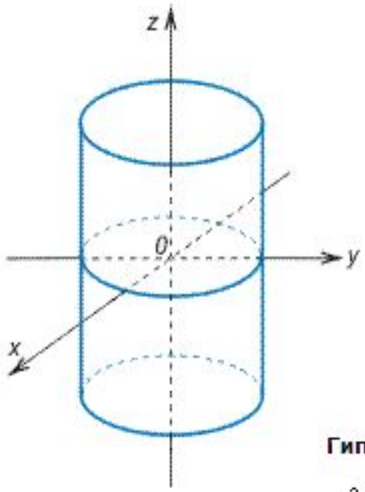


Цилиндрическая поверхность, цилиндры

Эллиптический цилиндр

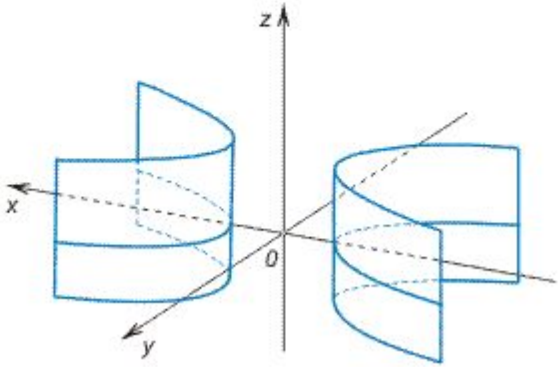
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a и b — полуоси



Гиперболический цилиндр

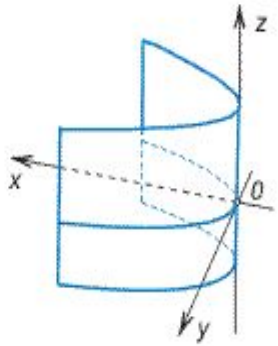
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

p — фокальный параметр

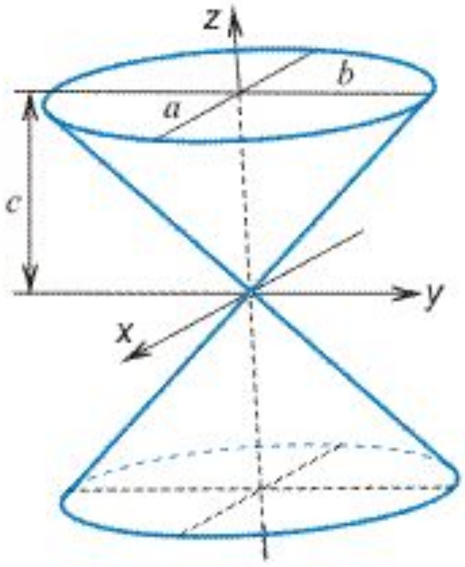


Коническая поверхность, конус

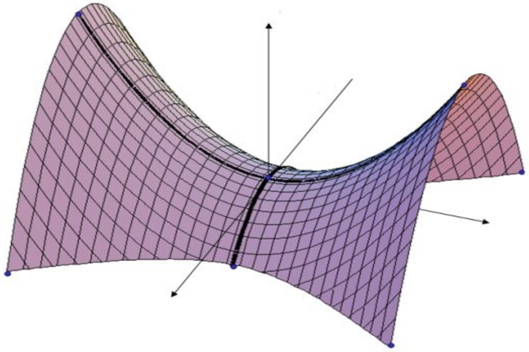
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Вершина конуса в начале координат, направляющая кривая — эллипс с полуосями a и b, плоскость которого находится на расстоянии c от начала координат



<table>
<tr><th></th><th colspan="6">Признаки вида</th><th>Название поверхности</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Центральные поверхности</td><td rowspan="6">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$\begin{cases} \tau_2 > 0, \\ \tau_1 \cdot \delta > 0 \end{cases}$
$\Updownarrow$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
одного знака</td><td colspan="2">$\Delta < 0$</td><td>Эллипсоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta > 0$</td><td>Мнимый эллипсоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Мнимый конус</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Гиперболический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$\left[\begin{array}{l} \tau_2 \leq 0, \\ \tau_1 \cdot \delta \leq 0 \end{array} \right.$
$\Updownarrow$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
разных знаков</td><td colspan="2">$\Delta > 0$</td><td>Однополостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta < 0$</td><td>Двуполостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Конус</td></tr>
<tr><td rowspan="12">Нецентральные поверхности</td><td rowspan="12">$\delta = 0$</td><td rowspan="12">Параболический тип</td><td colspan="4">$\Delta < 0$</td><td>Эллиптический параболоид</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\Delta > 0$</td><td>Гиперболический параболоид</td></tr>
<tr><td rowspan="10">$\Delta = 0$</td><td rowspan="3">$\tau_2 > 0$</td><td colspan="2">$\tau_1 \cdot \kappa_2 < 0$</td><td>Эллиптический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tau_1 \cdot \kappa_2 > 0$</td><td>Мнимый эллиптический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\kappa_2 = 0$</td><td>Пара мнимых пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\tau_2 < 0$</td><td colspan="2">$\kappa_2 \neq 0$</td><td>Гиперболический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\kappa_2 = 0$</td><td>Пара пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\tau_2 = 0$</td><td colspan="2">$\kappa_2 \neq 0$</td><td>Параболический цилиндр</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\kappa_2 = 0$</td><td>$\kappa_1 < 0$</td><td>Пара параллельных плоскостей</td></tr>
<tr><td>$\kappa_1 > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных плоскостей</td></tr>
<tr><td>$\kappa_1 = 0$</td><td>Пара совпадающих плоскостей</td></tr>
</table>



Поверхности второго порядка

Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям методом параллельных сечений

