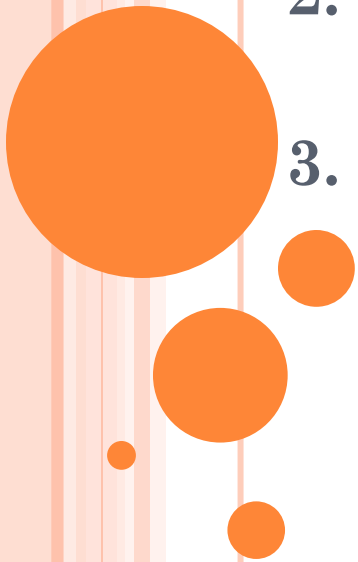


## **ТЕМА 1.6 «СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ» (4 ЧАСА)**

- 1. Понятие о средней величине, её основные элементы.**
- 2. Виды средних величин и порядок их расчёта.**
- 3. Показатели вариации.**



## «1»

Каждая единица совокупности характеризуется своим признаком (показателем), который отличается от других единиц.

**Например:** зарплата – Иванова – 15000 руб. ( $x_1$ )  
Петрова – 12000 руб. ( $x_2$ ) } индивидуальные  
Сидорова - 13000 руб. ( $x_3$ ) } величины

А для характеристики совокупности в целом рассчитывают среднюю величину ( $\bar{X}$ ).

**Средние величины** - это обобщающие показатели, выражающие типичные размеры варьирующих признаков качественно однородных общественных явлений.

Для правильного исчисления средней необходимы следующие условия:

- ✓ совокупность должна быть достаточно большой (массовой);
- ✓ совокупность должна быть однородной;
- ✓ если совокупность разнородна, то её нужно разделить на однородные группы и для каждой группы исчислить свою среднюю величину.

**Например:** зарплата, руб.

5600	
5800	} $\bar{x}_1 = 5833,3$ руб.
6100	
9200	
10400	} $\bar{x}_2 = 10366,7$ руб.
11500	
18900	
21300	} $\bar{x}_3 = 20933,3$ руб.



## Основные элементы средних величин:

- ❑ **Варианта** ( $x$ ) – столбец (признак), из которого рассчитывается средняя величина.
- ❑ **Частота (весы)** ( $f$ ) – столбец, который показывает, сколько раз повторяется данный признак (варианта).
- ❑  $n$  – число единиц совокупности (может быть равен  $\sum f$ ).
- ❑  $W = x \cdot f$  - это произведение варианты и частоты.

**Например:**  $x$ - урожайность, ц/га

$f$ - посевная площадь, га

$W$  – валовый сбор, ц

или  $x$  – зарплата 1 работника, руб.

$f$ - количество работников, чел.

$W$  – общий фонд зарплат, руб. и т.п.

**Например:** Иванов – 15000 руб.

Петров – 12000 руб.

Сидоров - 13000 руб.

$\sum f = n = 3$      $\sum x = 40000$



В зависимости от исходной информации различают несколько видов средних величин:

□ **средняя арифметическая:**

а) **простая** – вычисляется в том случае, если признак, из которого вычисляется средняя, встречается один или одинаковое число раз.

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

**Например:** зарплата по бригаде, руб.

Иванов – 15000

Петров - 12000

Сидоров – 13000

Решение: 
$$\bar{X} = \frac{15000 + 12000 + 13000}{3} = 13333,33 \text{ руб.} - \text{средняя зарплата 1 работника}$$

**Например:** Квартал      Производство хлеба, т

1                      256

2                      284

3                      292

4                      301

Решение: 
$$\bar{X} = \frac{256 + 284 + 292 + 301}{4} = 283 \text{ т} - \text{среднеквартальный объём производства хлеба}$$

б) **взвешенная** - вычисляется в том случае, если признак, из которого вычисляется средняя, встречается неодинаковое число раз.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

**Например:**

Зарплата по бригаде, руб. (x)	Количество чел. (f)
15200	3
16400	6
14700	4

Решение:  $\bar{x} = \frac{15200 \cdot 3 + 16400 \cdot 6 + 17400 \cdot 4}{3 + 6 + 4} = 16431$  руб. – средняя зарплата 1 работника

**Например**

:

№ бригады	Урожайность зерновых, ц/га (x)	Посевная площадь, га (f)
1	15	190
2	18	210
3	16	250

Решение:  $\bar{x} = \frac{15 \cdot 190 + 18 \cdot 210 + 16 \cdot 250}{190 + 210 + 250} = \frac{10630}{650} = 16,4$  (ц/га) – средняя урожайность зерновых



□ **средняя гармоническая:**

а) **взвешенная** – вычисляется в том случае, если даны варианты (x) и произведение (W) и не известны частоты (f).

$$\bar{x} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x}} = \frac{W_1 + W_2 + \dots + W_n}{\frac{W_1}{x_1} + \frac{W_2}{x_2} + \dots + \frac{W_n}{x_n}}$$

**Например:**

№ бригады	Урожайность, ц/га (x)	Валовый сбор, ц (W)
1	10	1600
2	12	2400
3	15	3750

Решение:  $\bar{x} = \frac{1600 + 2400 + 3750}{\frac{1600}{10} + \frac{2400}{12} + \frac{3750}{15}} = \frac{7750}{610} = 12,7 \text{ (ц/га)}$

б) **простая** - встречается и используется очень редко

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$$



□ **средняя хронологическая (простая)** – вычисляется в моментном динамическом ряду с равными интервалами времени:

$$x = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + \frac{1}{2}x_n}{n - 1}$$

где  $n$  – число периодов

**Например:** имеется численность работников на:

1.01.- 126 чел.

