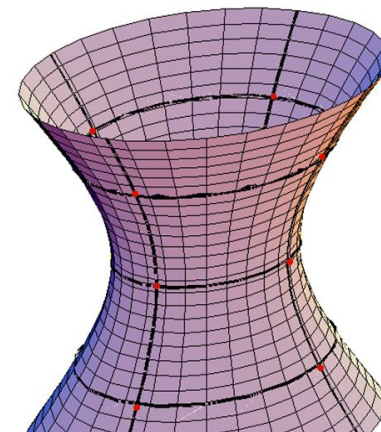
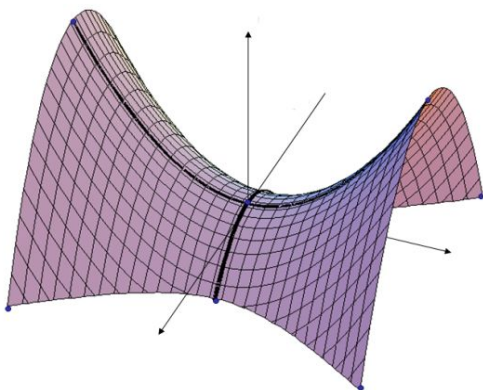
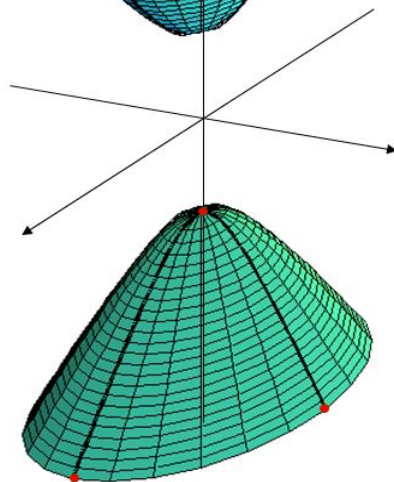
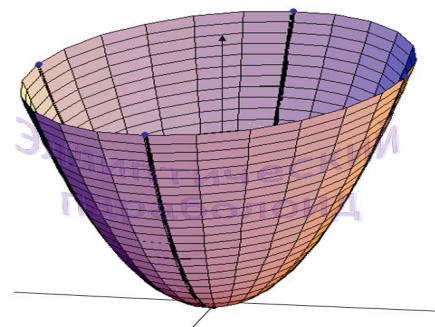
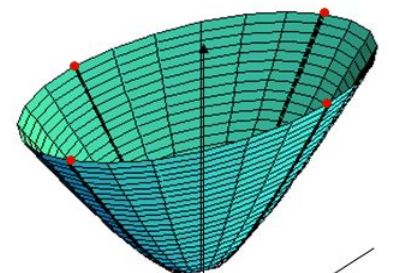
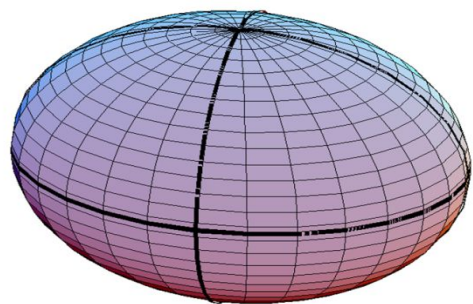


Поверхности второго порядка

1. Классификация

2. Исследование формы



Поверхности второго порядка

Классификация

Алгебраическое описание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнением второго порядка от переменных x_1, \dots, x_n называется уравнение вида

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_0 = 0, \quad (1)$$

где α_{ij} и $\alpha_k \in \mathbb{R}$ для всех i, j, k , и хоть одно из чисел α_{ij} отлично от нуля.

Слагаемое $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$ называется **квадратичной частью** уравнения (1), а слагаемое $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_0$ — его **линейной частью**.

ГМТ на плоскости, задаваемые одним уравнением второго порядка с двумя переменными

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a > 0, b > 0, a \geq b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a > 0, b > 0;$$

$$y^2 = 2px, \quad \text{где } p > 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \text{где } a > 0, b > 0, a \geq b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{где } a > 0, b > 0, a \geq b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{где } a > 0, b > 0, a \geq b;$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \text{где } a > 0;$$

$$x^2 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} = -1, \quad \text{где } a > 0.$$

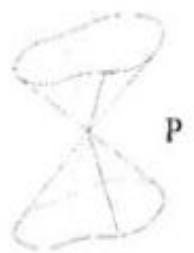
Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка

Поверхности вращения

$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0$ вращением вокруг оси Oz
 $F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ вращением вокруг Oy кривой $F(y; z) = 0$

Конические поверхности

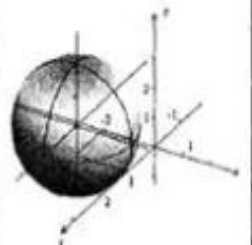


Цилиндрические поверхности

$F(x; y) = 0$,
 $F(x; z) = 0$,
 $F(y; z) = 0$.

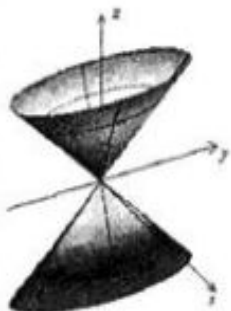
Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



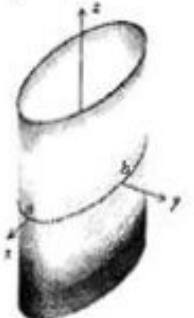
Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$



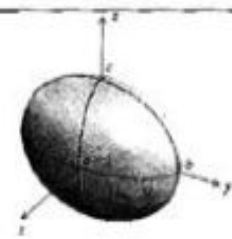
Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



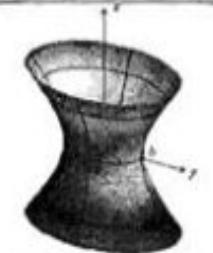
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



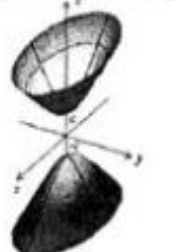
Однополостной гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Двуполостной гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



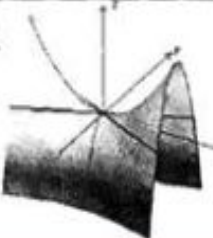
Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

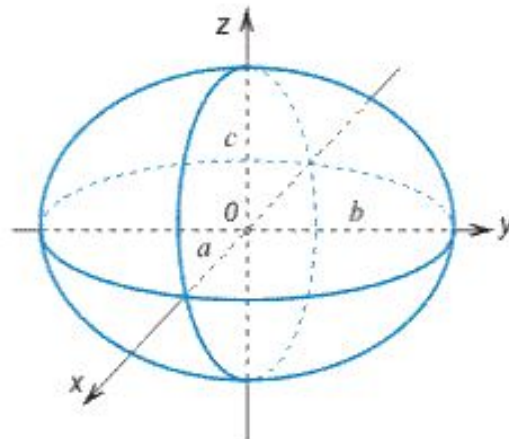


Фигуры вращения, эллипсоиды

Эллипсоид

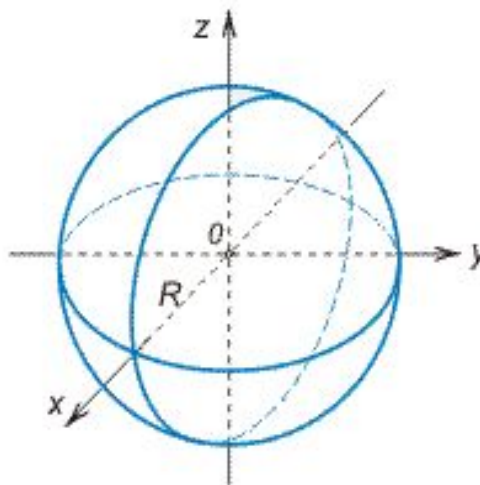
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a, b, c — полуоси



Сфера (частный случай эллипсоида)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

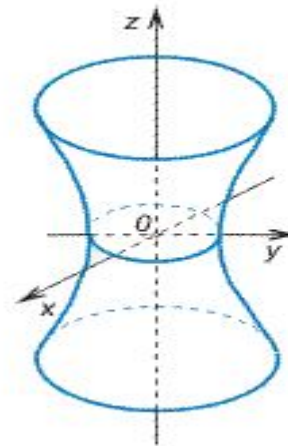


Гиперболоиды: Однополостный гиперboloид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, двуполостный — вокруг действительной.