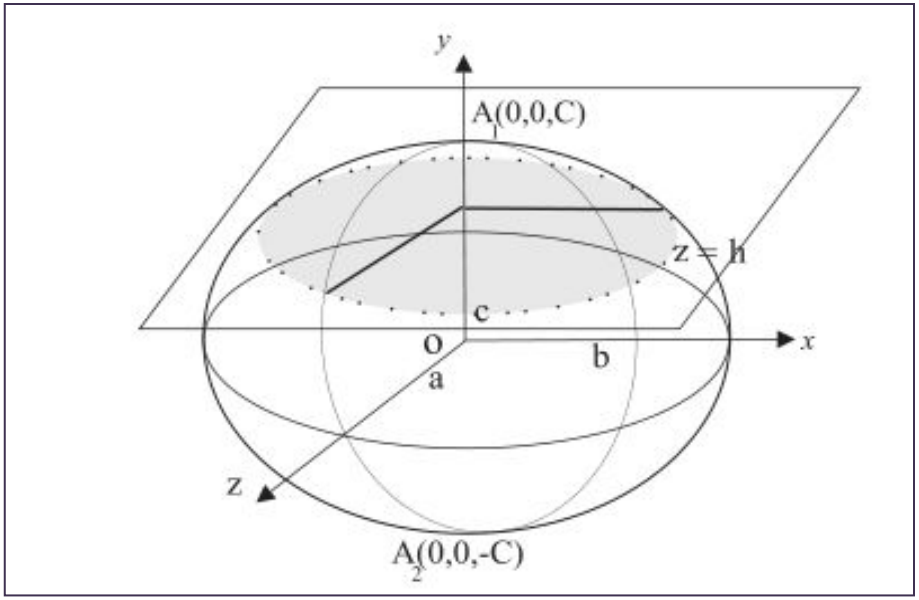
Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0).$

Рассечем поверхность плоскостями $z=h\,(|h|\le c)$. Получим кривые с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\quad z=h.$$

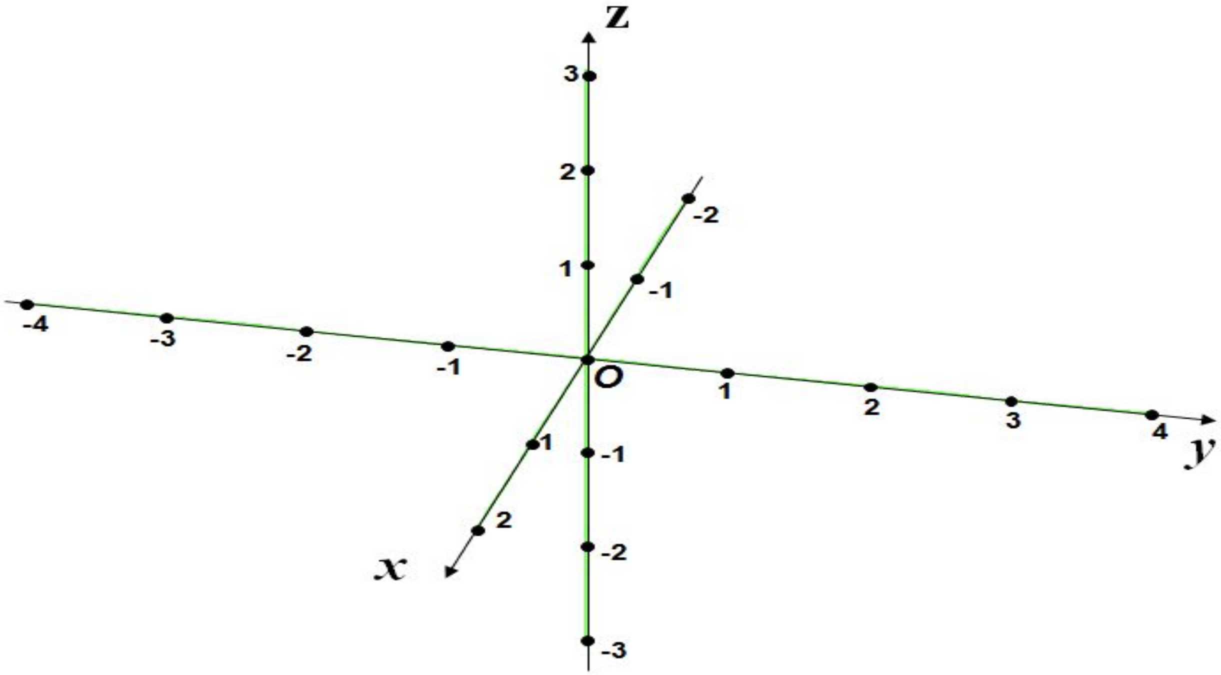
Это эллипс с полуосями $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$. При $h=0$ эллипс имеет наибольшие полуоси. Когда $|h|$ растет, то полуоси эллипсов уменьшаются и при $|h|=c$ эллипсы вырождаются в точки $A_1(0;0;c)$ и $A_2(0;0;-c)$

Эллипсоид заключен в прямоугольном параллелепипеде со сторонами 2a,2b,2c.



Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

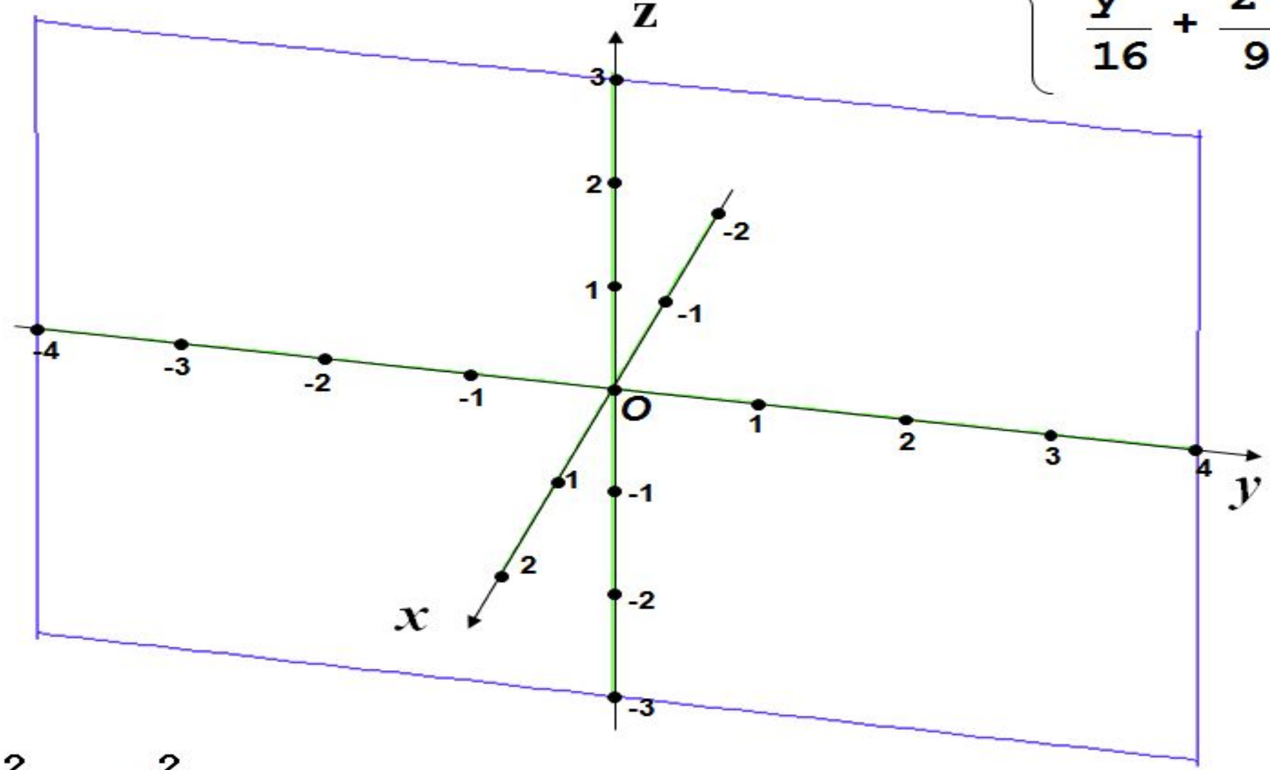
a= 2; b= 4; c= 3

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Сечение плоскостью *YOZ* :

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \end{cases}$$



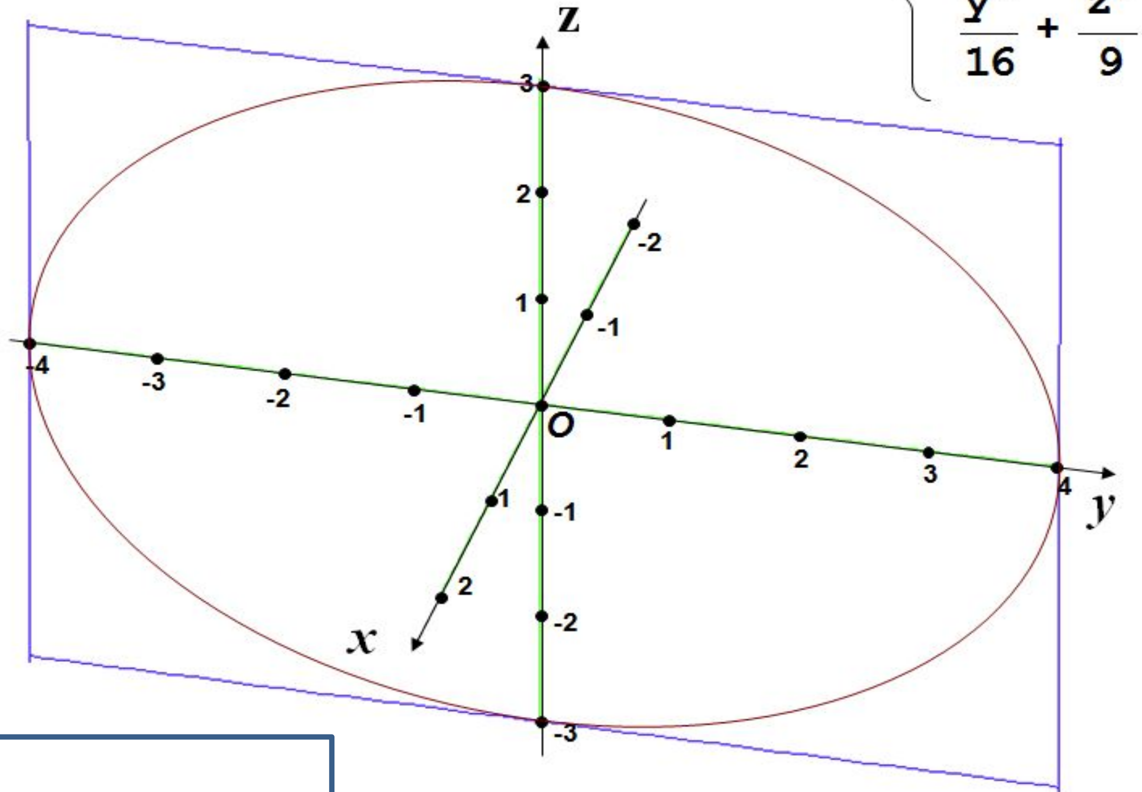
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Сечение плоскостью YOZ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1 \end{cases}$$