1.02.- 132 чел.

1.03.- 138 чел.

1.04.- 129 чел.

Определить среднюю численность работников за 1 квартал?

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 126 + 132 + 138 + \frac{1}{2} \cdot 129}{4 - 1}$$

Решение:  $x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 126 + 132 + 138 + \frac{1}{2} \cdot 129}{4 - 1} = 133$  (чел.) – средняя численность работников

4 - 1

за 1 квартал

□ **средняя хронологическая (взвешенная)** – вычисляется в моментном динамическом ряду с разными интервалами времени:

$$x = \frac{(x_1 + x_2) \cdot f_1 + (x_2 + x_3) \cdot f_2 + \dots + (x_{n-1} + x_n) \cdot f_{n-1}}{2 \sum f}$$

где  $f$  – промежуток времени между датами (см. тему «Ряды динамики»)



□ **средняя геометрическая** – применяется для расчёта среднего темпа роста (тенденции) в рядах динамики:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} \quad \text{или} \quad x = \sqrt[n-1]{Y_n / Y_0}$$

где  $x_1, x_2, \dots$  – цепные темпы роста в рядах динамики, или  $Y_n$  – конечный уровень ряда,  $Y_0$  – начальный уровень ряда  
 $n$  – число периодов (см. тему «Ряды динамики»)

□ **средняя из интервального ряда** – формула выбирается исходя из имеющихся данных (арифметическая или гармоническая).

При этом, если признак, из которого рассчитывается средняя, выражен в виде интервалов, то вначале необходимо эти интервалы преобразовать в дискретный ряд (ряд с одним числом) или найти середину интервала. Эти данные принимаются за варианты ( $x$ ).

**Например:** По имеющимся данным рассчитать средний возраст работников предприятия:

Группы работников по возрасту, лет	Количество работников, чел. (f)	*Дискретный ряд (середина интервала), лет (x)	*x·f
18 – 24	15	21	315
24 – 36	28	30	840
36 – 48	19	42	798
св. 48	8	54	432
Итого:	70	x	2385

\* - расчётные графы

$$x = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{2385}{70} = 34 \text{ (года)} - \text{средний возраст работников предприятия}$$





□ **средняя прогрессивная** – формула также выбирается исходя из имеющихся данных (арифметическая или гармоническая).

Принцип расчёта заключается в том, что берутся не все данные условия, а выбираются наилучшие показатели варианты.

**Например:** По имеющимся данным рассчитать среднюю прогрессивную сменную выработку:

№ предприятия	*1	2	3	*4	*5	*6	7
Сменная выработка 1 работника, дет.(x)	90	50	48	75	82	60	36
Общая выработка, дет. (W)	540	400	384	375	492	420	324

\* - наилучшие данные по сменной выработке 1 работника

$$x = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x}} = \frac{540 + 375 + 492 + 420}{\frac{540}{90} + \frac{375}{75} + \frac{492}{82} + \frac{420}{60}} = 76 \text{ (дет.)} - \text{средняя прогрессивная сменная выработка 1 работника}$$



### «3»

Информации о средних уровнях исследуемых показателей обычно бывает недостаточно для анализа экономических явлений или процессов. Поэтому необходимо учитывать вариацию (отклонение) значений отдельных единиц совокупности относительно средней величины, которая является важной характеристикой изучаемой совокупности.

Так, например, если взять совокупность из 10-30 с./х.-предприятий района и сравнить по ним такие показатели, как: урожайность культур, продуктивность животных, трудоёмкость или себестоимость 1 ц продукции, то эти показатели будут отличаться при переходе от одного хозяйства к другому, т.к. зависят от многочисленных факторов, влияющих на них. А сочетание этих факторов в хозяйствах различно, поэтому и результаты будут различаться (варьировать).

**Например:** На урожайность влияют следующие факторы: сорт семян, их качество, состав почвы, количество вносимых удобрений, сроки и качество работ, климатические условия и т.д.

На продуктивность коров влияет: уровень и качество кормления, условия содержания, породный и возрастной состав животных и т.д.

Чем лучше сочетание этих факторов, тем выше и результат.

Однако на практике, такое сочетание редко, поэтому показатели колеблются (варьируют).

