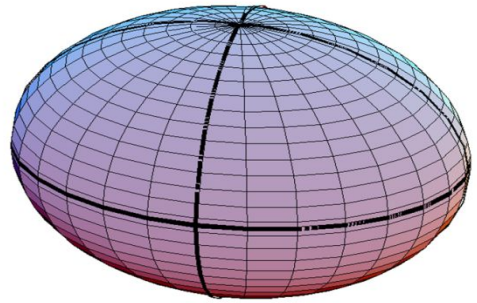
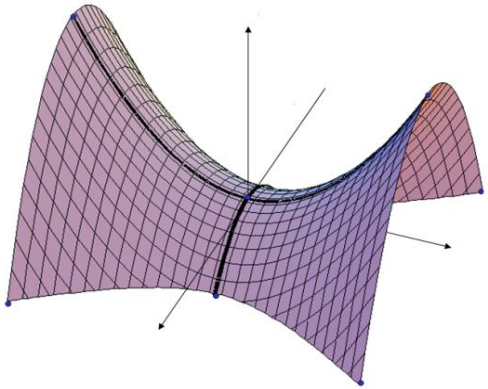
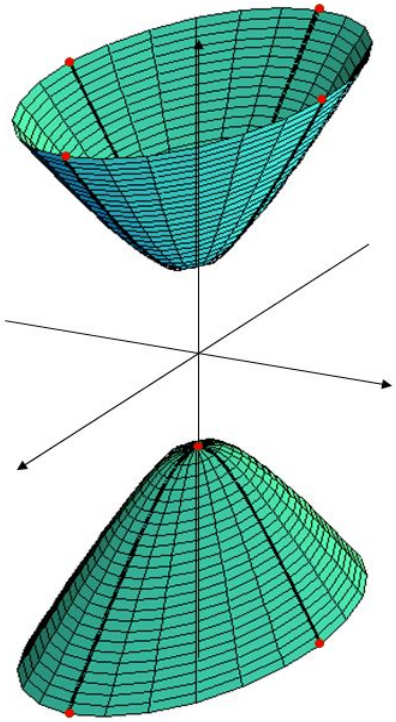
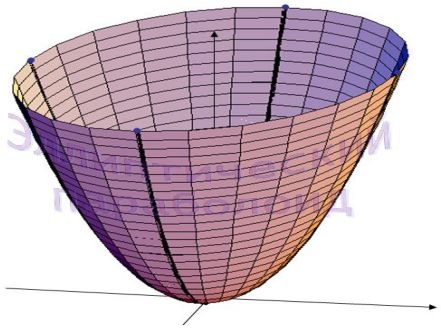
Поверхности второго порядка
1. Классификация
2. Исследование формы

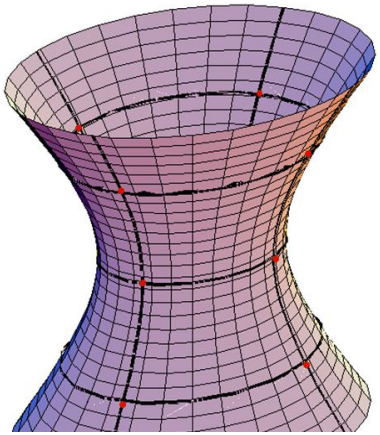
.











Поверхности второго порядка

Классификация

Алгебраическое описание

Определение. **Уравнением второго порядка от переменных** $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0 = 0, \qquad (1)$$

где α_{ij} и $\alpha_k \in \mathbb{R}$ для всех i, j, k, и хоть одно из чисел α_{ij} отлично от нуля.

Слагаемое $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j$ называется **квадратичной частью уравнения** (1), а слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0$ — его **линейной частью.**

ГМТ на плоскости, задаваемые одним уравнением второго порядка <u>с двумя переменными</u>

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{где } a>0,\ b>0,\ a\geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{где } a>0,\ b>0;$$

$$y^2=2px, \qquad \text{где } p>0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \qquad \text{где } a>0,\ b>0,\ a\geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \qquad \text{где } a>0,\ b>0,\ a\geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \qquad \text{где } a>0,\ b>0,\ a\geqslant b;$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \qquad \text{где } a>0;$$

$$x^2=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1, \qquad \text{где } a>0.$$

Поверхности второго порядка

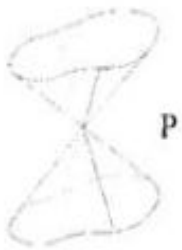
Поверхности второго порядка

Поверхности вращения

$F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z)=0$ вращением вокруг оси Oz

$F(y;\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ вращением вокруг Oy кривой $F(y;z)=0$

Конические поверхности



P

Цилиндрические поверхности

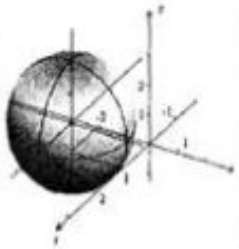
$F(x;y)=0$,

$F(x;z)=0$,

$F(y;z)=0$.

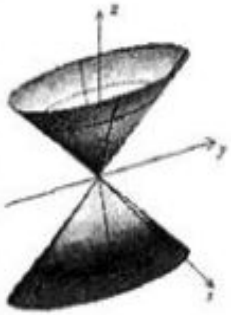
Сфера

$x^2+y^2+z^2=R^2$



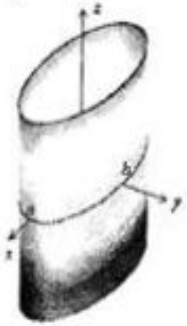
Конус второго порядка

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



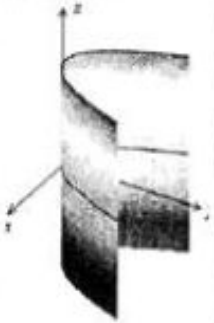
Эллиптический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



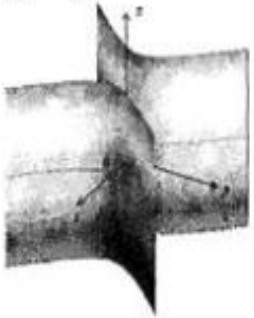
Параболический цилиндр

$y^2=2px$



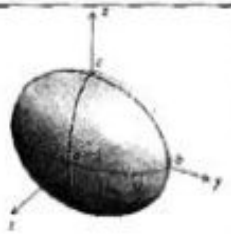
Гиперболический цилиндр

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



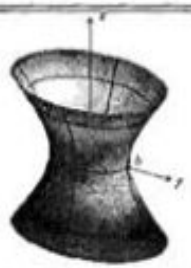
Эллипсоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



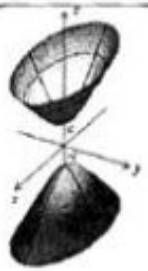
Однополостной гиперболоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