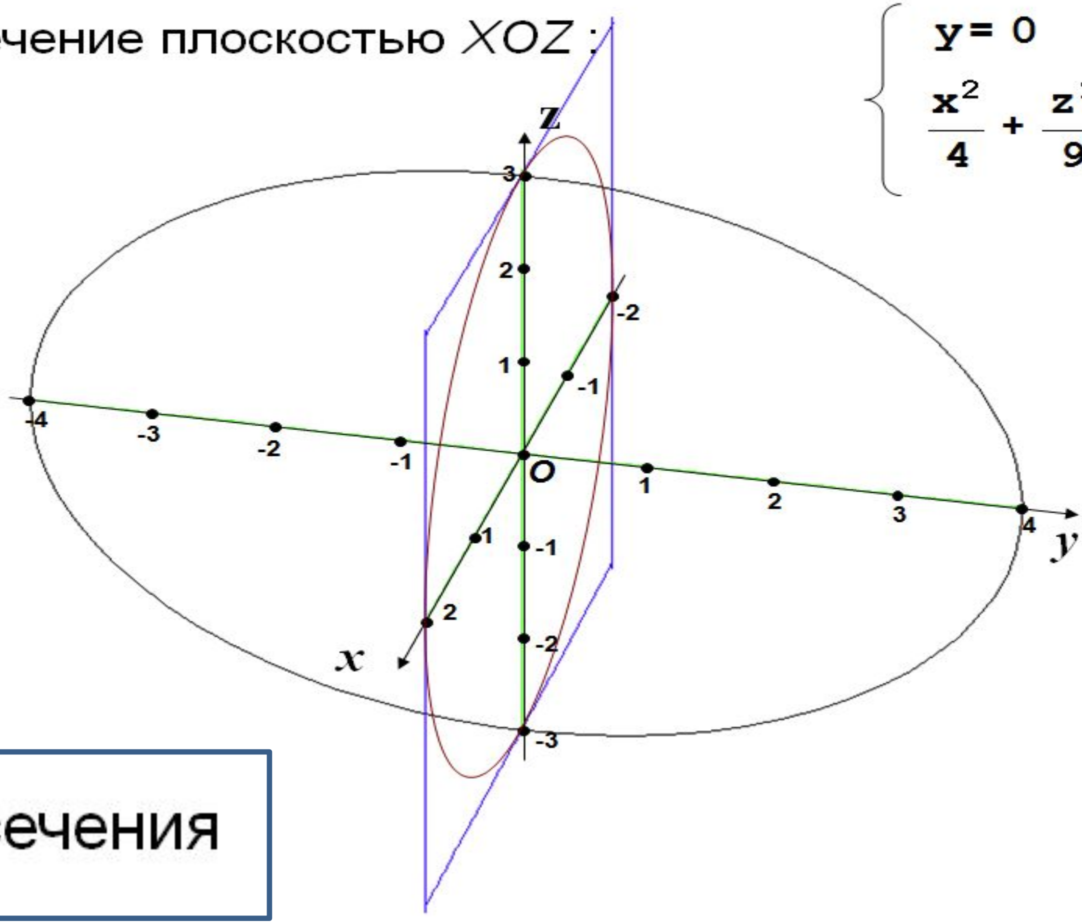
Первое сечение

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Сечение плоскостью XOZ :

$$\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1 \end{cases}$$



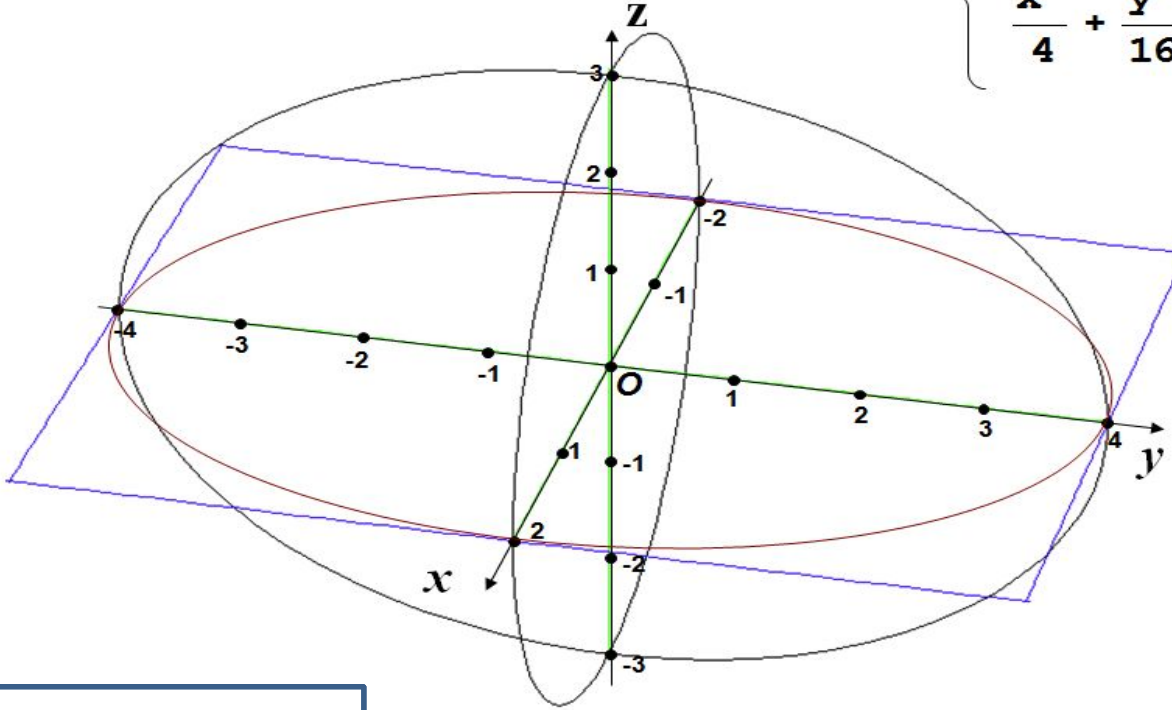
Два сечения

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью XOY :