Однополостный гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

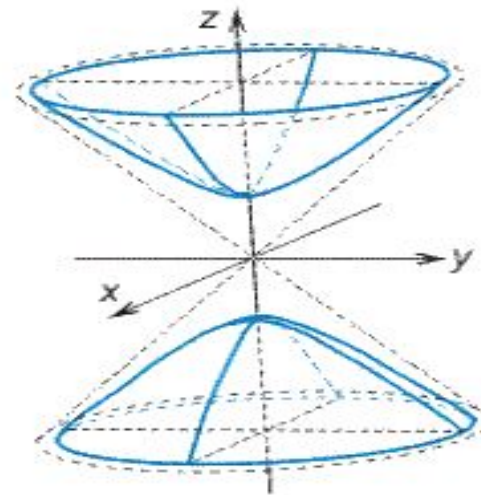
c — действительная полуось,
 a и b — мнимые полуоси



Двуполостный гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

c — действительная полуось,
 a и b — мнимые полуоси



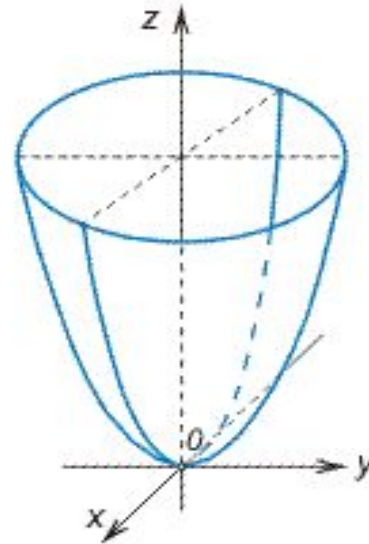
Параболоиды

Эллиптический параболоид

если $a=b$ - эллиптический параболоид представляет собой поверхность вращения, образованную вращением параболы вокруг её оси симметрии.

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

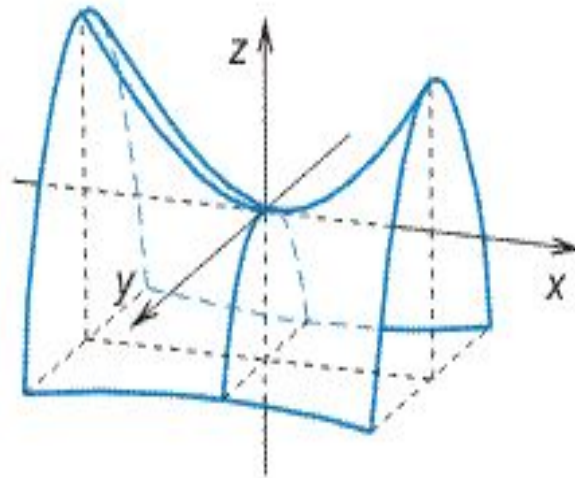


Параболоиды

Гиперболический параболоид может быть образован движением параболы, ветви которой направлены вниз, по параболе, ветви которой направлены вверх

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

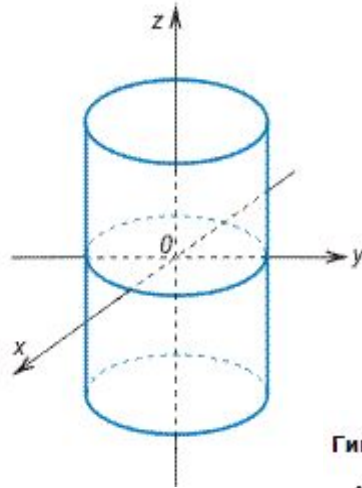


Цилиндрическая поверхность, цилиндры

Эллиптический цилиндр

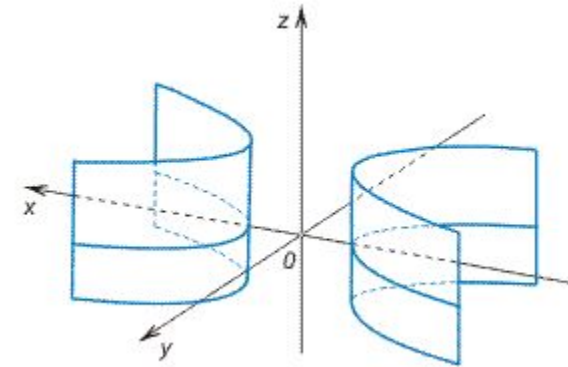
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a и b — полуоси



Гиперболический цилиндр

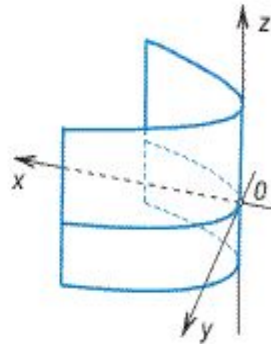
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

p — фокальный параметр

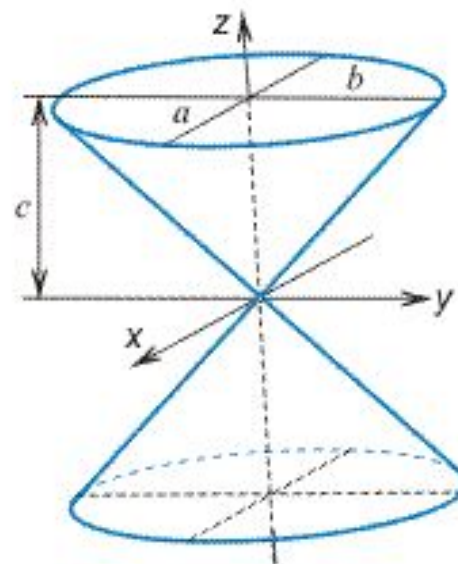


Коническая поверхность, конус

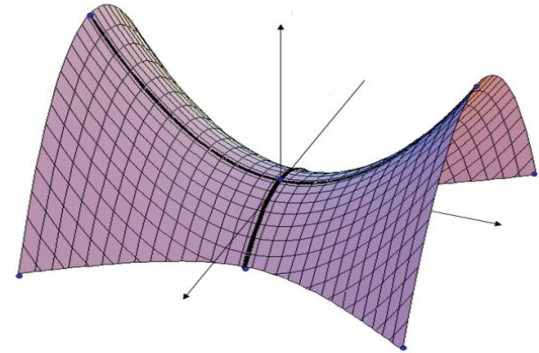
Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Вершина конуса в начале координат, направляющая кривая — эллипс с полуосями a и b , плоскость которого находится на расстоянии c от начала координат