Двуполостной гиперболоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

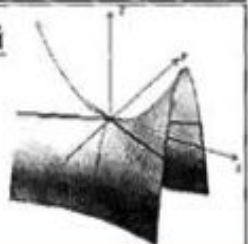


Эллиптический параболоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$

Гиперболический параболоид

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$

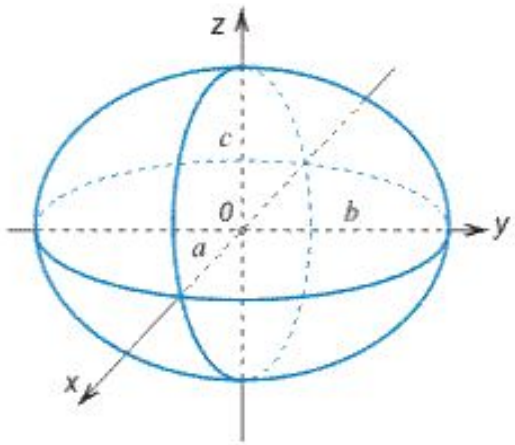


Фигуры вращения, эллипсоиды

Эллипсоид

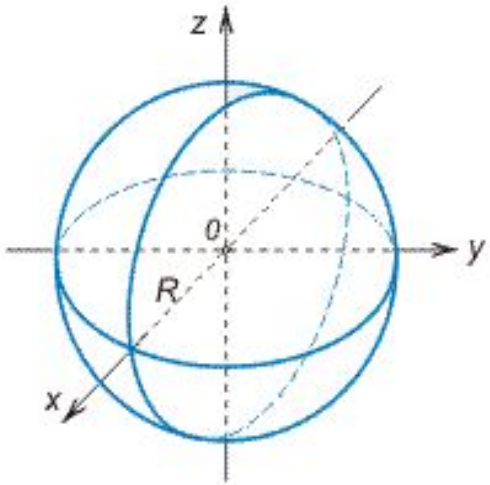
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a, b, c — полуоси



Сфера (частный случай эллипсоида)

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

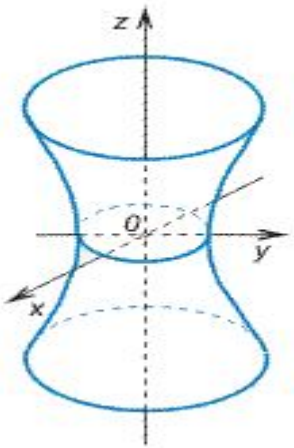


Гиперболоиды: Однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, двуполостный — вокруг действительной.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

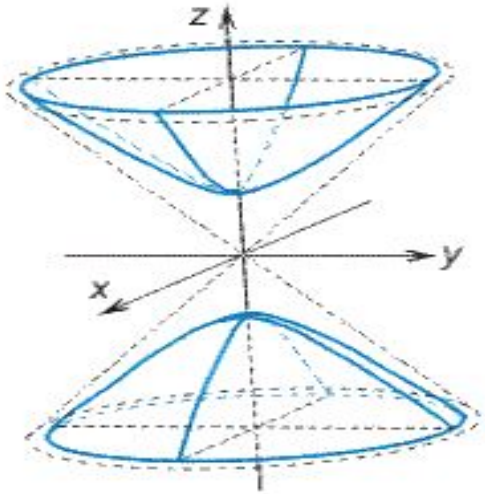
c — действительная полуось,
a и b — мнимые полуоси



Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

c — действительная полуось,
a и b — мнимые полуоси

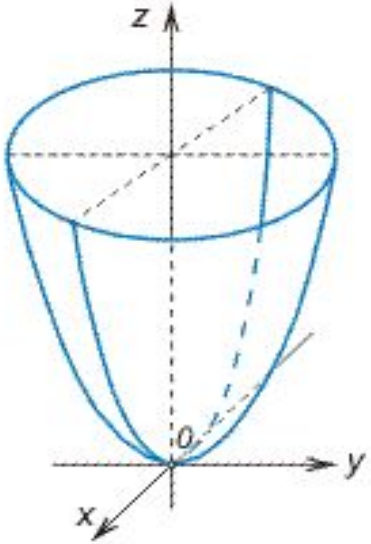


Параболоиды
Эллиптический параболоид

если a=b - эллиптический параболоид представляет собой поверхность вращения, образованную вращением параболы вокруг её оси симметрии.

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

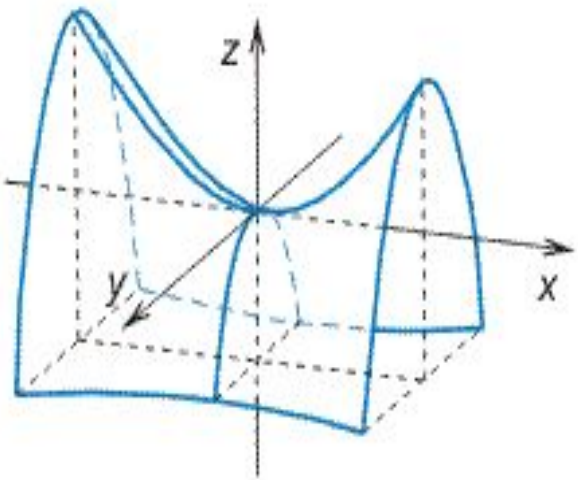


Параболоиды

Гиперболический параболоид может быть образован движением параболы, ветви которой направлены вниз, по параболе, ветви которой направлены вверх

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

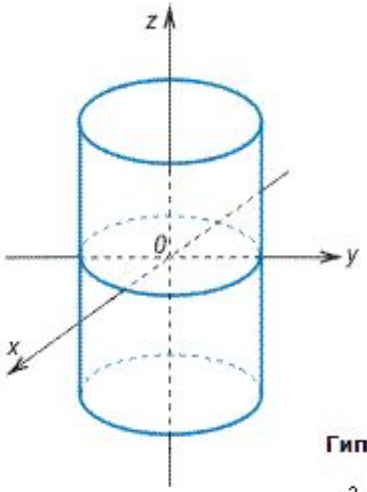


Цилиндрическая поверхность, цилиндры

Эллиптический цилиндр

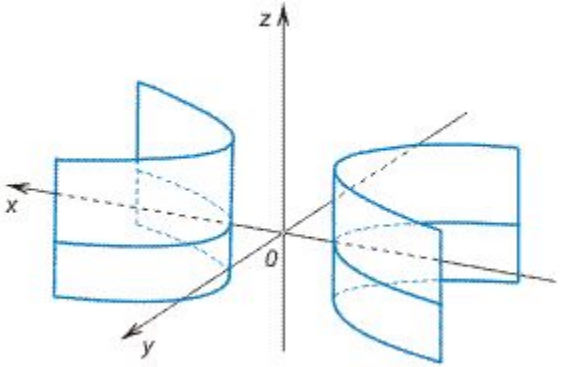
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a и b — полуоси



Гиперболический цилиндр

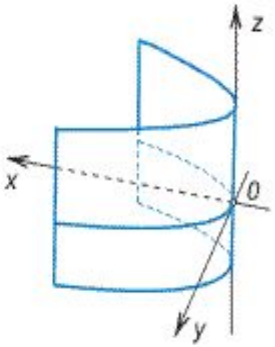
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Параболический цилиндр

$$y^2=2px$$

p — фокальный параметр

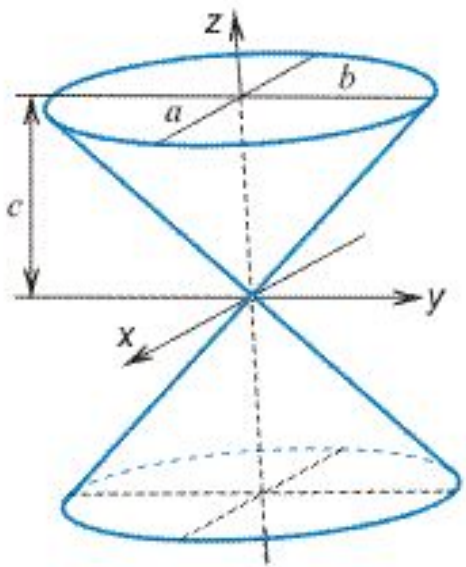


Коническая поверхность, конус

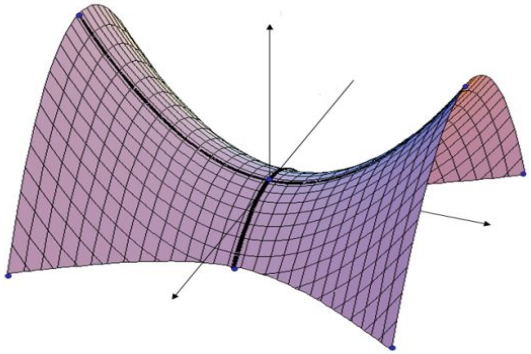
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Вершина конуса в начале координат, направляющая кривая — эллипс с полуосями a и b, плоскость которого находится на расстоянии c от начала координат