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$

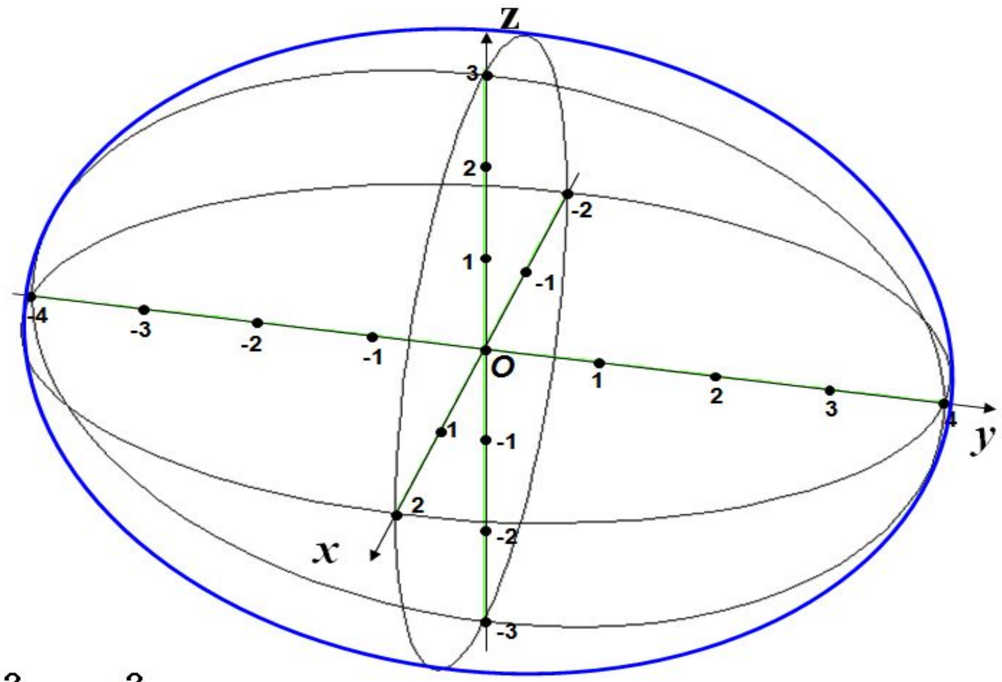


Три сечения

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

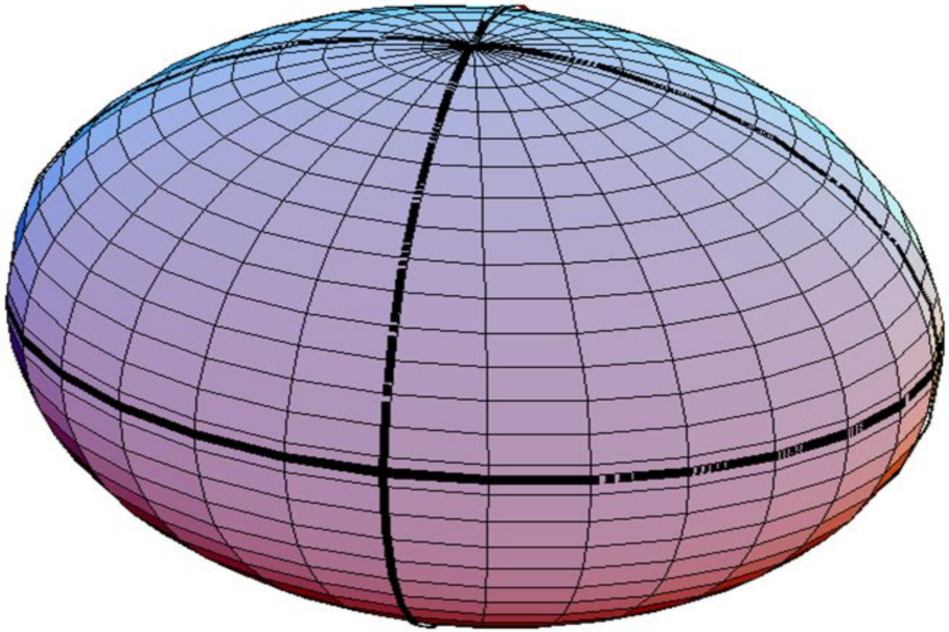
Все сечения :



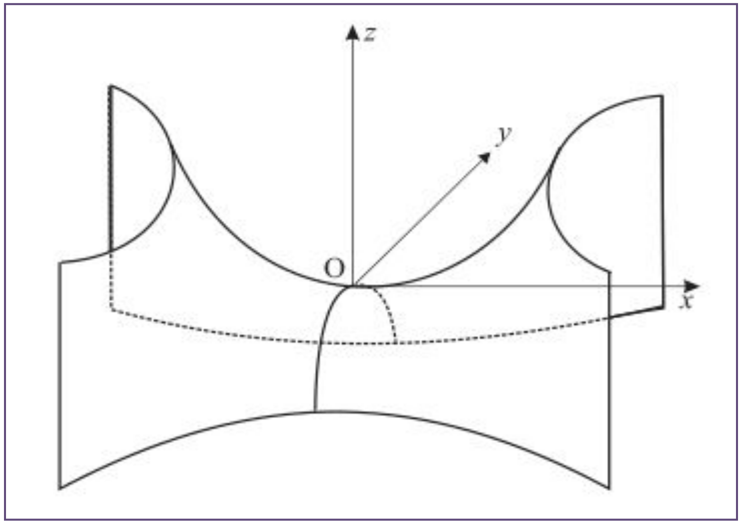
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$



Гиперболический параболоид $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$



Сечение координатной плоскостью $z = 0$ есть пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \left(y = \pm\frac{b}{a}x\right).$$

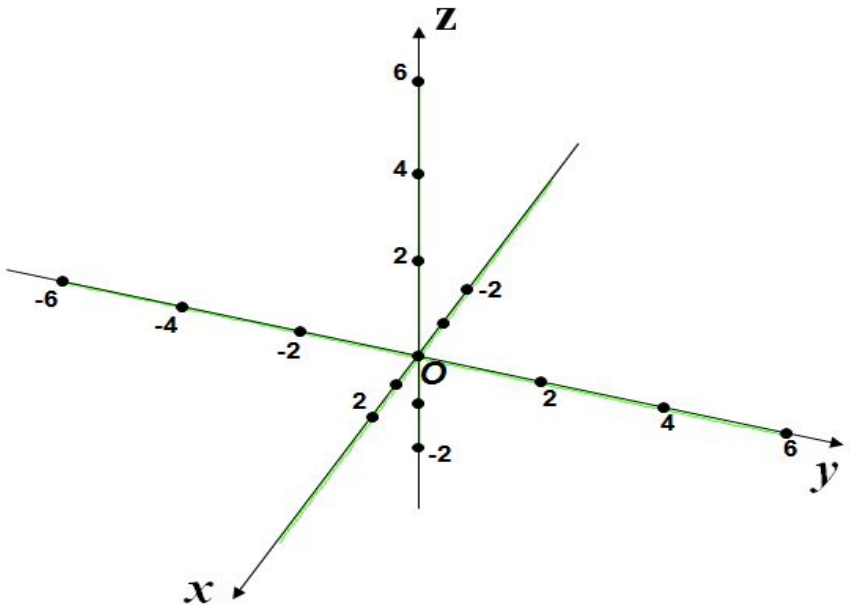
Сечение плоскостями $z = h$ дает гиперболы с уравнениями

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1,$$

причем при $h > 0$ ветви расположены вдоль оси Ox, а при $h < 0$ ветви расположены вдоль оси Oy.

