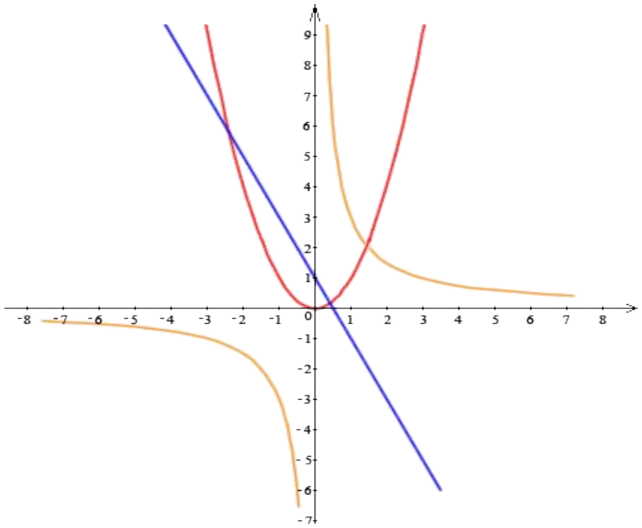
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

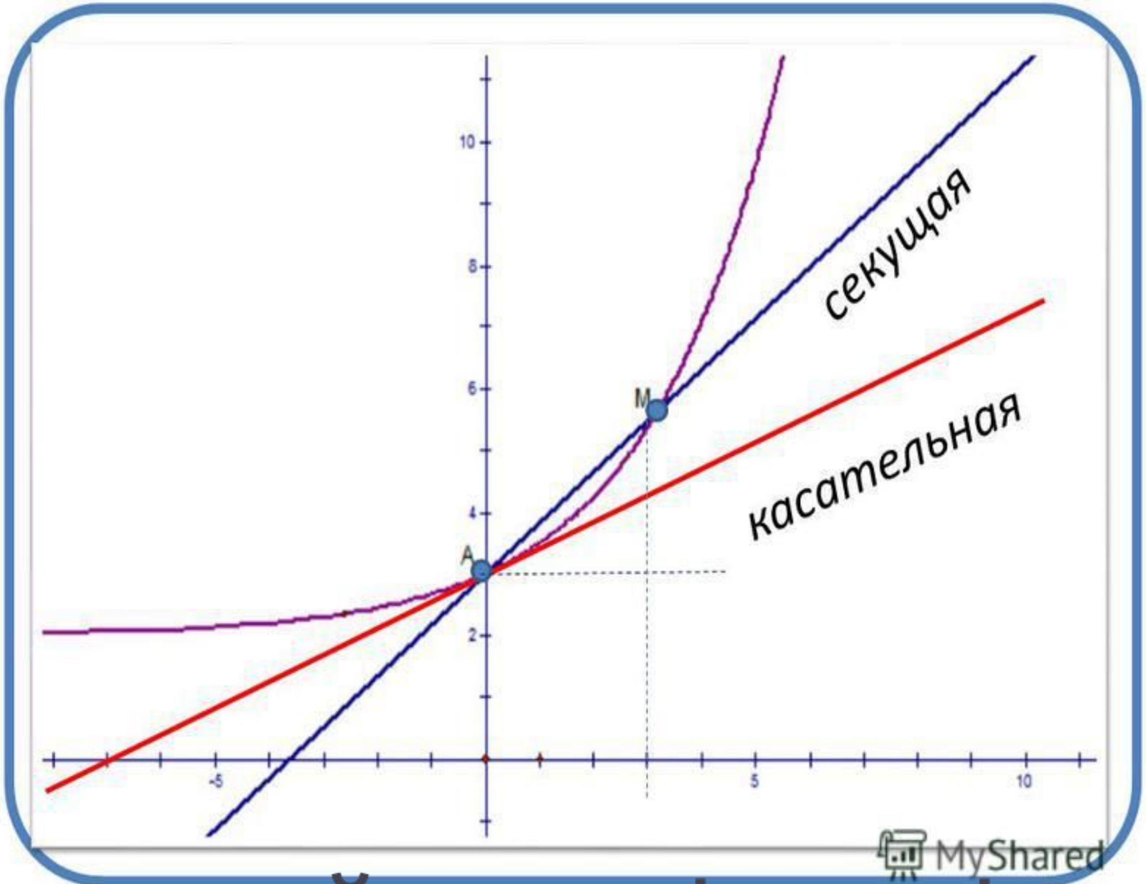
к исследованию функции и построению графика функции



Разработано преподавателем математики Кольтиновой С.В.