	Признаки вида						Название поверхности
Центральные поверхности	$\delta \neq 0$	Эллипти-ческий тип	$\begin{cases} \tau_2 > 0, \\ \tau_1 \cdot \delta > 0 \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака		$\Delta < 0$		Эллипсоид
					$\Delta > 0$		Мнимый эллипсоид
					$\Delta = 0$		Мнимый конус
		Гиперболи-ческий тип	$\left[\begin{array}{l} \tau_2 \leq 0, \\ \tau_1 \cdot \delta \leq 0 \end{array}\right.$ $\Updownarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ разных знаков		$\Delta > 0$		Однополостный гиперболоид
					$\Delta < 0$		Двуполостный гиперболоид
					$\Delta = 0$		Конус
Нецентральные поверхности	$\delta = 0$	Параболический тип	$\Delta < 0$				Эллиптический параболоид
			$\Delta > 0$				Гиперболический параболоид
			$\Delta = 0$	$\tau_2 > 0$	$\tau_1 \cdot \kappa_2 < 0$		Эллиптический цилиндр
					$\tau_1 \cdot \kappa_2 > 0$		Мнимый эллиптический цилиндр
					$\kappa_2 = 0$		Пара мнимых пересекающихся плоскостей
				$\tau_2 < 0$	$\kappa_2 \neq 0$		Гиперболический цилиндр
					$\kappa_2 = 0$		Пара пересекающихся плоскостей
				$\tau_2 = 0$	$\kappa_2 \neq 0$		Параболический цилиндр
					$\kappa_2 = 0$	$\kappa_1 < 0$	Пара параллельных плоскостей
						$\kappa_1 > 0$	Пара мнимых параллельных плоскостей
						$\kappa_1 = 0$	Пара совпадающих плоскостей



Поверхности второго порядка

Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям методом параллельных сечений

Эллипсоид

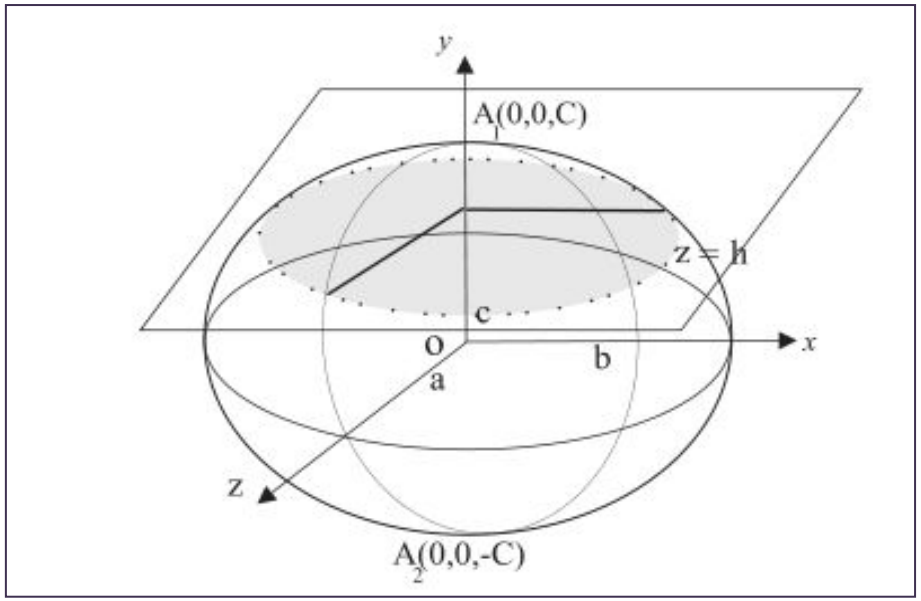
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

Рассечем поверхность плоскостями $z = h\,(|h| \le c)$. Получим кривые с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h.$$

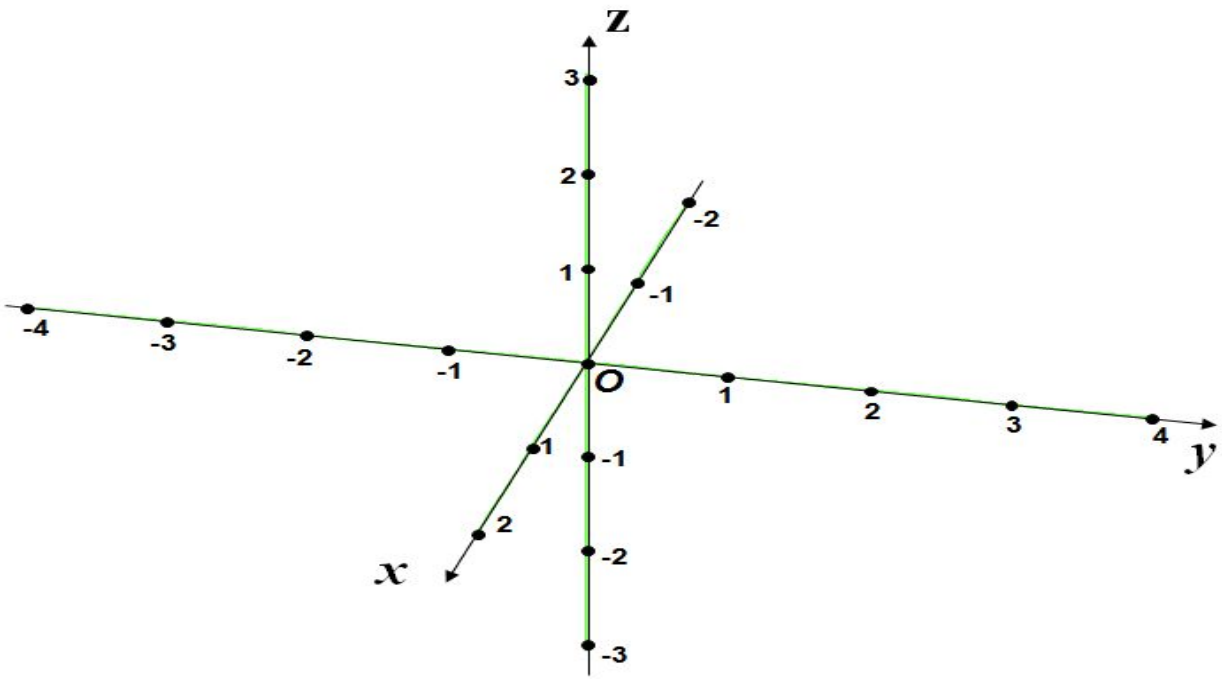
Это эллипс с полуосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. При $h = 0$ эллипс имеет наибольшие полуоси. Когда $|h|$ растет, то полуоси эллипсов уменьшаются и при $|h| = c$ эллипсы вырождаются в точки $A_1(0;0;c)$ и $A_2(0;0;-c)$

Эллипсоид заключен в прямоугольном параллелепипеде со сторонами 2a,2b,2c.



Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

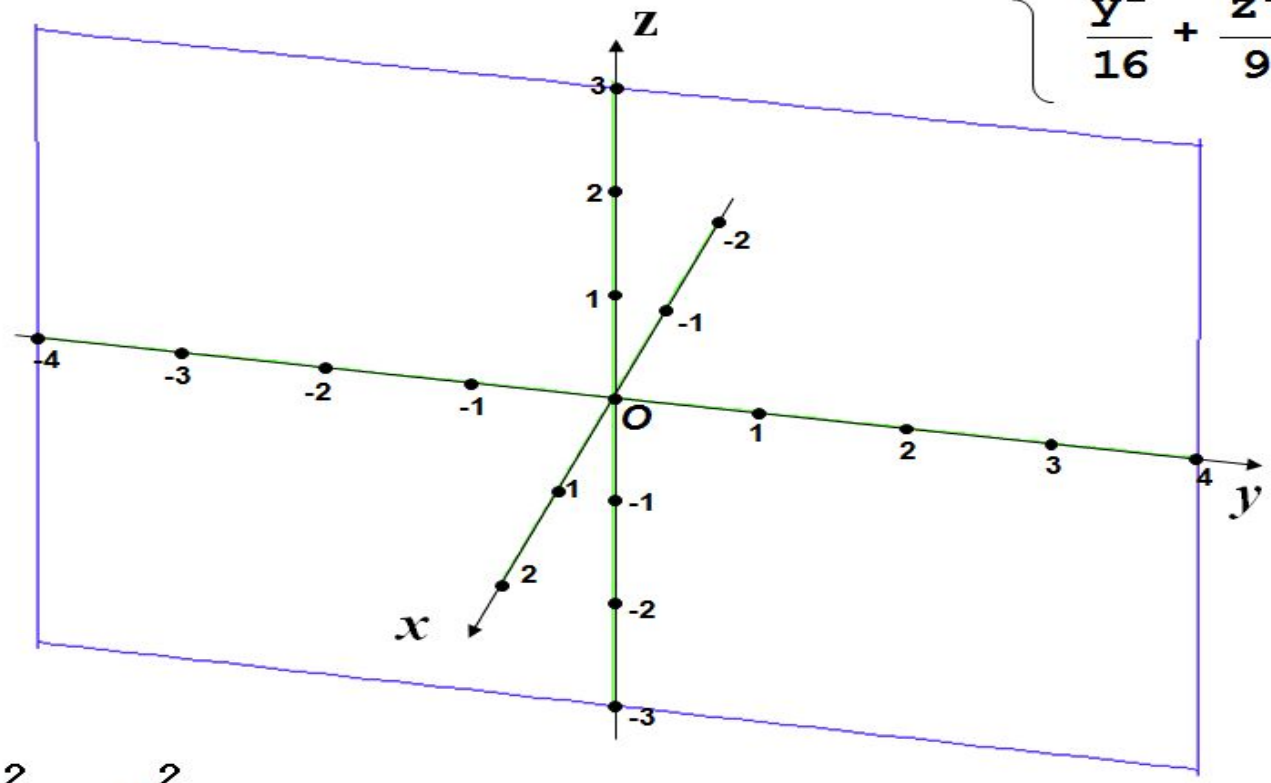
a = 2; b = 4; c = 3

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью YOZ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$



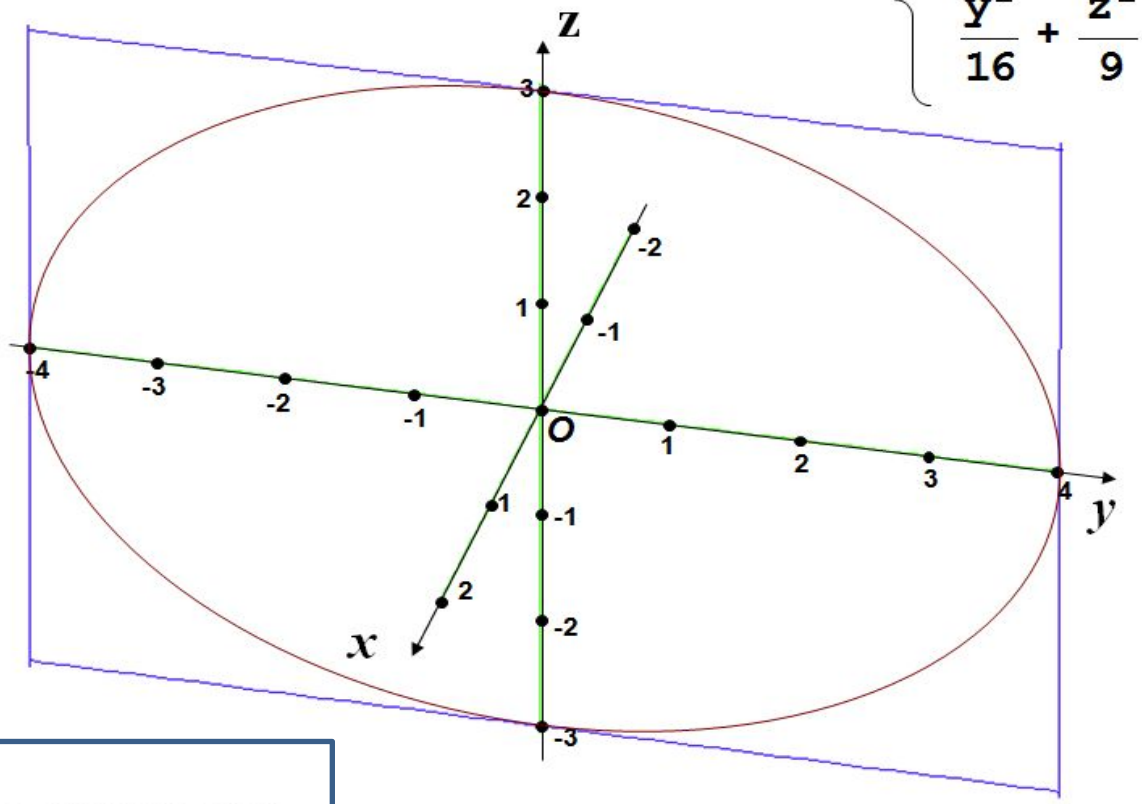
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью YOZ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$