Сечение плоскостью $x = 0$ дает в плоскости yOz параболу $z = -\frac{y^2}{b^2}$, ветви которой направлены вниз.

Гиперболический параболоид $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$

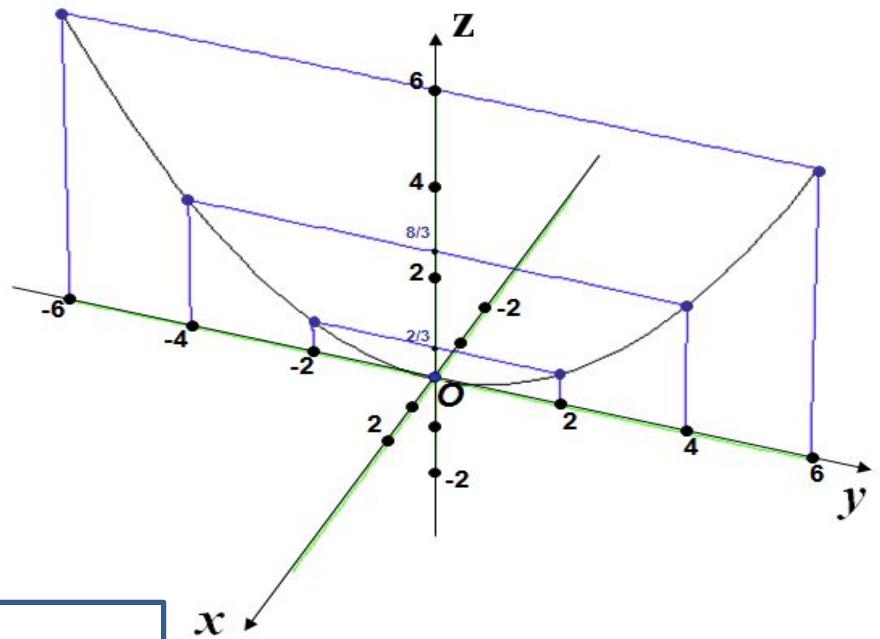


–

Гиперболический параболоид $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$

Сечение плоскостью YOZ :

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{6}=z \end{cases}$$

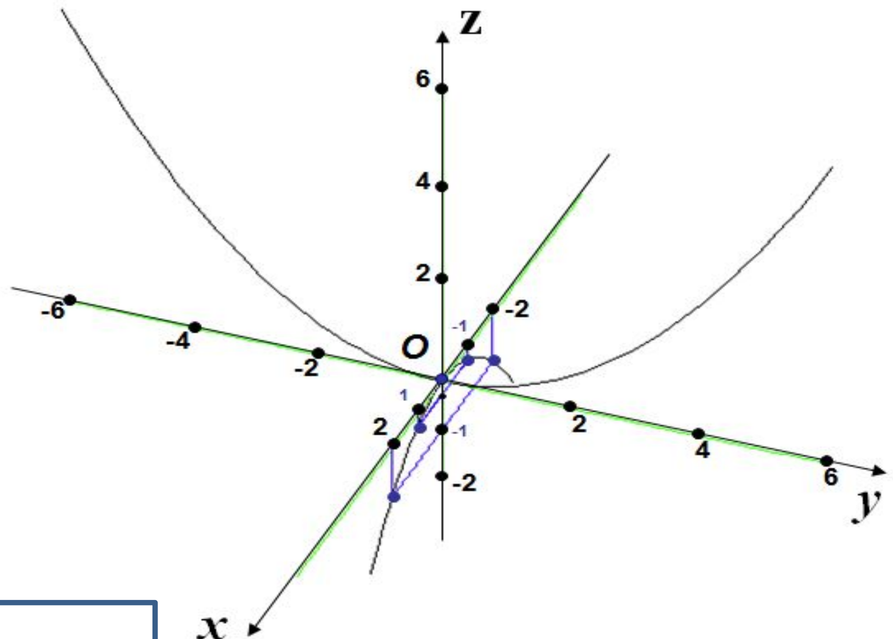


Первое сечение

Гиперболический параболоид $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$

Сечение плоскостью XOZ :

$$\begin{cases} y=0 \\ -\dfrac{x^2}{4}=z \end{cases}$$

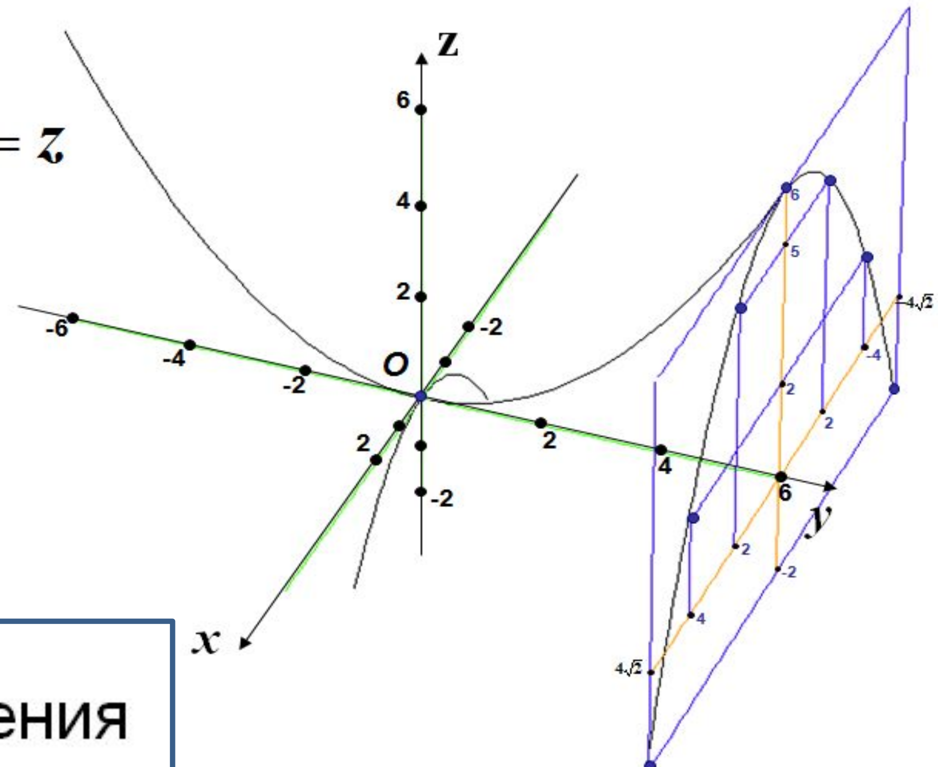


Два сечения

Гиперболический параболоид $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$