		Признаки вида			Название поверхности	
Центральные поверхности	$\delta \neq 0$	Эллиптический тип	$\begin{cases} \tau_2 > 0, \\ \tau_1 \cdot \delta > 0 \end{cases}$ \Downarrow $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака	$\Delta < 0$	Эллипсоид	
				$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид	
				$\Delta = 0$	Мнимый конус	
		Гиперболический тип	$\begin{cases} \tau_2 \leq 0, \\ \tau_1 \cdot \delta \leq 0 \end{cases}$ \Downarrow $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ разных знаков	$\Delta > 0$	Однополостный гиперboloид	
				$\Delta < 0$	Двуполостный гиперboloид	
				$\Delta = 0$	Конус	
Нецентральные поверхности	$\delta = 0$	Параболический тип	$\Delta < 0$		Эллиптический параболоид	
			$\Delta > 0$		Гиперболический параболоид	
			$\Delta = 0$	$\tau_2 > 0$	$\tau_1 \cdot \kappa_2 < 0$	Эллиптический цилиндр
					$\tau_1 \cdot \kappa_2 > 0$	Мнимый эллиптический цилиндр
					$\kappa_2 = 0$	Пара мнимых пересекающихся плоскостей
			$\tau_2 < 0$	$\kappa_2 \neq 0$	Гиперболический цилиндр	
				$\kappa_2 = 0$	Пара пересекающихся плоскостей	
			$\tau_2 = 0$	$\kappa_2 \neq 0$	Параболический цилиндр	
				$\kappa_2 = 0$	$\kappa_1 < 0$	Пара параллельных плоскостей
					$\kappa_1 > 0$	Пара мнимых параллельных плоскостей
			$\kappa_1 = 0$		Пара совпадающих плоскостей	



Поверхности второго порядка

Исследование формы
поверхностей второго порядка
по их каноническим уравнениям
методом параллельных сечений

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

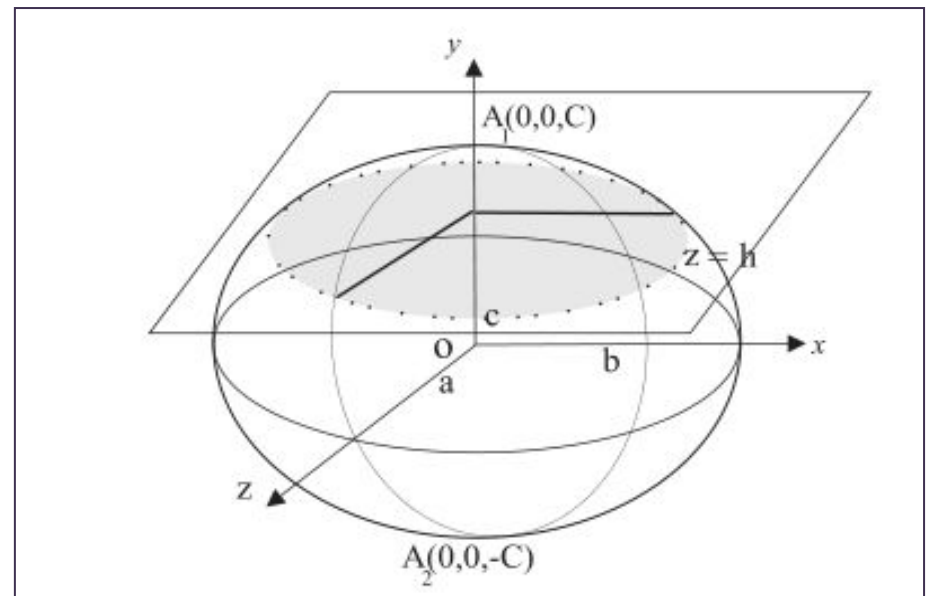
$$(a > 0, b > 0, c > 0).$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$ ($|h| \leq c$). Получим кривые с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h.$$

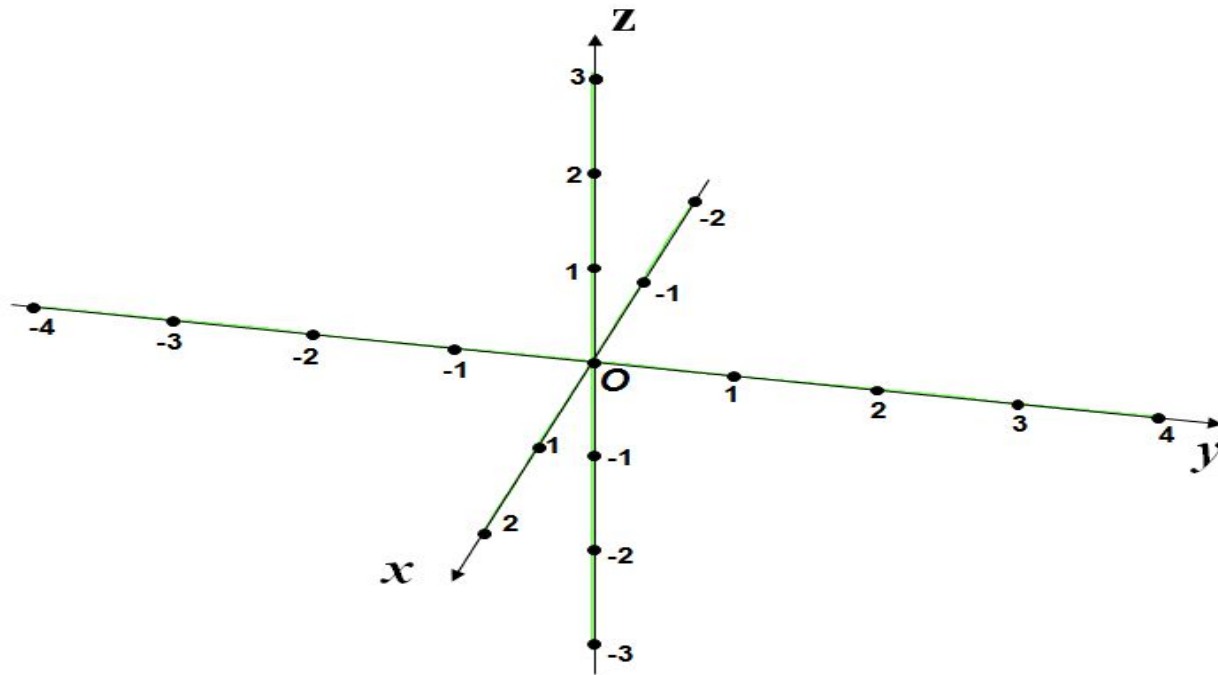
Это эллипс с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. При $h = 0$ эллипс имеет наибольшие полуоси. Когда $|h|$ растёт, то полуоси эллипсов уменьшаются и при $|h| = c$ эллипсы вырождаются в точки $A_1(0; 0; c)$ и $A_2(0; 0; -c)$

Эллипсоид заключен в прямоугольном параллелепипеде со сторонами $2a, 2b, 2c$.



Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

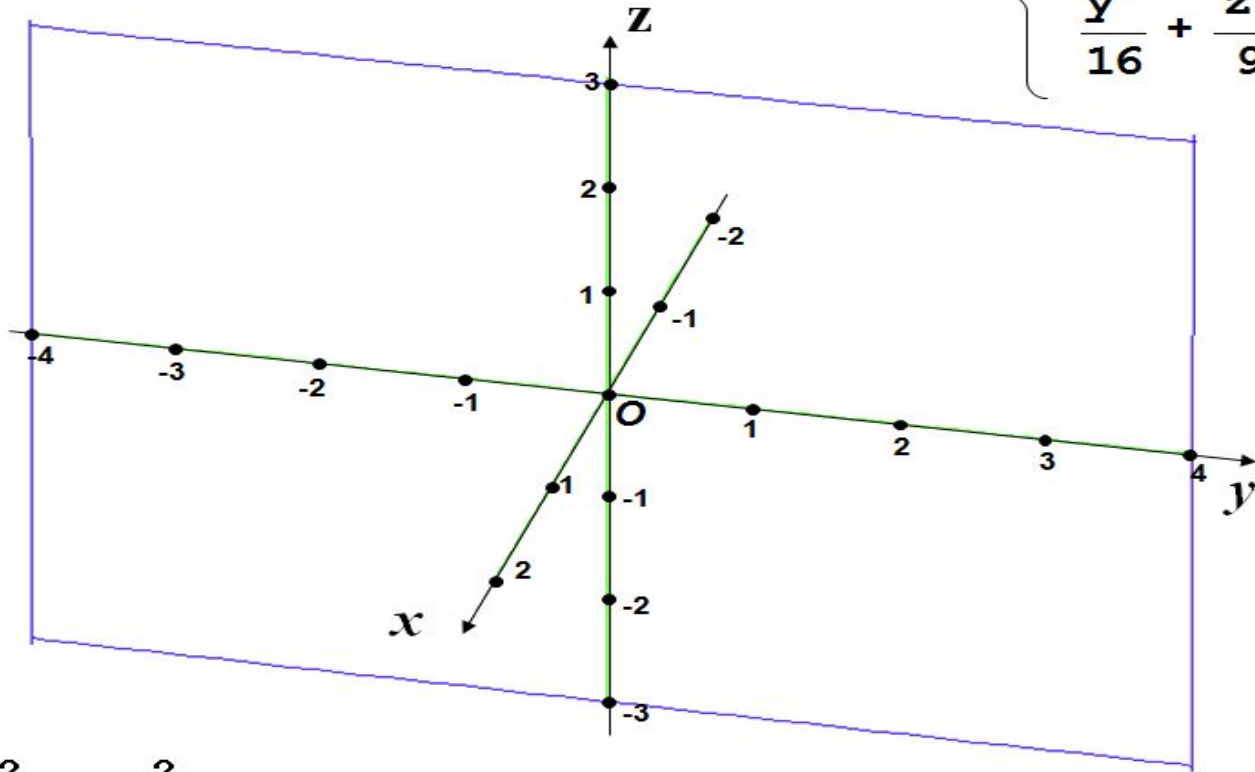
$$a = 2; \quad b = 4; \quad c = 3$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью YOZ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$



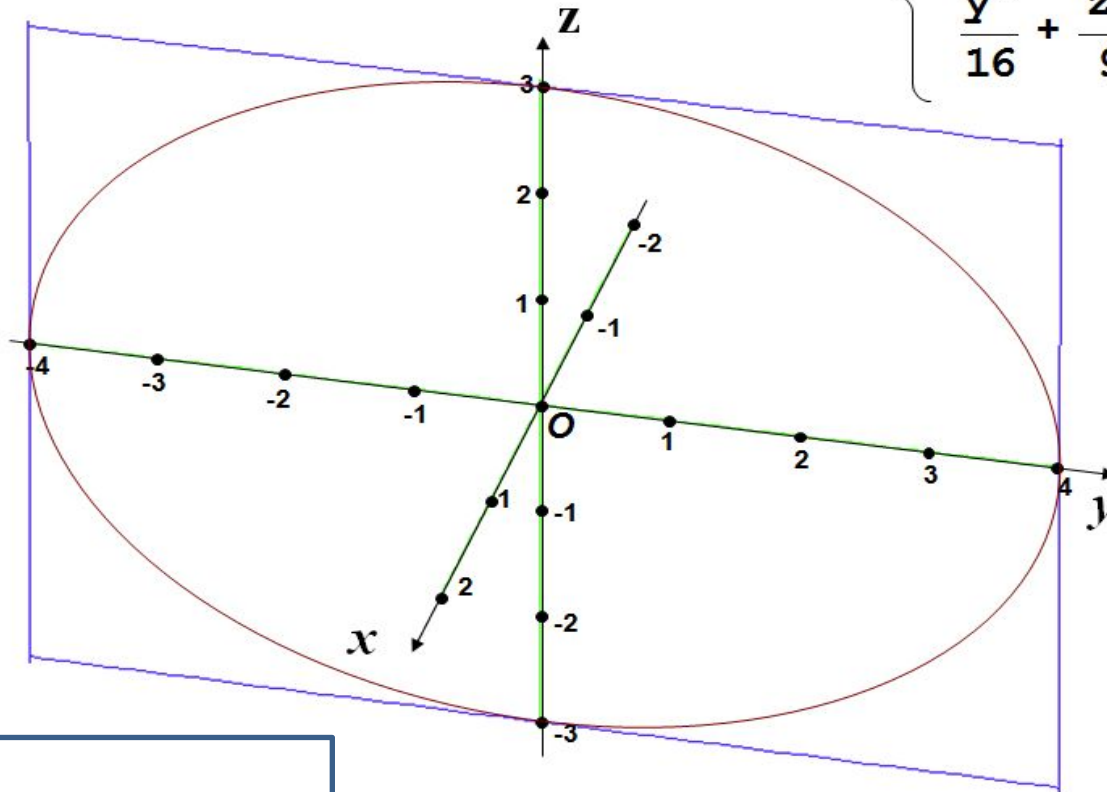
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью YOZ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \end{array} \right.$$