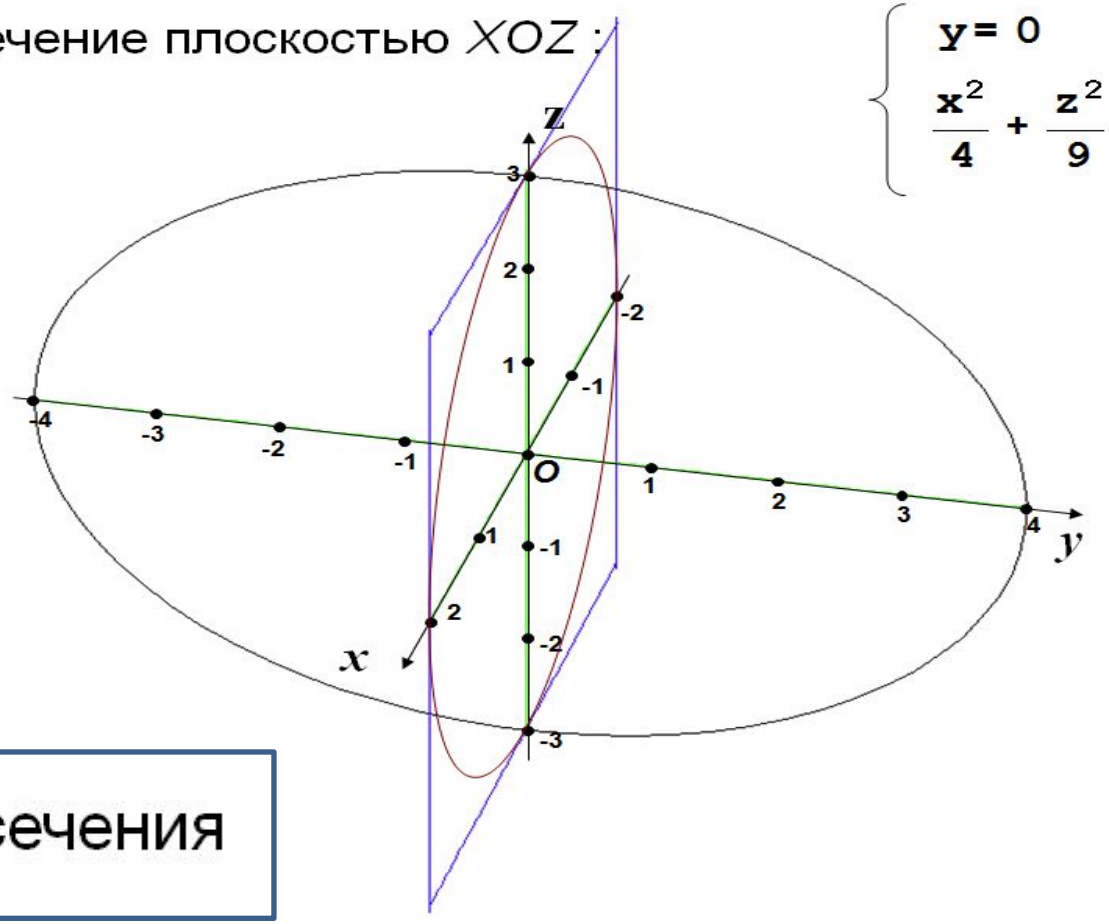
Первое сечение

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью XOZ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$



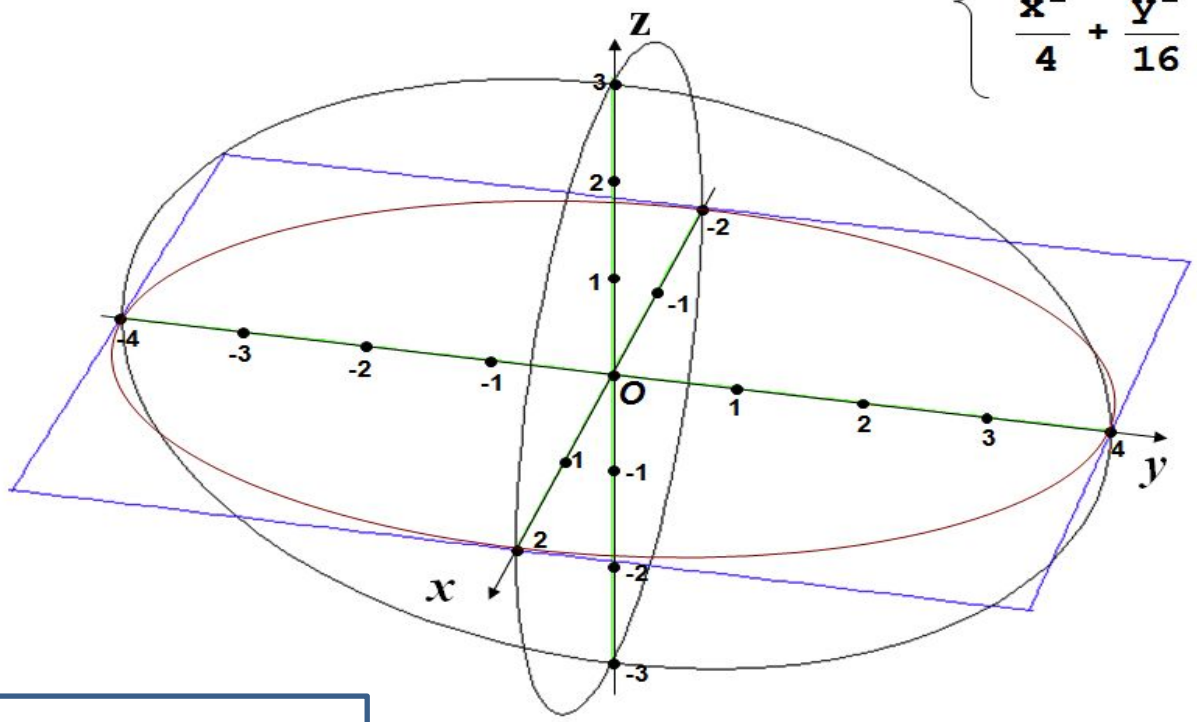
Два сечения

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Сечение плоскостью XOY:

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$

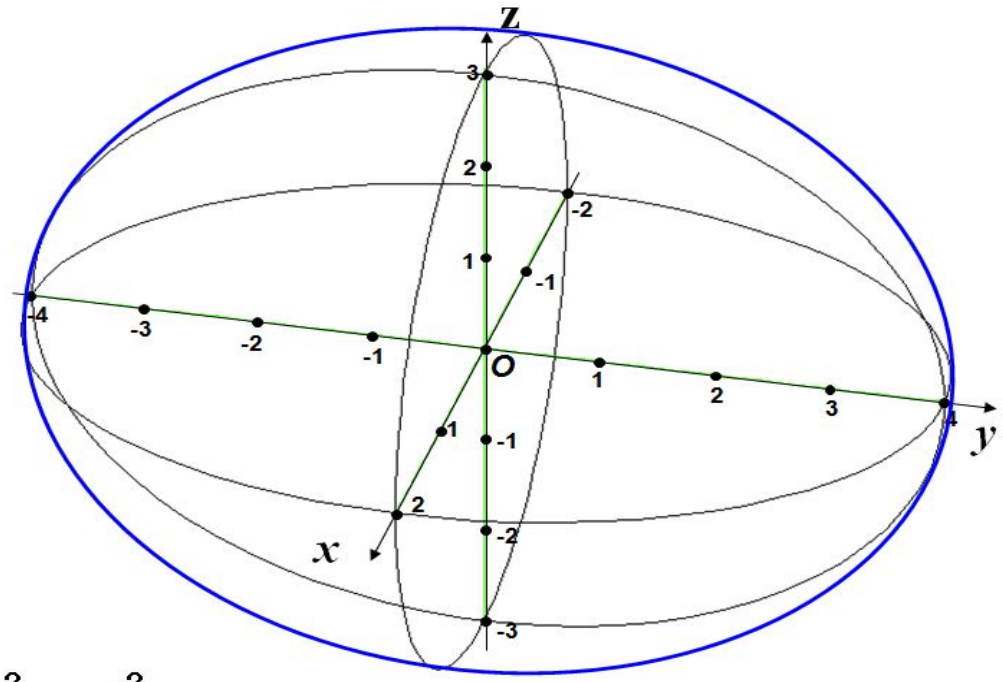


Три сечения

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

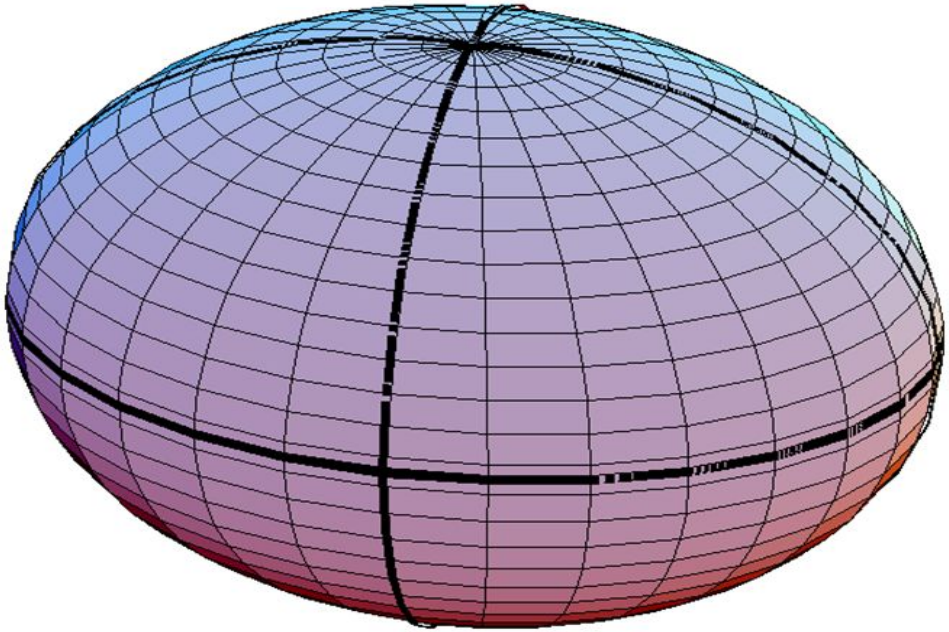
Все сечения :



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

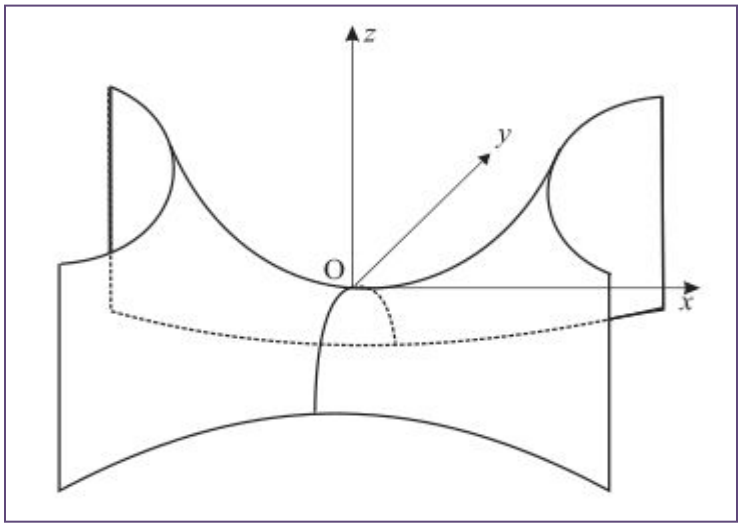
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$



Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Сечение координатной плоскостью $z = 0$ есть пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \left(y = \pm\frac{b}{a}x\right).$$

Сечение плоскостями $z = h$ дает гиперболы с уравнениями

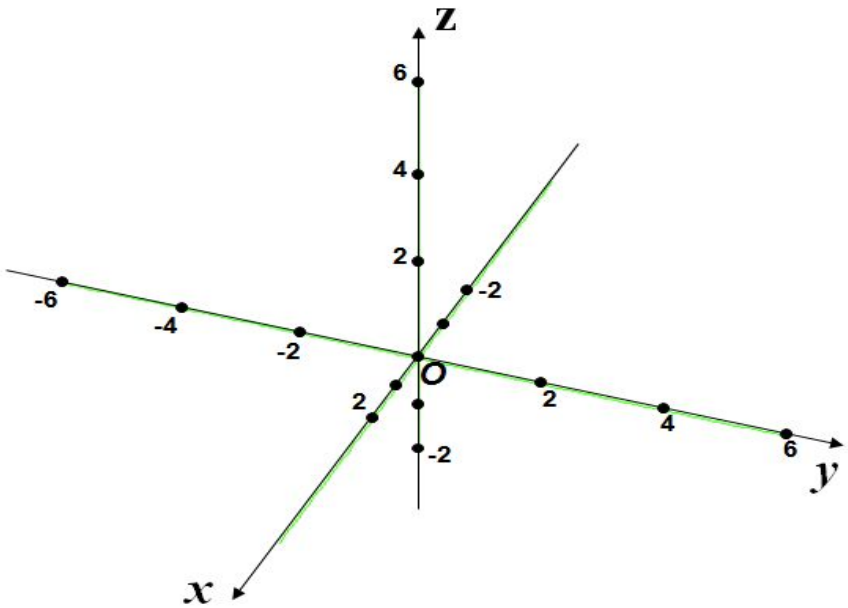
$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1,$$

причем при $h > 0$ ветви расположены вдоль оси Ox, а при $h < 0$ ветви расположены вдоль оси Oy.

Сечение плоскостью $x = 0$ дает в плоскости yOz параболу $z = -\frac{y^2}{b^2}$, ветви которой направлены вниз.

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$



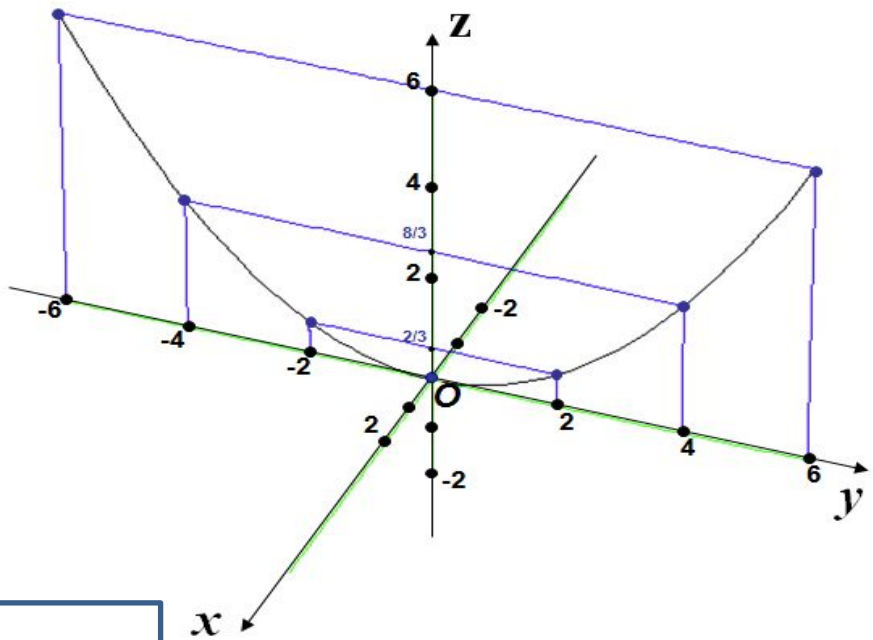
–

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

Сечение плоскостью YOZ :