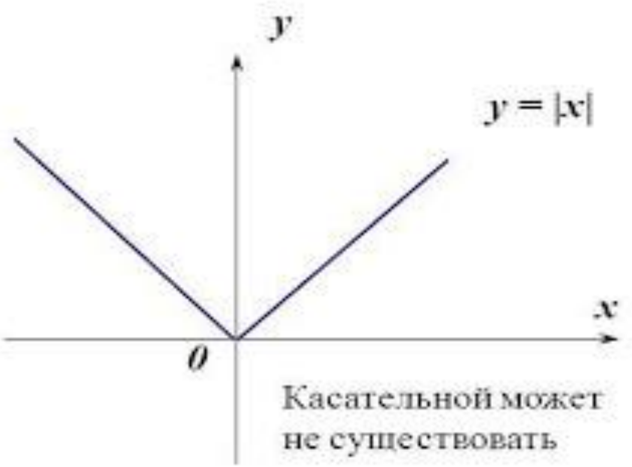
Цели урока

- **Ввести понятие касательной к графику функции в точке и выяснить в чем состоит геометрический смысл производной**
- **Научиться находить уравнение касательной для конкретных функций**
- **Научиться определять промежутки возрастания и убывания функции (исследовать функции на монотонность)**
- **Научиться находить точки экстремума функции**
- **Научиться применять производную к исследованию функции и построению графика**

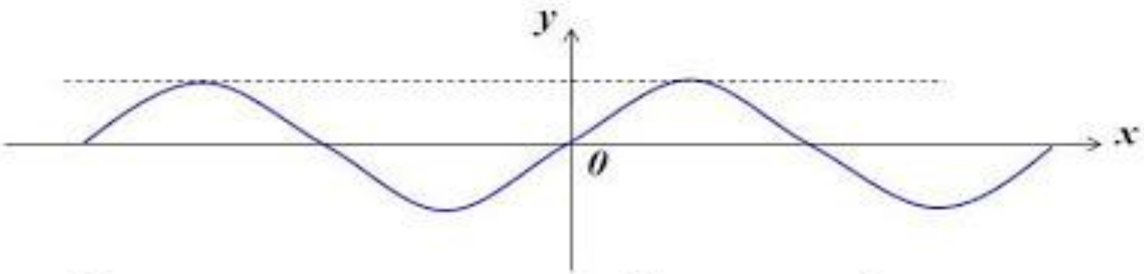


Касательной к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение секущей

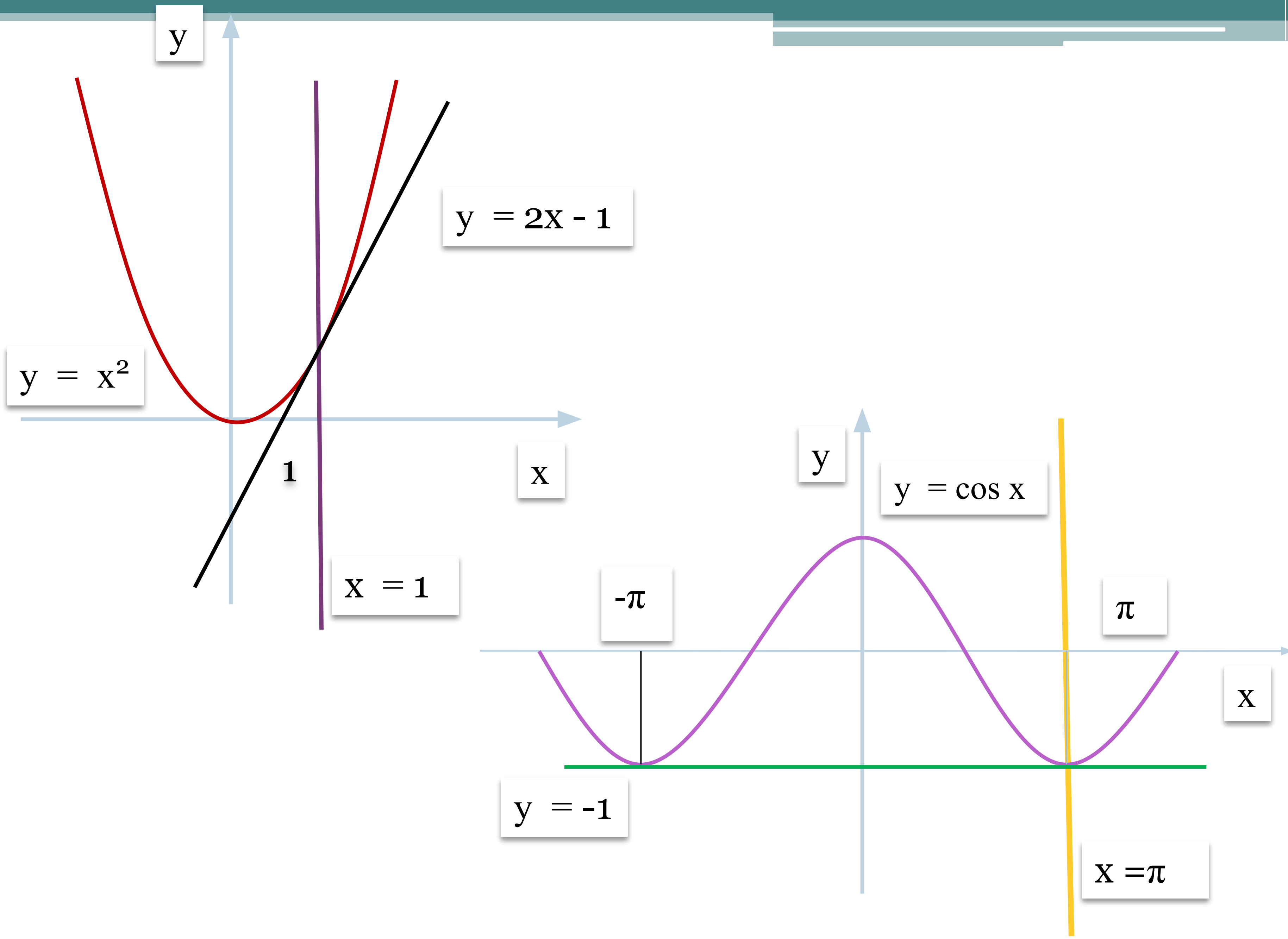
Касательная может пересекать кривую (ось OX)