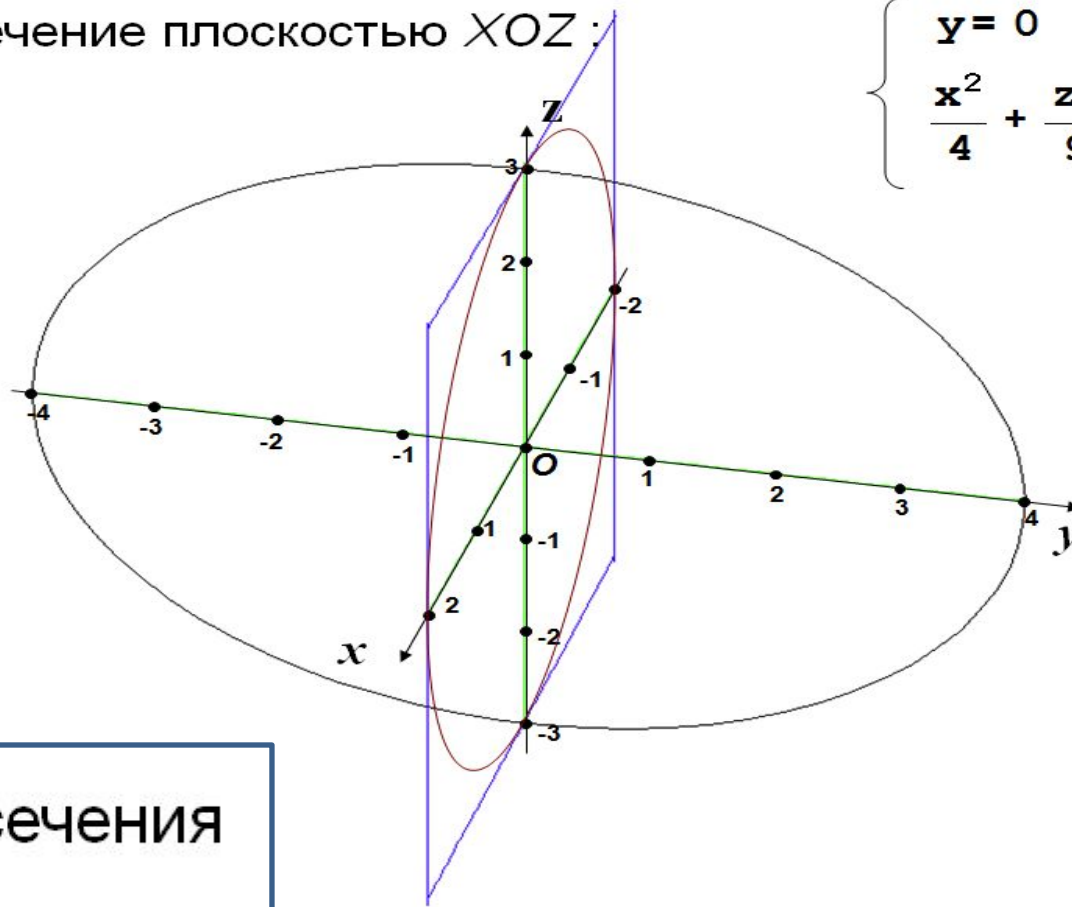
Первое сечение

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью XOZ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$



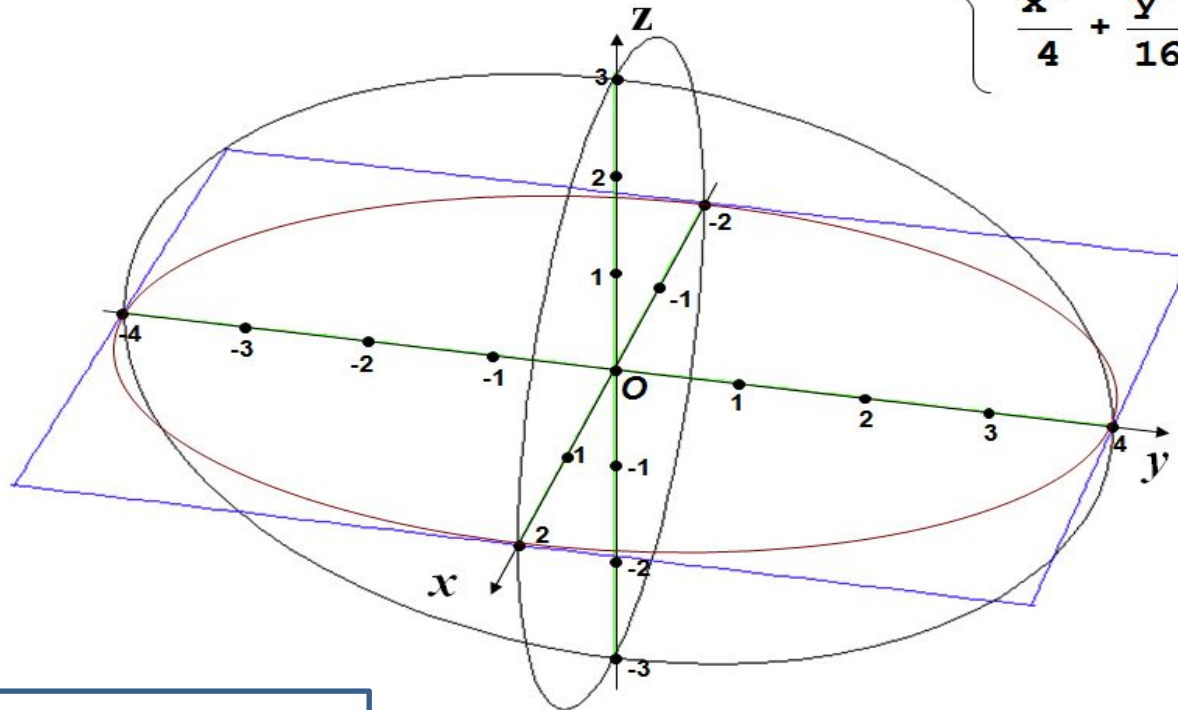
Два сечения

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью XOY :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{array} \right.$$

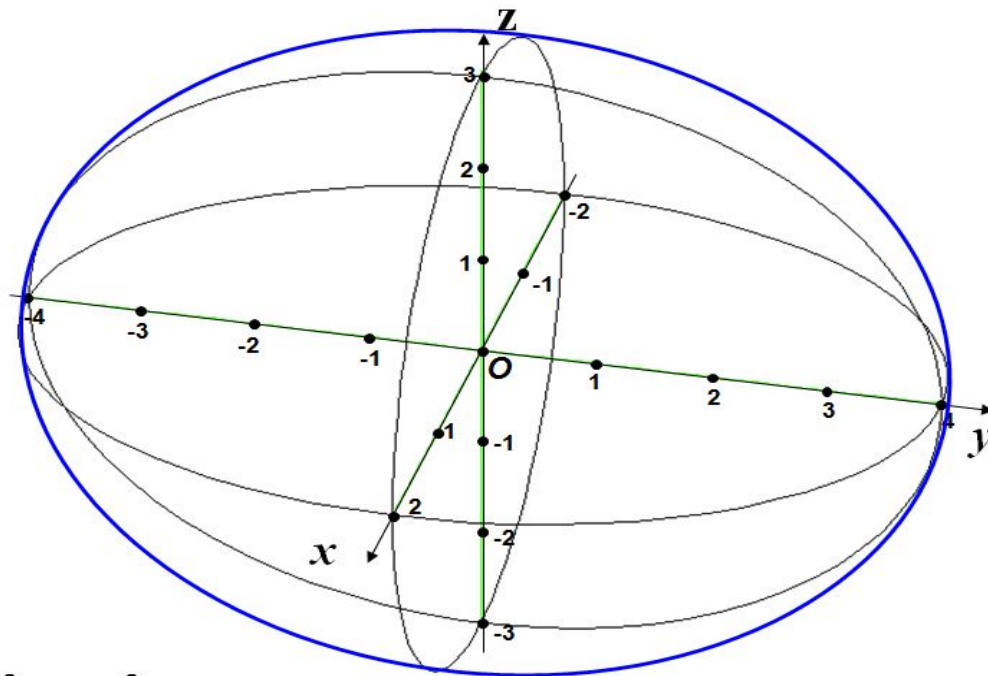


Три сечения

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

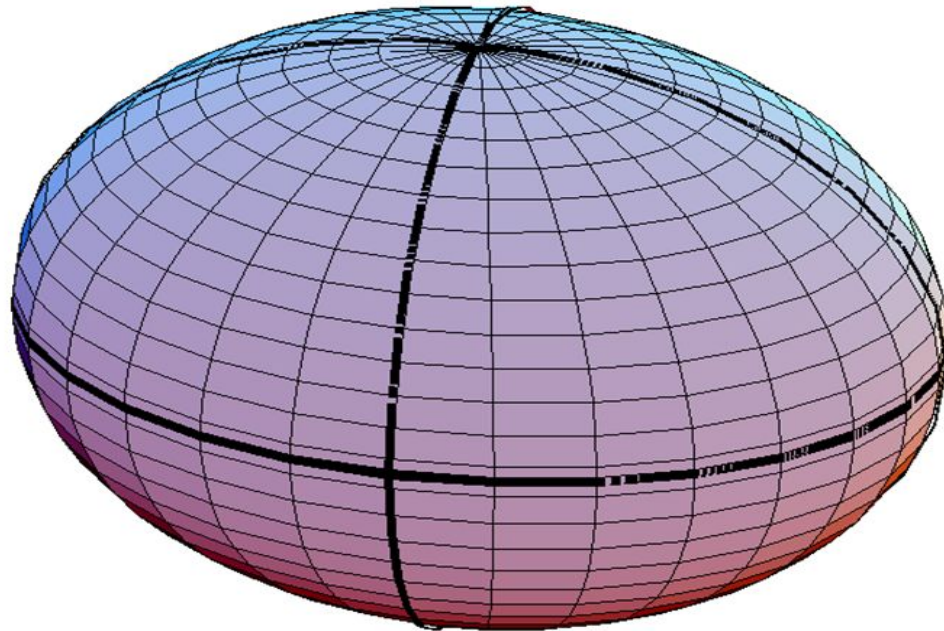
Все сечения :