Сечение плоскостью *y*=6, параллельной *XOZ* :

$$\begin{cases} y=6 \\ -\frac{x^2}{4}+6=z \end{cases}$$



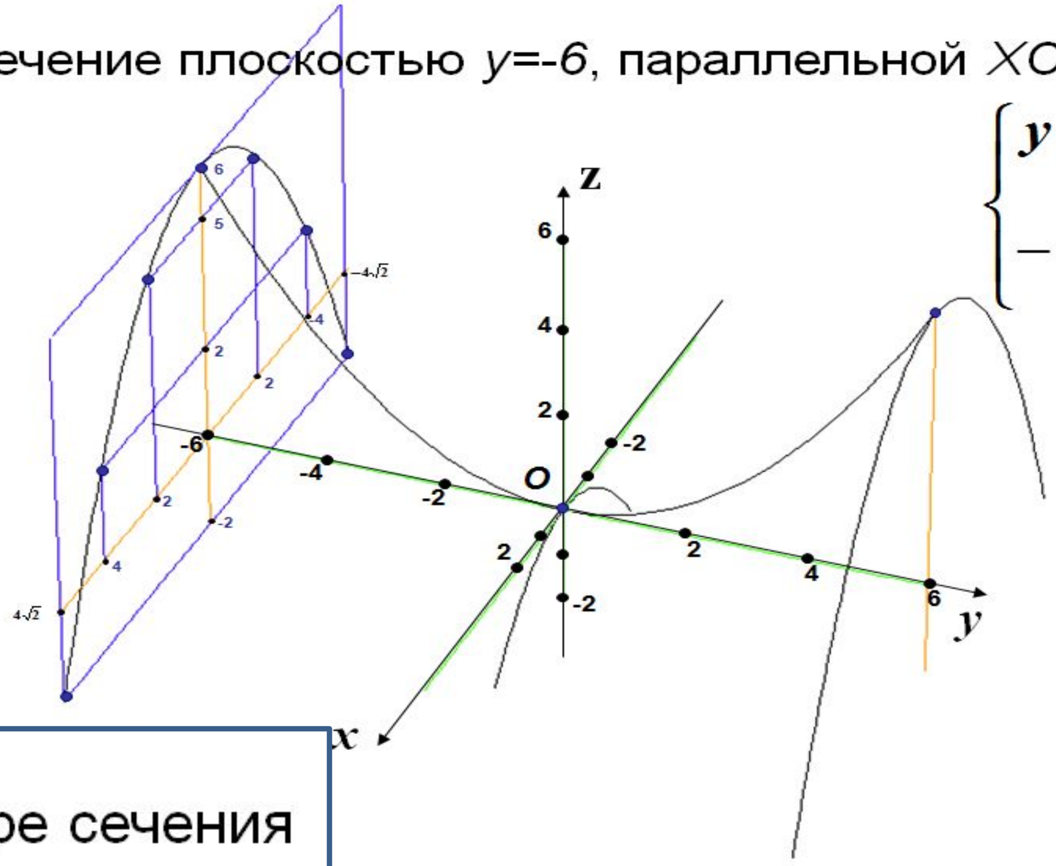
Три сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

Сечение плоскостью $y=-6$, параллельной XOZ :

$$\begin{cases} y=-6 \\ -\dfrac{x^2}{4}+6=z \end{cases}$$



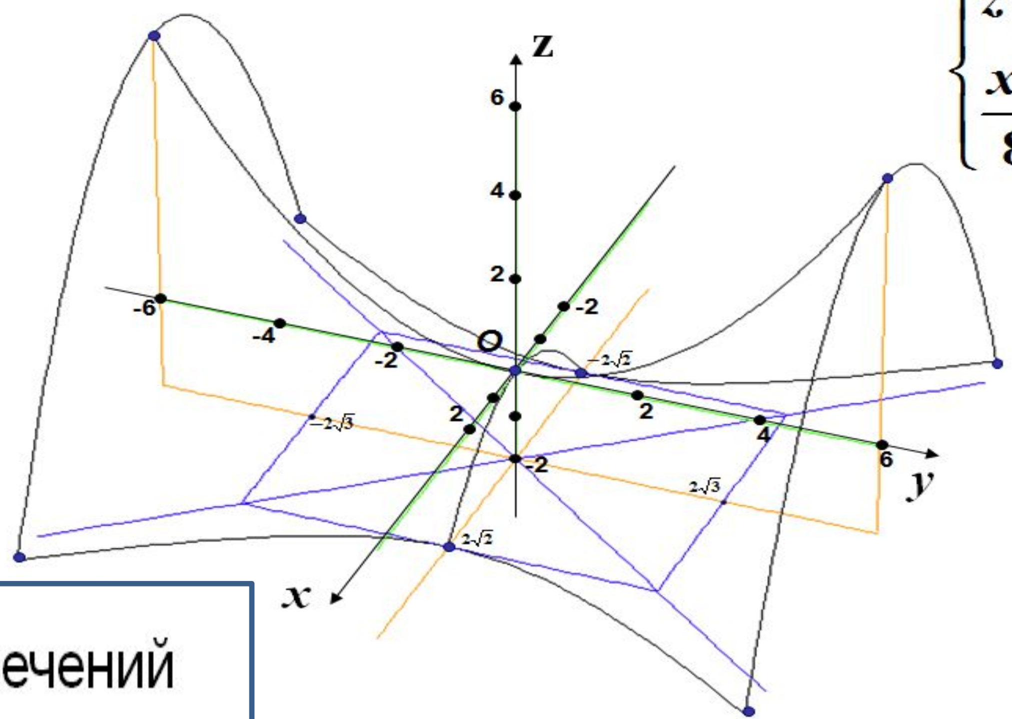
Четыре сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