Касательной может не существовать



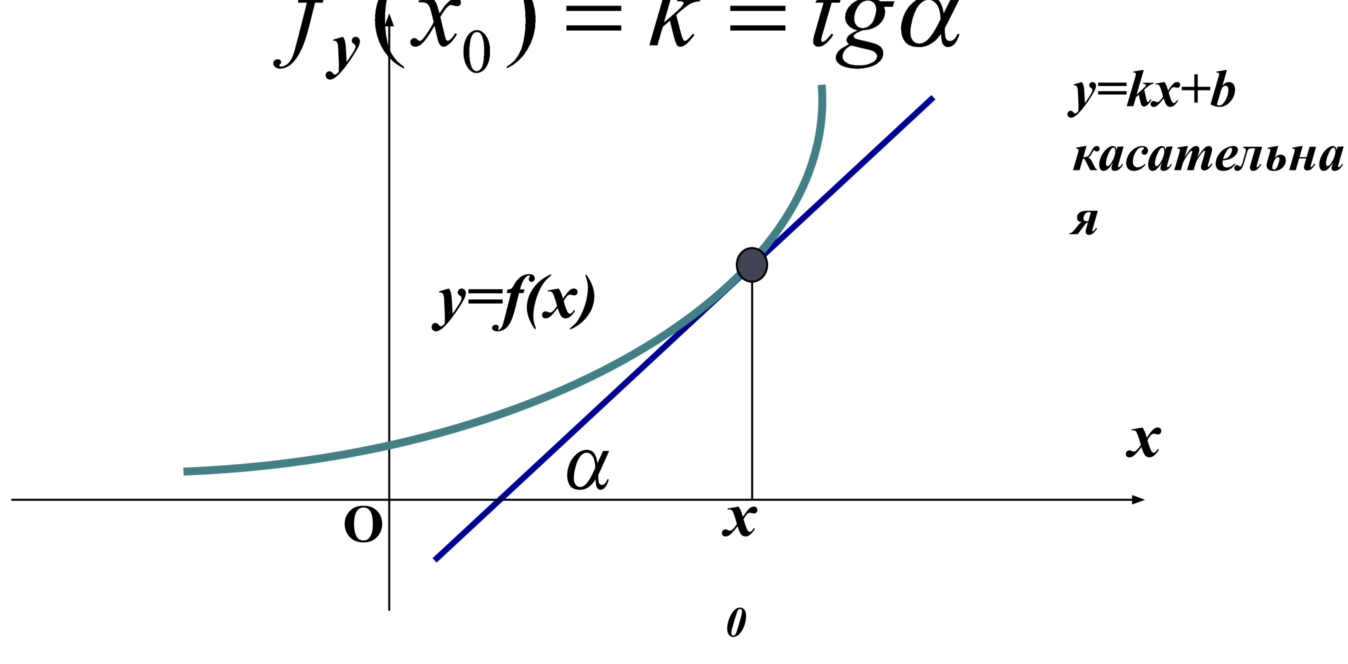
Касательная может иметь с кривой несколько общих точек


y
y = 2x - 1
y = x²
1
x
x = 1
y
y = cos x
-π
π
x
y = -1
x =π

Геометрический смысл производной

Значение производной функции *y=f(x)* в точке $x=x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции *y=f(x)* в точке $x=x_0$, т. е.