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

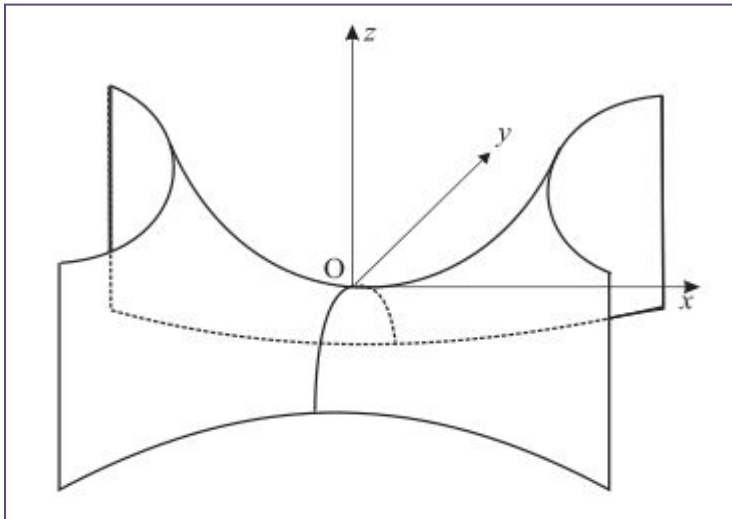
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$



Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Сечение плоскостью $x = 0$ дает в плоскости yOz параболу $z = -\frac{y^2}{b^2}$, ветви которой направлены вниз.

Сечение координатной плоскостью $z = 0$ есть пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \left(y = \pm \frac{b}{a}x \right).$$

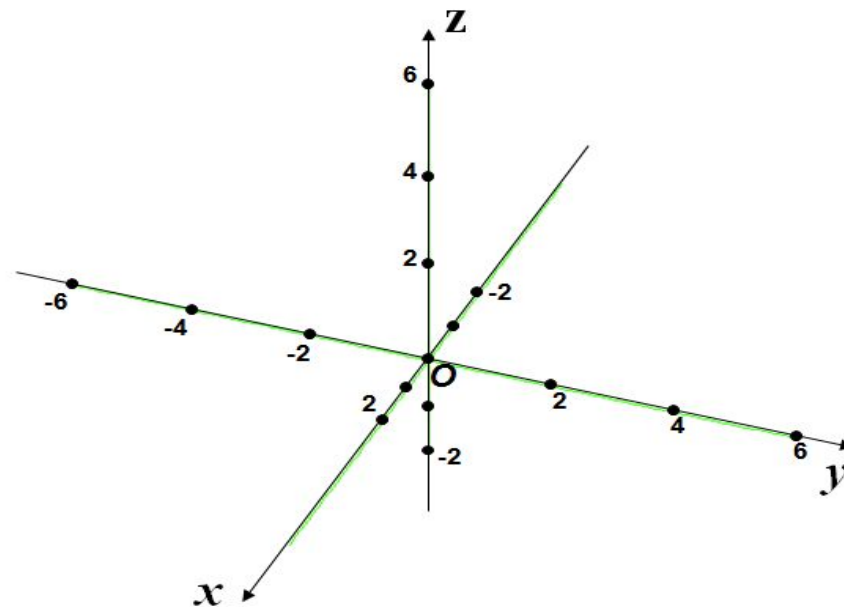
Сечение плоскостями $z = h$ дает гиперболы с уравнениями

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1,$$

причем при $h > 0$ ветви расположены вдоль оси Ox , а при $h < 0$ ветви расположены вдоль оси Oy .

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$$

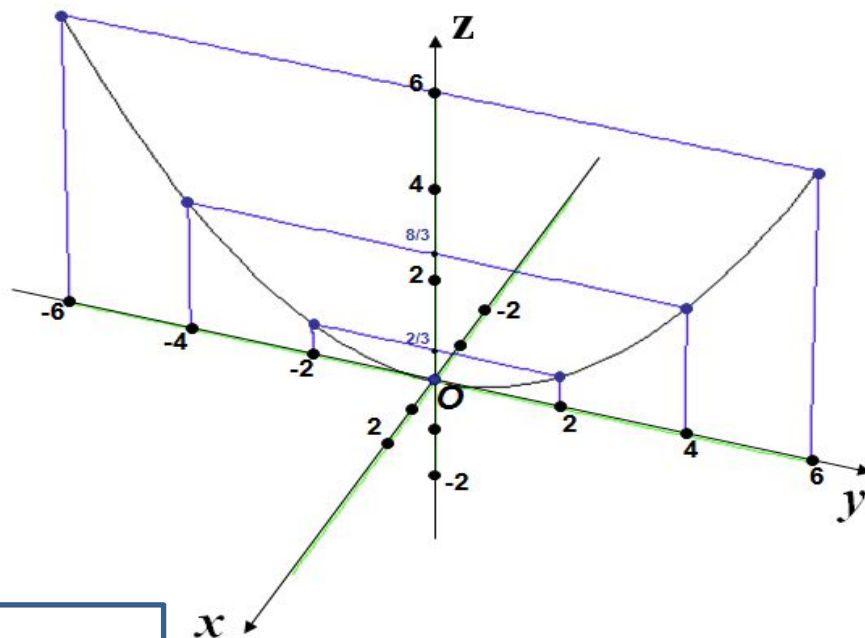


—

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$$

Сечение плоскостью YOZ :



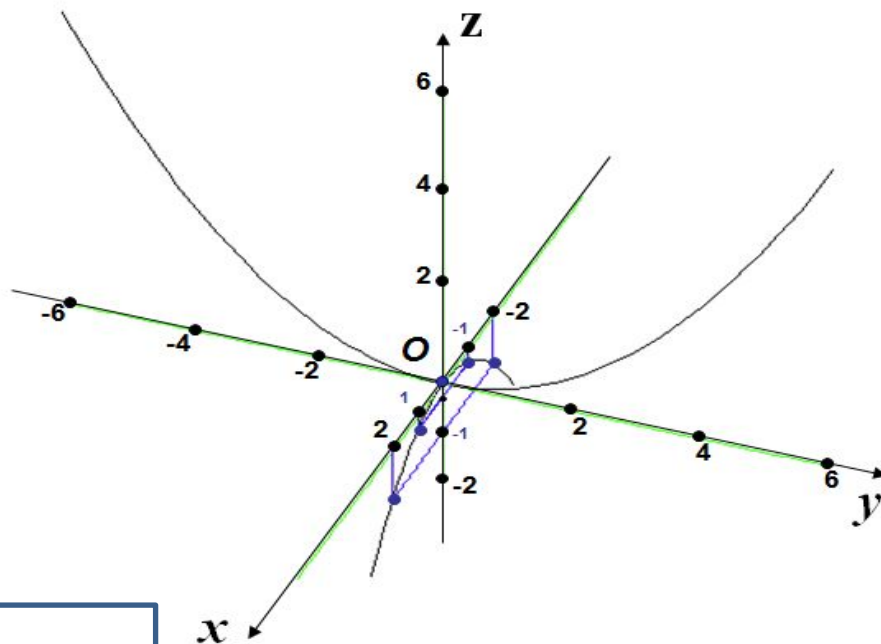
$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{6} = z \end{cases}$$