В связи с этим, рассматриваемая совокупность по данному признаку может быть **однородной** или **разнородной**. А вот чем однороднее совокупность, тем меньше будет и вариация признака.

**Например:** Рассмотрим вариацию урожайности зерновых по 10 хозяйствам Лукояновского района Нижегородской области:

Наименование с.-х.предприятий	Урожайность, ц /га
Полянский	24,1 - $x_{\max}$
Родина	19,4
Поя	18,9
Единство	17,4
Победа	16,4
Крюковское	13,3
Пичингушский	12,9
Красный Октябрь	12,7
Дружба	9,1
Правда	7,6 - $x_{\min}$

Для того, чтобы правильно измерить вариацию, рассчитывают следующие показатели:

□ **Размах вариации** – это разность между максимальным и минимальным значениями признака:

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$



❑ **Среднее линейное отклонение** - это средняя арифметическая из абсолютных отклонений вариант от их средней:

$$\text{для не взвешенного ряда} - d = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

$$\text{для взвешенного ряда} - d = \frac{\sum |x - \bar{x}| \cdot f}{\sum f}$$

❖ Единицы измерения те же, что и у показателя (например, ц/га)

❑ **Среднее квадратическое отклонение** – наиболее точно характеризует отклонение вариант от средней величины.

Имеет ту же размерность, что и изучаемый признак, например: ц/га.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} - \text{для не взвешенного ряда}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}} - \text{для взвешенного ряда}$$



❑ **Дисперсия** – это квадрат среднего квадратического отклонения.

Единиц измерения не имеет, используется в дисперсионном анализе.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \quad \text{или} \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}$$

❑ **Коэффициент вариации** – характеризует относительную колеблемость признака вокруг средней величины, выражается в %.

$$V = (\sigma / \bar{x}) \cdot 100 \%$$

❖ Если коэффициент вариации не превышает 33%, то совокупность по рассматриваемому признаку можно считать **однородной**.

На практике, чтобы рассчитать все показатели вариации, строится вспомогательная таблица:

№ хоз-ва	Урожайность, ц/га (x)	Посевная площадь, га (f)	x·f	$\bar{x}$	x - $\bar{x}$	x - $\bar{x}$  ·f	(x - $\bar{x}$ ) <sup>2</sup>	(x - $\bar{x}$ ) <sup>2</sup> ·f
1	24,1	150	3615	16,7	7,4	1110	54,8	8220
2	19,4	630	12222		2,7	1701	7,3	4599
3	18,9	400	7560		2,2	880	4,8	1920
4	17,4	345	6003		0,7	242	0,5	173
5	16,4	775	12710		-0,3	232	0,1	78
6	13,3	100	1330		-3,4	340	11,6	1160
7	12,9	225	2903		-3,8	855	14,4	3240
8	12,7	232	2946		-4,0	928	16,0	3712
9	9,1	60	546		-7,6	456	57,8	3468
10	7,6	125	950		-9,1	1138	82,8	10350
<b>Итого</b>	<b>x</b>	<b>3042</b>	<b>50785</b>	<b>x</b>	<b>7882</b>	<b>250,1</b>	<b>36920</b>	



$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{50785}{3042} = 16,7 \text{ (ц/га)} - \text{средняя урожайность зерновых}$$

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 24,1 - 7,6 = 16,5 \text{ (ц/га)} - \text{размах вариации}$$

$$d = \frac{\sum |x - \bar{x}| \cdot f}{\sum f} = \frac{7882}{3042} = 2,6 \text{ (ц/га)} - \text{среднее линейное отклонение}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f} = \frac{36920}{3042} = 12,1 - \text{дисперсия}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}} = \sqrt{\frac{36920}{3042}} = \sqrt{12,1} = 3,5 \text{ (ц/га)} - \text{среднее квадратическое отклонение}$$

$$V = (\sigma / \bar{x}) \cdot 100 \% = 3,5 : 16,7 \cdot 100 \% = 21(\%) - \text{коэффициент вариации}$$

На основании произведённых расчётов можно сделать следующие **выводы**:

Урожайность по 10 хозяйствам района варьирует от 7,6 до 24,1 ц/га.

Размах вариации составляет 16,5 ц/га. Средняя урожайность составляет 16,7 ц/га.

В целом по данной совокупности хозяйств урожайность отклоняется от среднего уровня на 3,5 ц/га или на 21%.

В данном случае коэффициент вариации характеризует небольшую колеблемость урожайности вокруг её средней величины, т.е. совокупность по урожайности можно считать однородной.

**Задача на закрепление:** Для определения урожайности нового сорта картофеля обследовано несколько участков, показавших следующее распределение по урожайности:

Урожайность, ц/га	Посевная площадь, га
до 42	5
42-44	10
44-46	20
46-48	30
48-50	25
св.50	10
Итого:	100

Вычислить:

1. Среднюю урожайность картофеля;
  2. Показатели вариации.
- Сформулировать вывод.