$$f'_y(x_0) = k = tg\alpha$$



$$f'(x_0) = tg\alpha$$

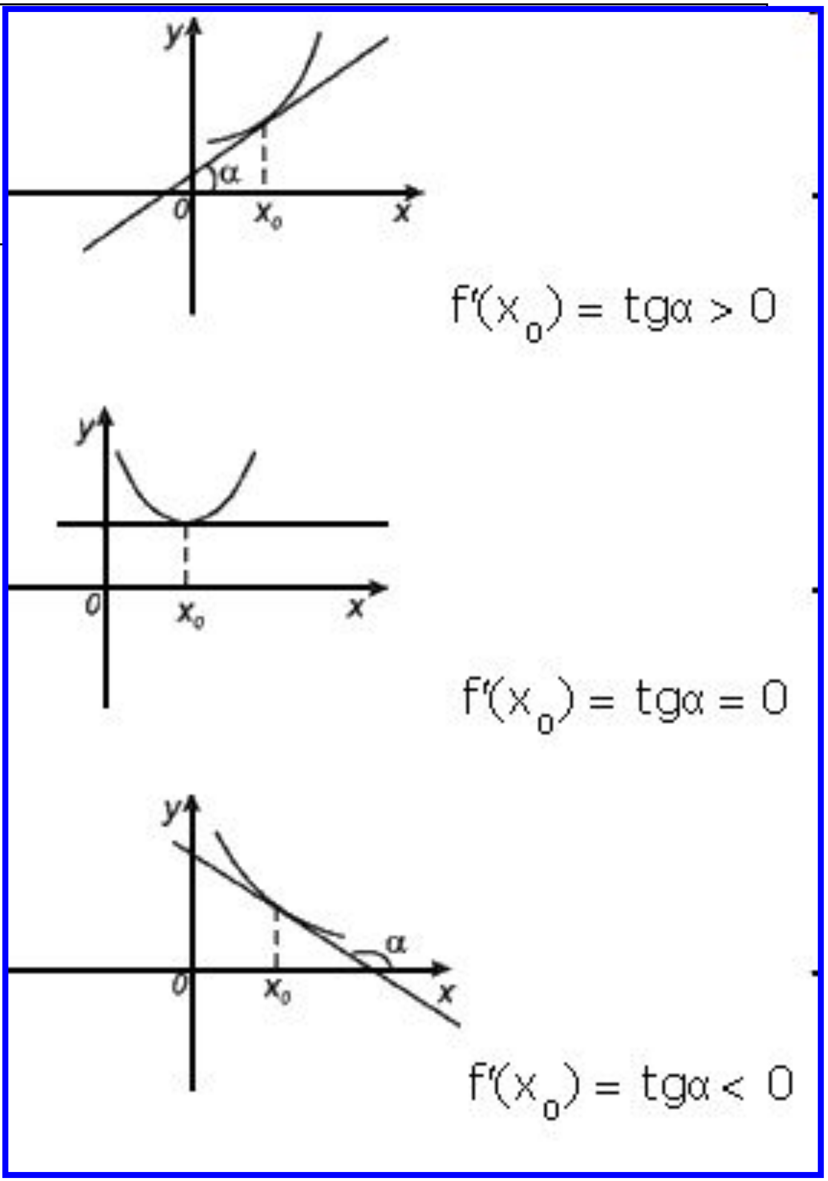
Причем, если :

.

$1. f'(x_0) = tg\alpha > 0, \text{то } \alpha - \text{острый}$

$2. f'(x_0) = tg\alpha = 0, \text{то } \alpha - \text{развернутый}$

$3. f'(x_0) = tg\alpha < 0, \text{то } \alpha - \text{тупой}$



Уравнение касательной

- Касательной к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение секущей

Алгоритм

- Найти значение функции в точке x_o
- Вычислить производную функции
- Найти значение производной функции в точке x_o
- Подставить полученные числа в формулу