Первое сечение

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$$

Сечение плоскостью XOZ :



$$\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{x^2}{4} = z \end{cases}$$

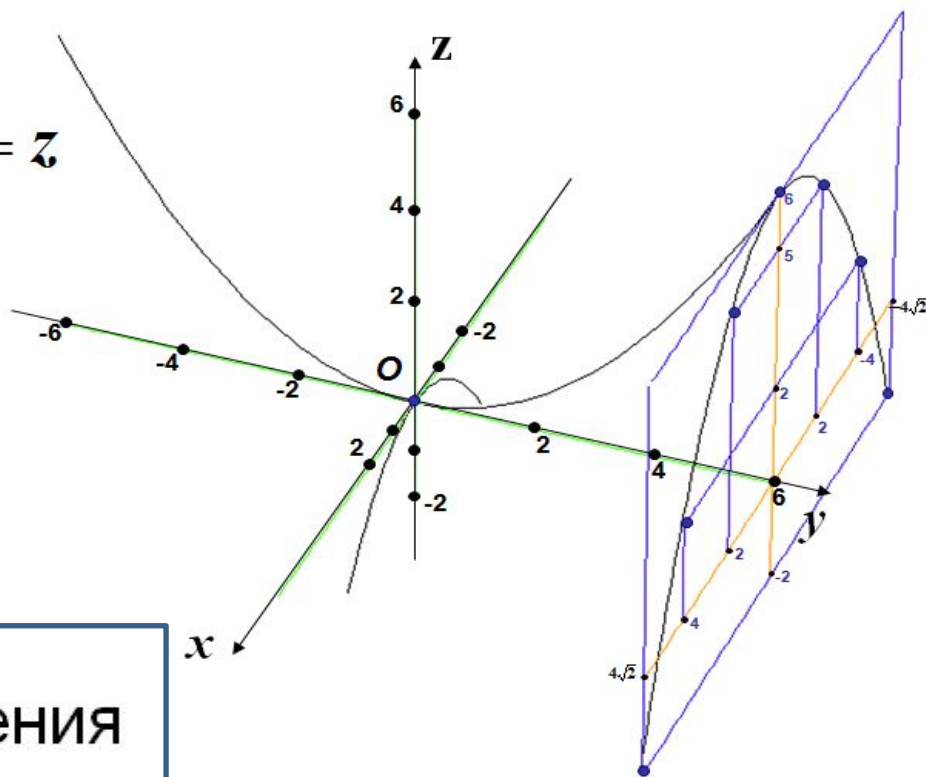
Два сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$$

Сечение плоскостью $y=6$, параллельной XOZ :

$$\begin{cases} y = 6 \\ -\frac{x^2}{4} + 6 = z \end{cases}$$

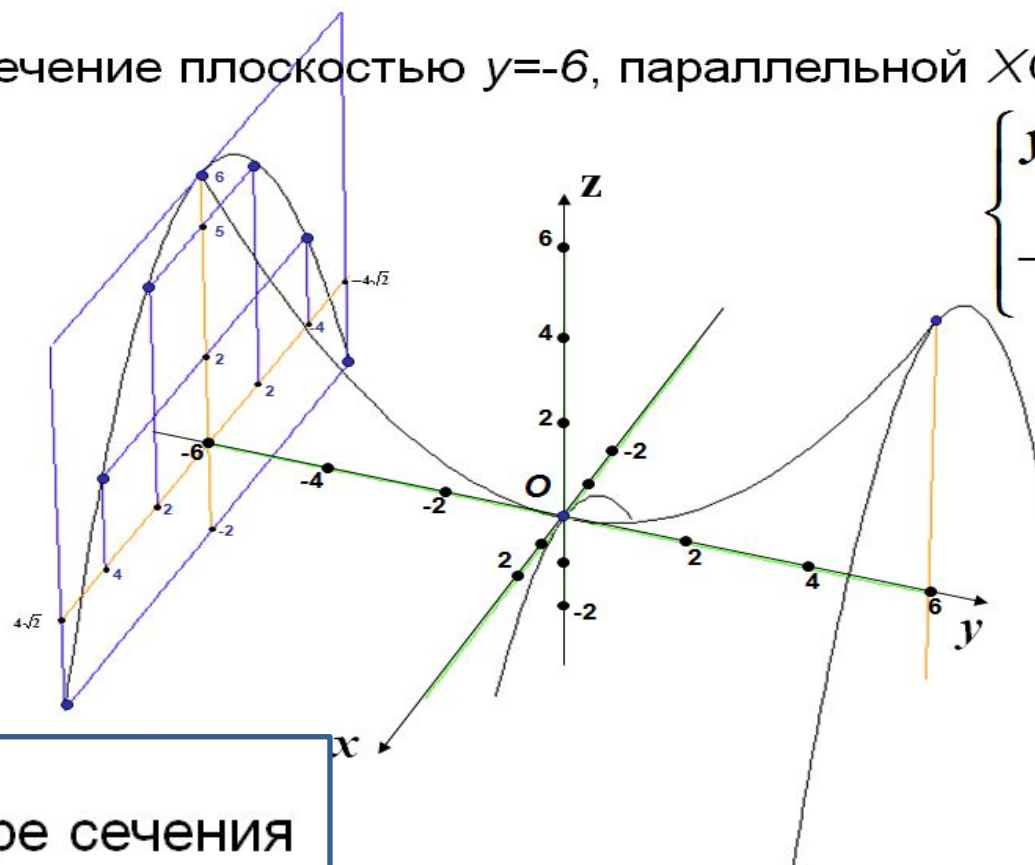


Три сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$$

Сечение плоскостью $y=-6$, параллельной XOZ :



$$\begin{cases} y = -6 \\ -\frac{x^2}{4} + 6 = z \end{cases}$$

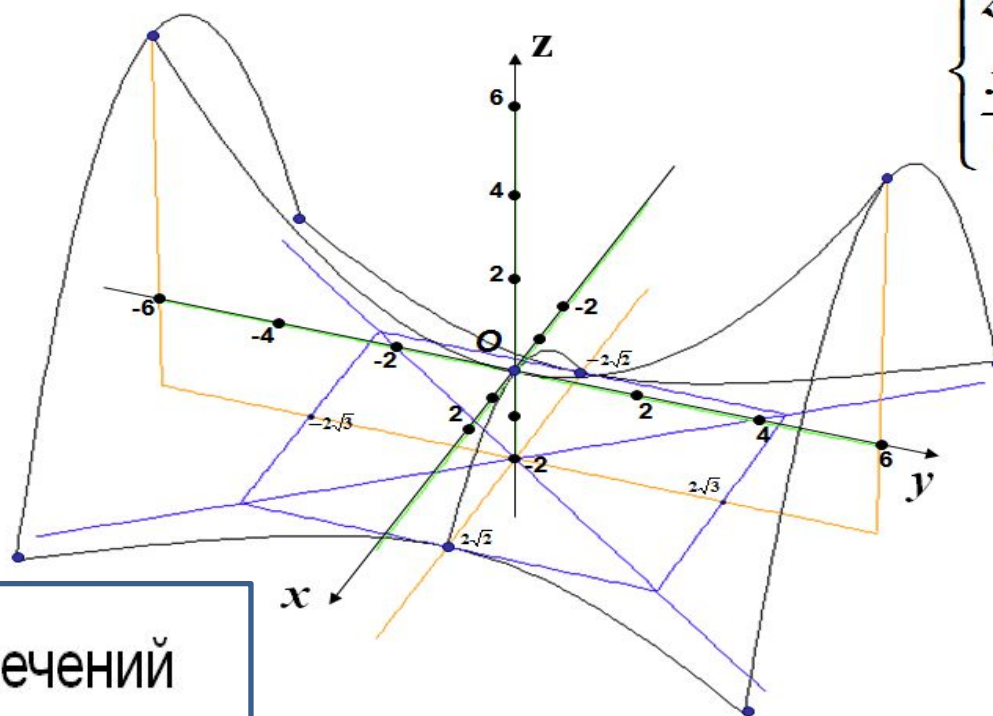
Четыре сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = z$$