$$\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y^2}{6}=z \end{cases}$$



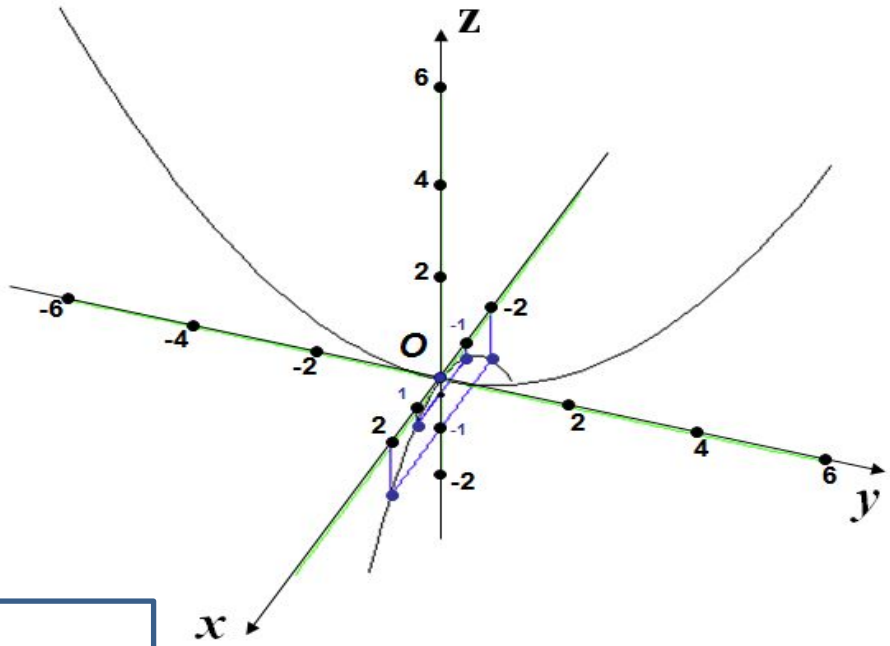
Первое сечение

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

Сечение плоскостью XOZ :

$$\begin{cases} y=0 \\ -\dfrac{x^2}{4}=z \end{cases}$$



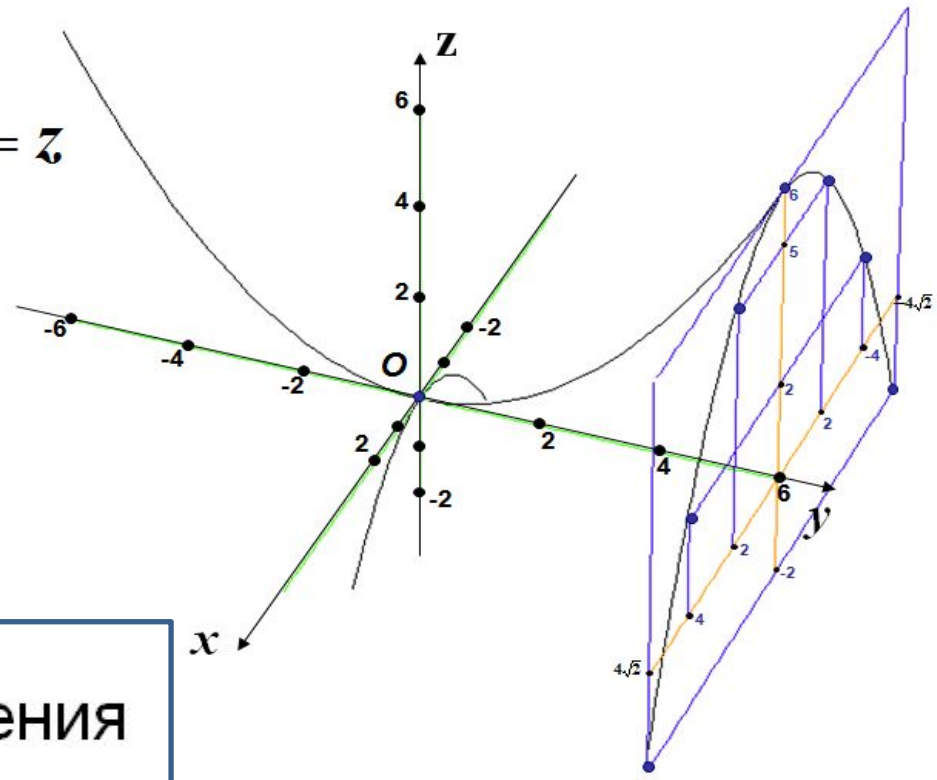
Два сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

Сечение плоскостью $y=6$, параллельной XOZ :

$$\begin{cases} y=6 \\ -\dfrac{x^2}{4}+6=z \end{cases}$$



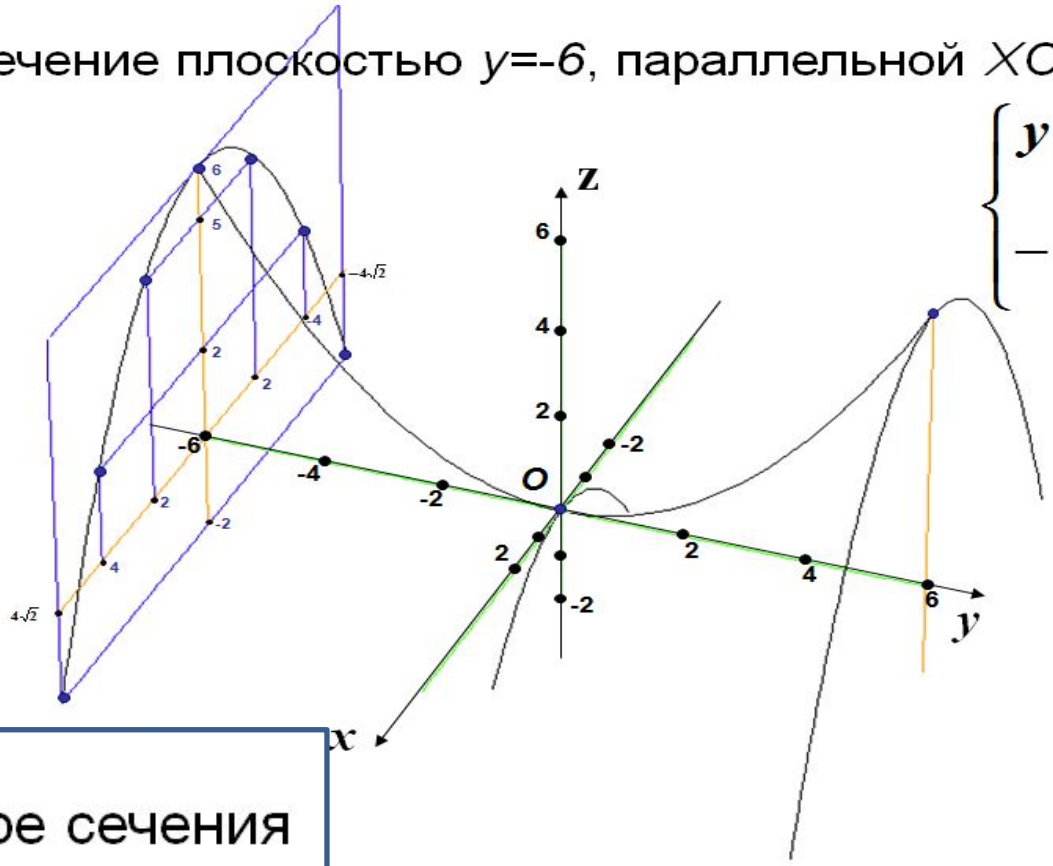
Три сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