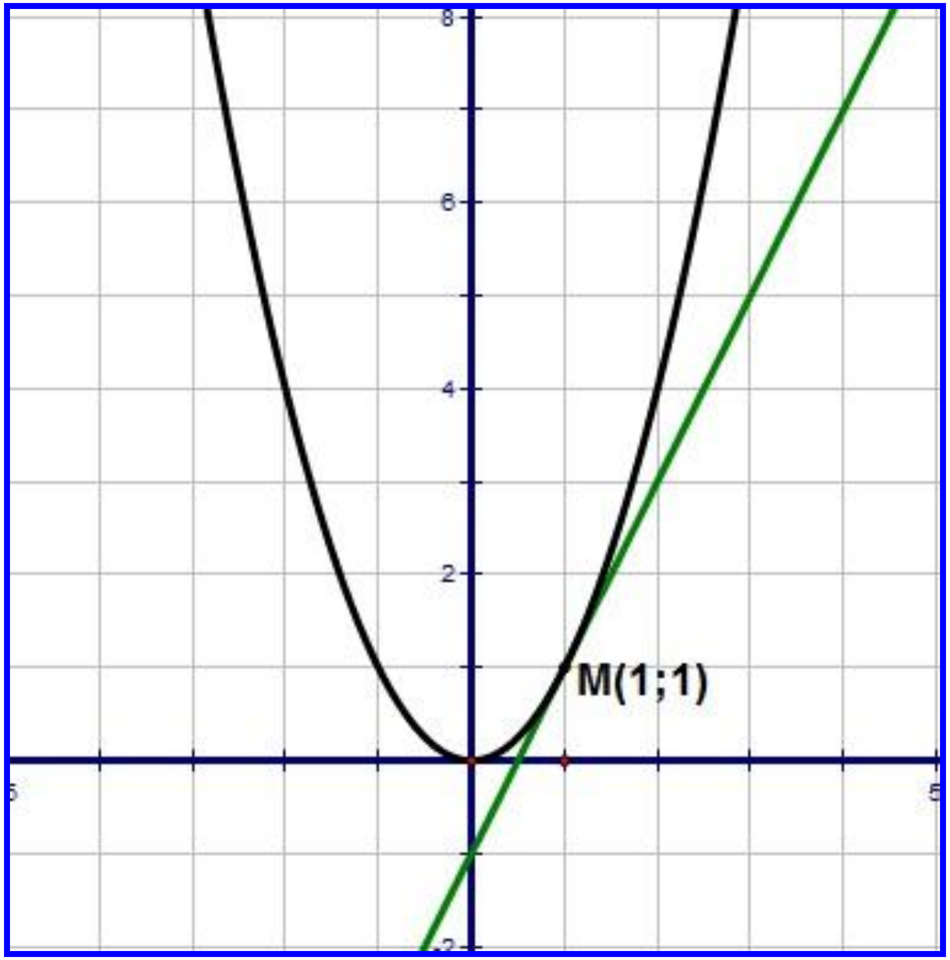
$$y = f(x_o) + f\,`(x_o)(x - x_o)$$

- Привести уравнение к стандартному виду

Составить уравнение касательной:

- к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $M(1;1)$

$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$
$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$
$$y = 1 + 2x - 2$$
$$y = 2x - 1$$



Составить уравнение касательной к графику функции $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=1$.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

1) $a=1$

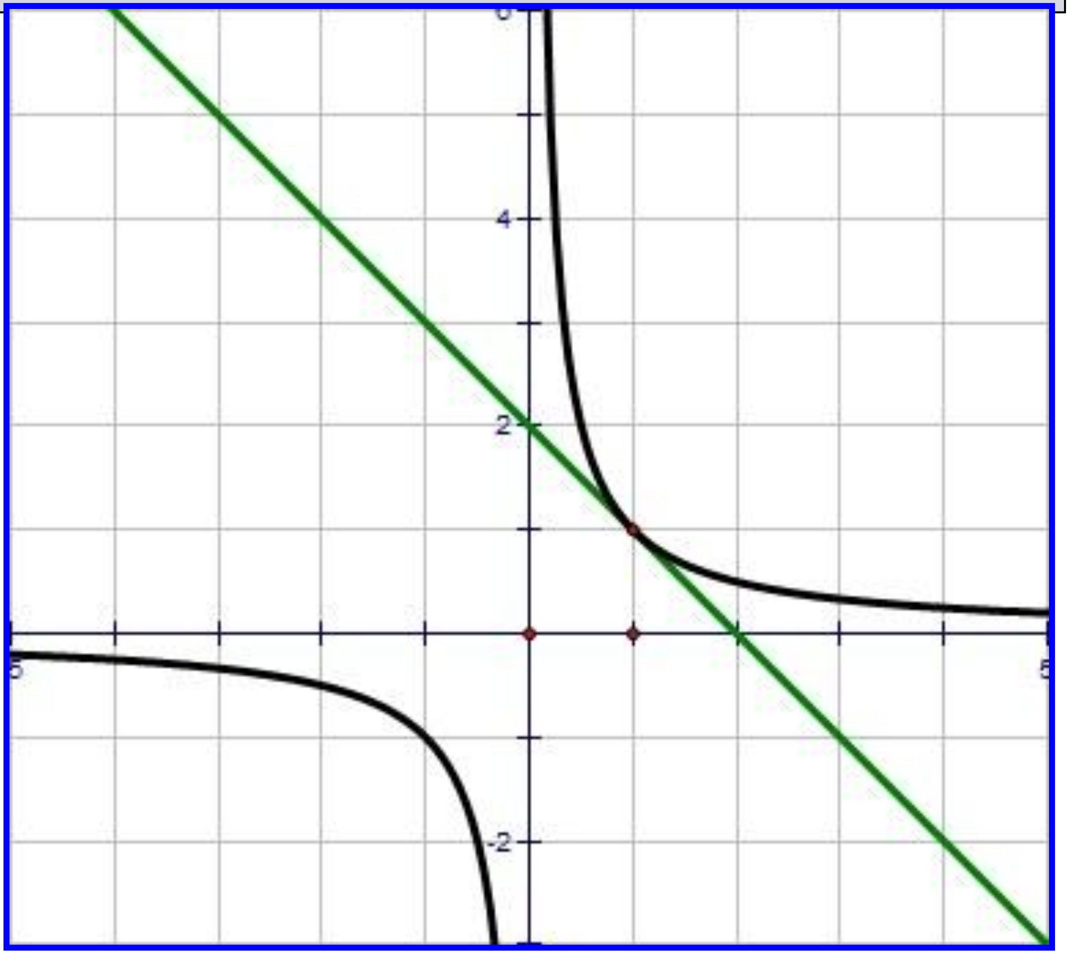
2) $f(a)=f(1)=1$

3) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$$f'(a)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