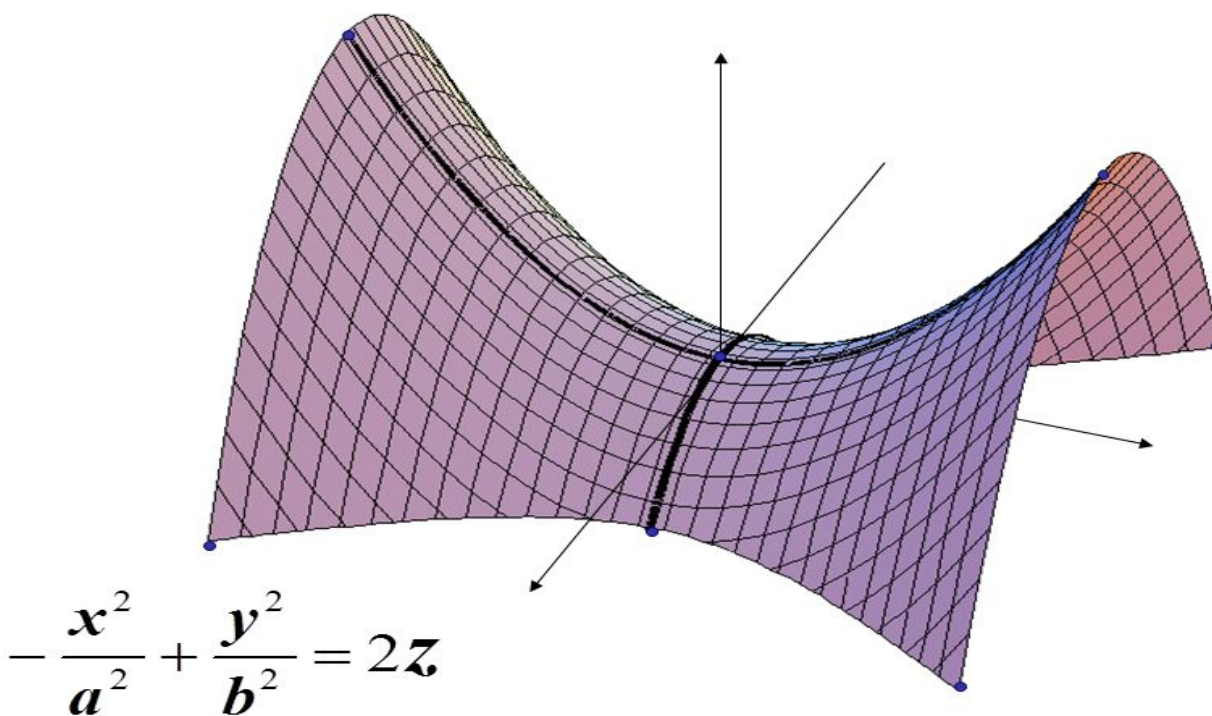
Сечение плоскостью $z=-2$, параллельной XOY :

$$\begin{cases} z = -2 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$$



Пять сечений

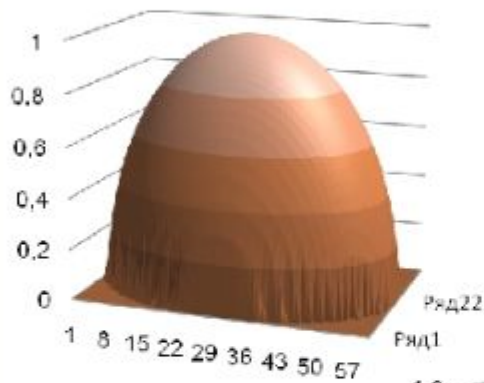
Гиперболический параболоид



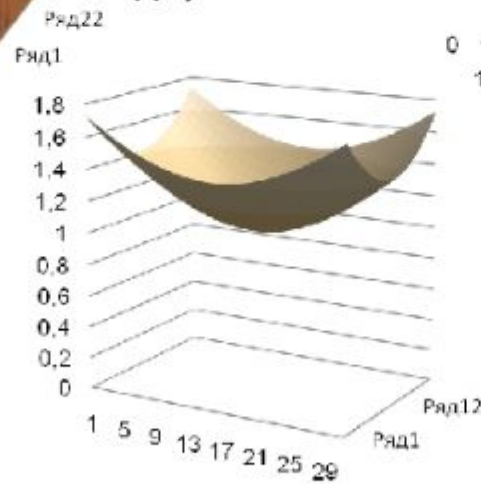
Графики поверхностей второго порядка

18

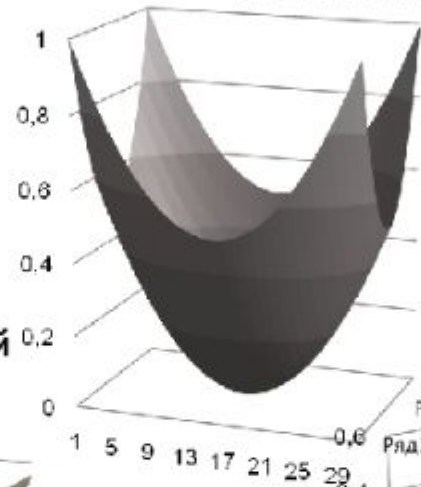
Эллипсоид



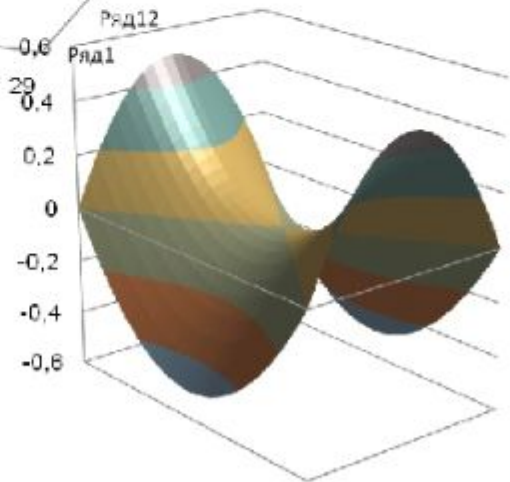
Гиперболоид двухполостный



Параболоид эллиптический



Седло



Приложения

Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основана работа параболических антенн, телескопов-рефлекторов с параболическим зеркалом, прожекторов, автомобильных фар и т. д.

Свойство двуполостного гиперболоида вращения отражать лучи, направленные в один из фокусов, в другой фокус, используется в телескопах системы Кассегрена и в антеннах Кассегрена.

- <http://www.youtube.com/watch?v=1jigfFYbXc8>