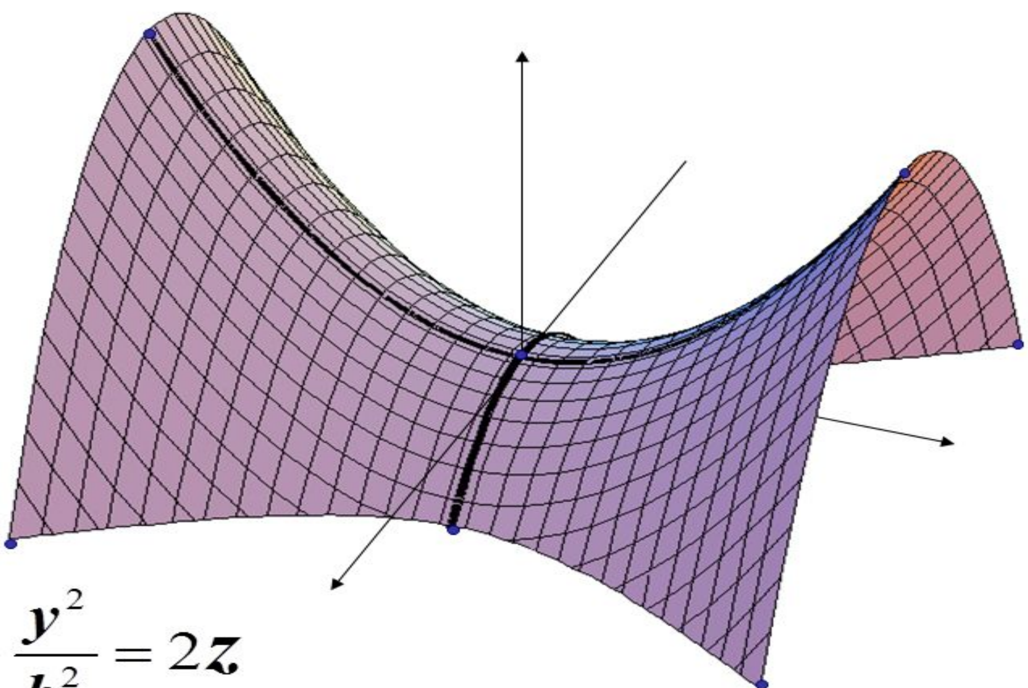
Сечение плоскостью z=-2, параллельной XOY :

$$\begin{cases} z=-2 \\ \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$$



Пять сечений

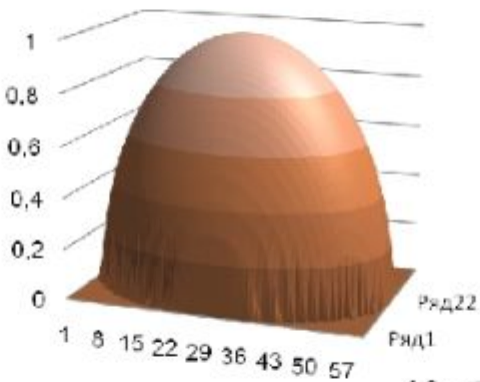
Гиперболический параболоид



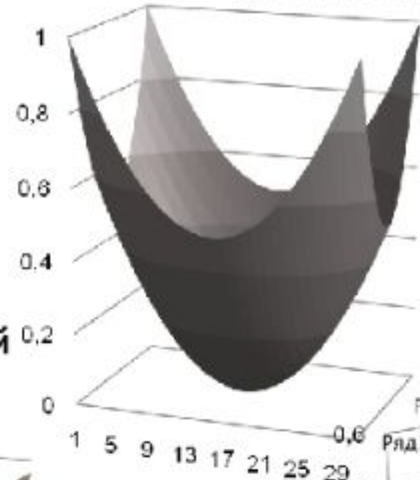
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Графики поверхностей второго порядка

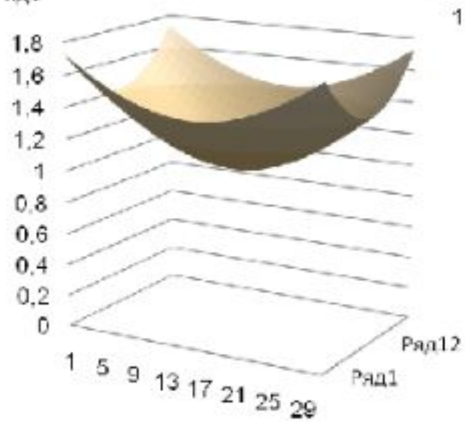
Эллипсоид



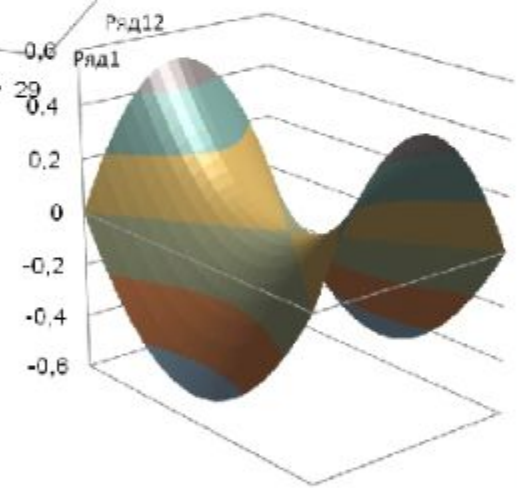
Параболоид эллиптический



Гиперболоид двухполостный



Седло



Приложения

Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основана работа параболических антенн, телескопов-рефлекторов с параболическим зеркалом, прожекторов, автомобильных фар и т. д.

Свойство двуполостного гиперболоида вращения отражать лучи, направленные в один из фокусов, в другой фокус, используется в телескопах системы Кассегрена и в антеннах Кассегрена.

- http://www.youtube.com/watch?v=1jigfFYbXc8