4) $y=1-(x-1)$

$$y=2-x$$



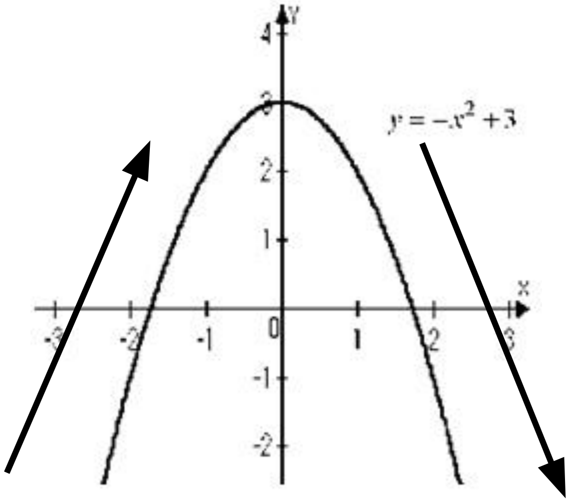
<u>Ответ:</u> $y=2-x$

Исследование функции на монотонность

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках из области определения функция возрастает, а на каких – убывает.

Функция возрастает

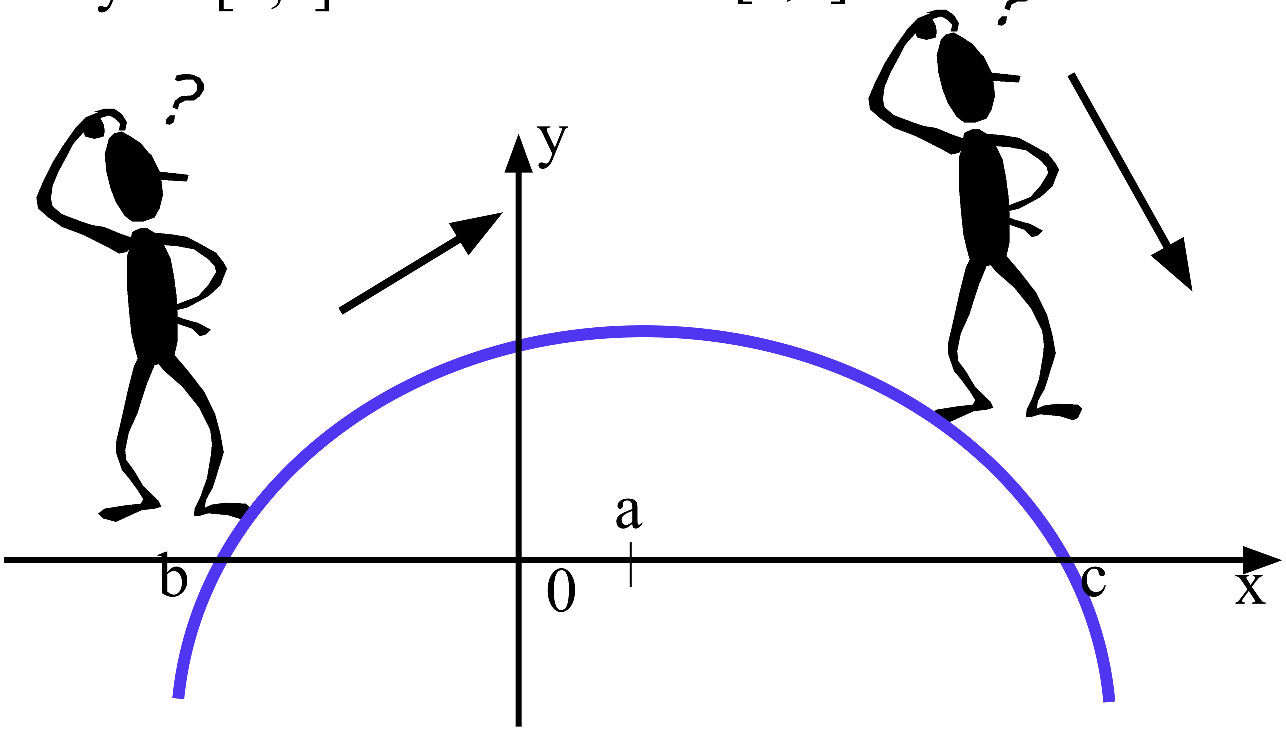
Функция убывает



Возрастание и убывание функции можно изобразить так

Иду в гору. Функция ***возрастает*** на промежутке[b;a]