Сечение плоскостью $y=-6$, параллельной XOZ :

$$\begin{cases} y=-6 \\ -\dfrac{x^2}{4}+6=z \end{cases}$$



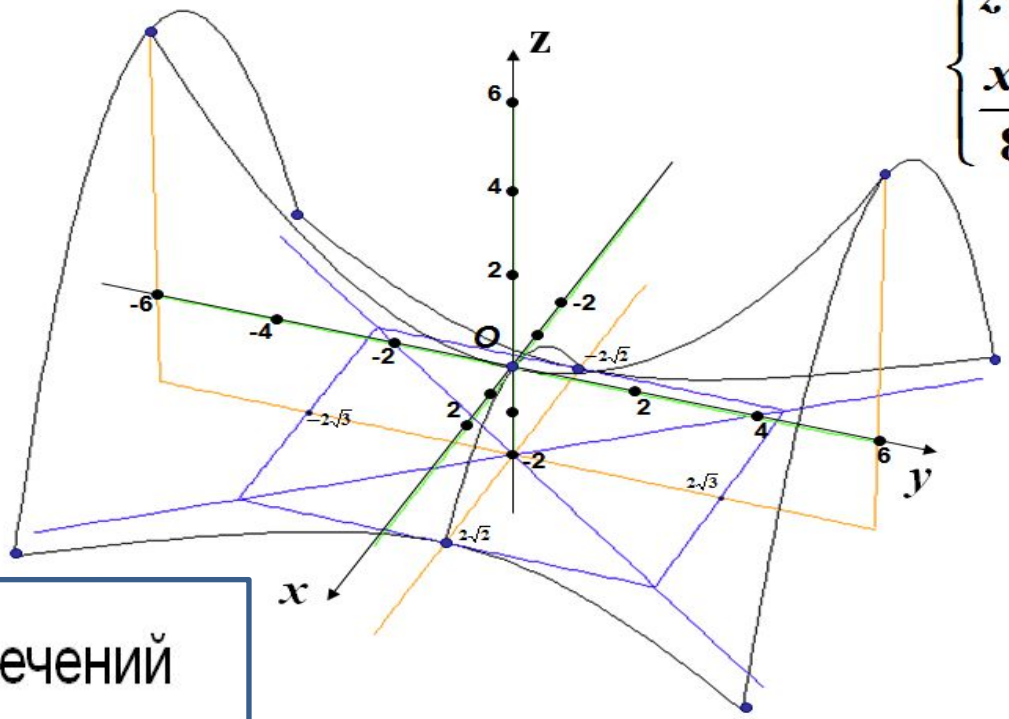
Четыре сечения

Гиперболический параболоид

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=z$$

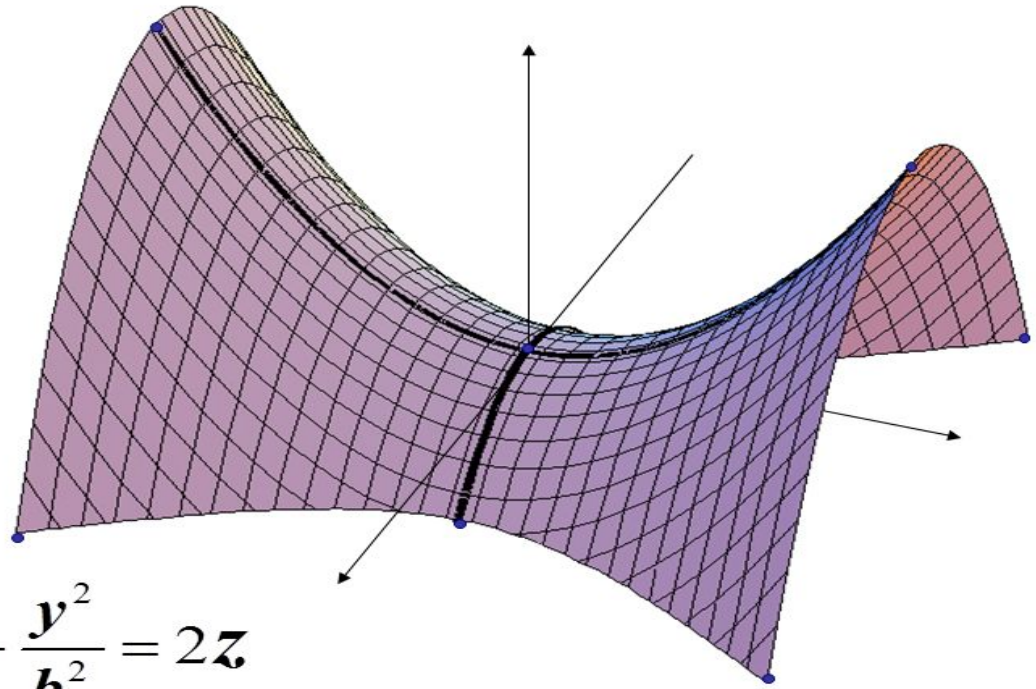
Сечение плоскостью z=-2, параллельной XOY:

$$\begin{cases} z=-2 \\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$$



Пять сечений

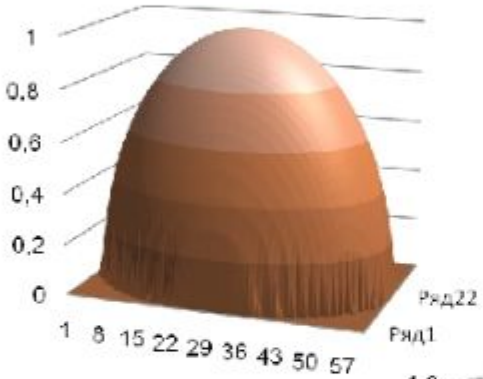
Гиперболический параболоид



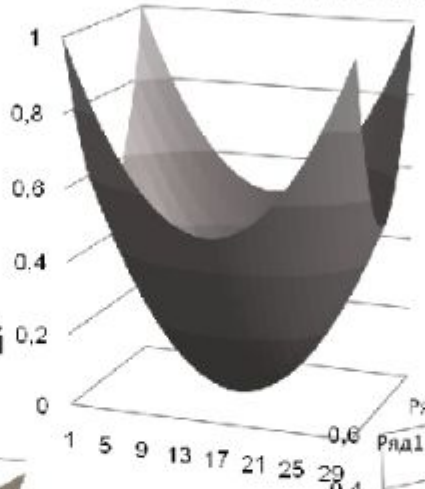
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Графики поверхностей второго порядка

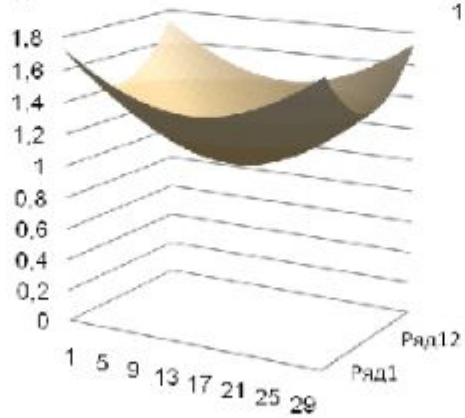
Эллипсоид



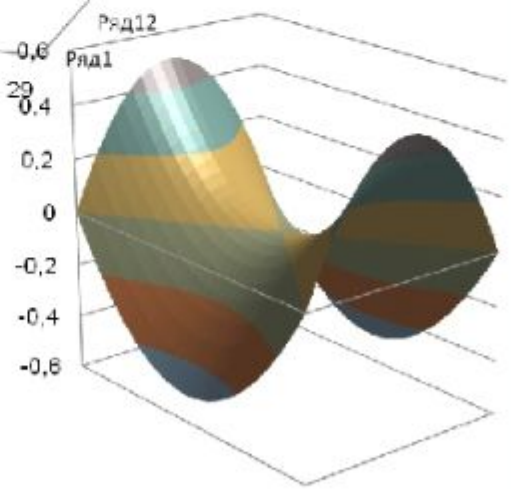
Параболоид эллиптический



Гиперболоид двухполостный



Седло



Приложения

Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основана работа параболических антенн, телескопов-рефлекторов с параболическим зеркалом, прожекторов, автомобильных фар и т. д.

Свойство двуполостного гиперболоида вращения отражать лучи, направленные в один из фокусов, в другой фокус, используется в телескопах системы Кассегрена и в антеннах Кассегрена.

- http://www.youtube.com/watch?v=1jigfFYbXc8