Иду под гору. Функция ***убывает*** на промежутке [a;c]



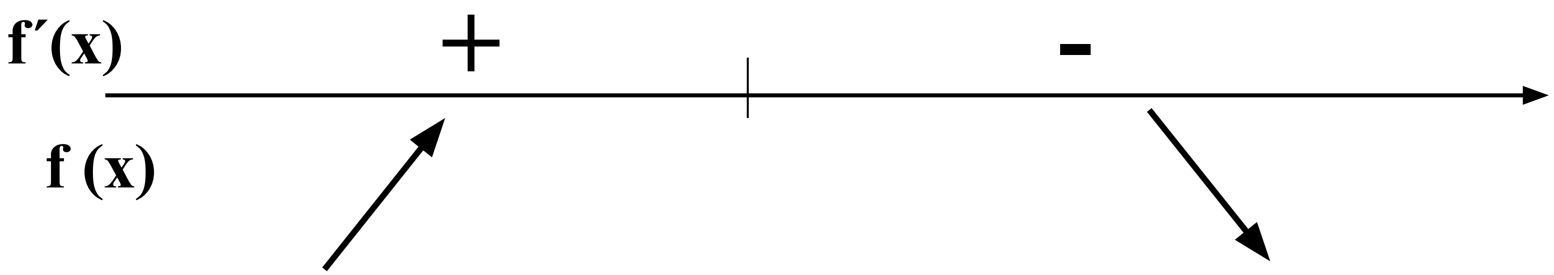
Для определения промежутков возрастания и убывания функции можно использовать и производную .

Теорема:

Если f(x) – непрерывна на промежутке и имеет f´(x), то

а) если f´(x) > 0, то f(x) – возрастает

б) если f´(x) < 0, то f(x) – убывает



Алгоритм исследования функции на монотонность

1) Найти производную функции $f'(x)$
2) Найти **стационарные** (**$f'(x) = 0$**) и **критические** (**$f'(x)$ не существует**) точки функции $y = f(x)$
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
5) По знаку производной определить промежутки монотонности функции

(если $f'(x) > 0$ – функция возрастает; если $f'(x) < 0$ функция убывает; если $f'(x) = 0$ – функция постоянна)

Определения

- Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными.**
- Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими**

Например: найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2) Найдем стационарные точки:

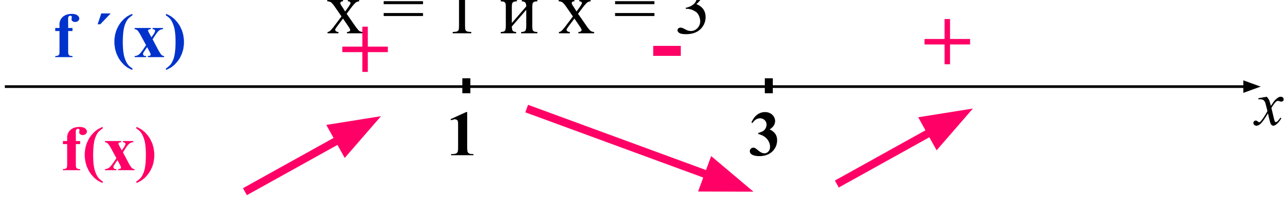
$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ и } x = 3$$

3)

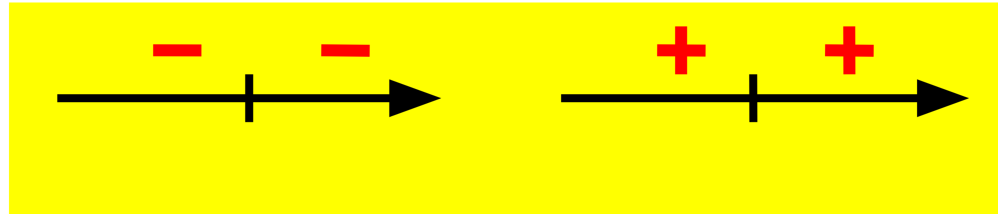
4)



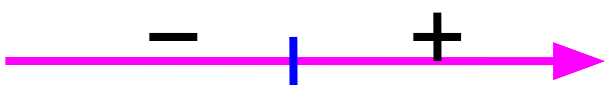
5) $f'(x) > 0$, при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$

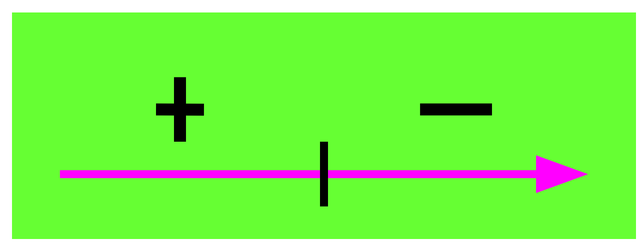
$f'(x) < 0$, при $x \in (1; 3)$

Ответ: при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (1; 3)$ - убывает

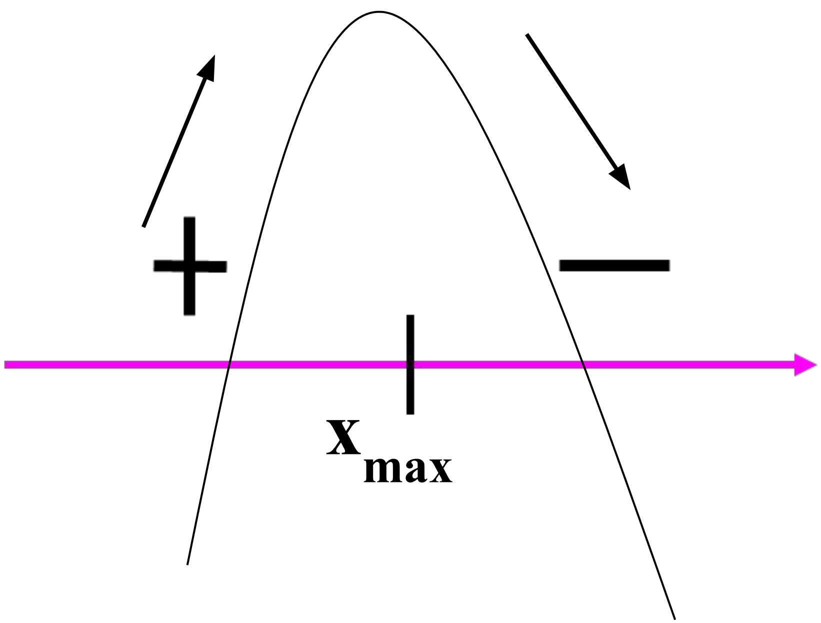


Нахождение точек экстремума функции



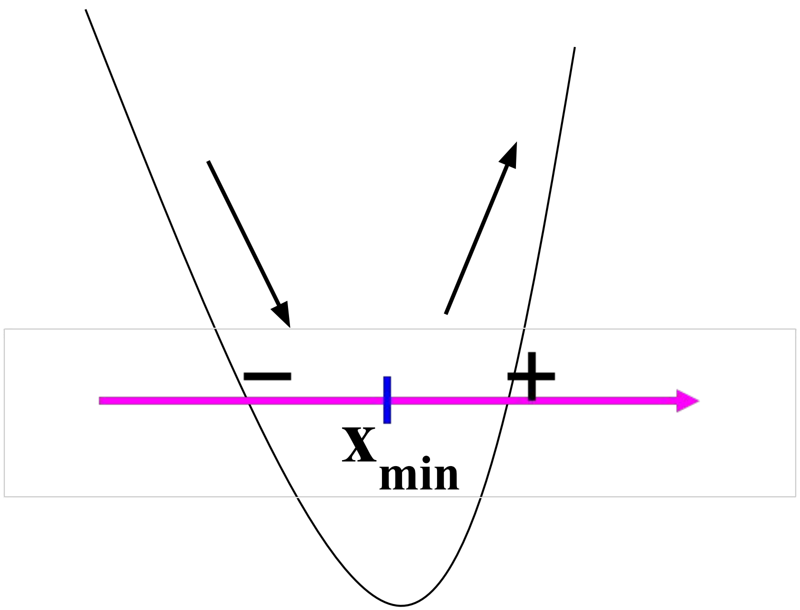


- Если в точке x_o производная меняет знак с «+» на «-», то точка x_o – это точка максимума



$\left.\begin{array}{l} x_{max} \\ y_{max} \end{array}\right\}$ точка максимума

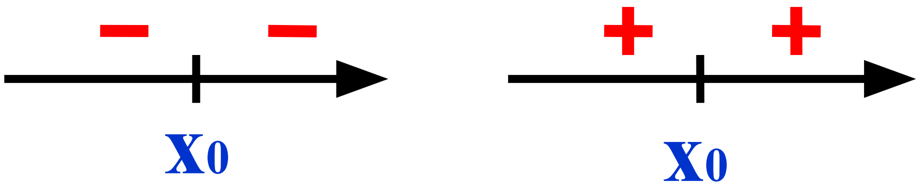
- Если в точке x_o производная меняет знак с «-» на «+», то точка x_o – это точка минимума



x_{min}
y_{min}

точка минимума

Если в точке x_0 знаки производной одинаковы, то в точке **x_0 экстремума нет**



экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума функции

1) Найти производную функции $f'(x)$
2) Найти стационарные и критические точки функции $y = f(x)$
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
5) Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «+» на «-», то эта точка – точка максимума. Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «-» на «+», то эта точка – точка минимума. Если $f'(X_0)$ не меняет знак, то в этой точке экстремума нет (это точка перегиба).

Например: найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

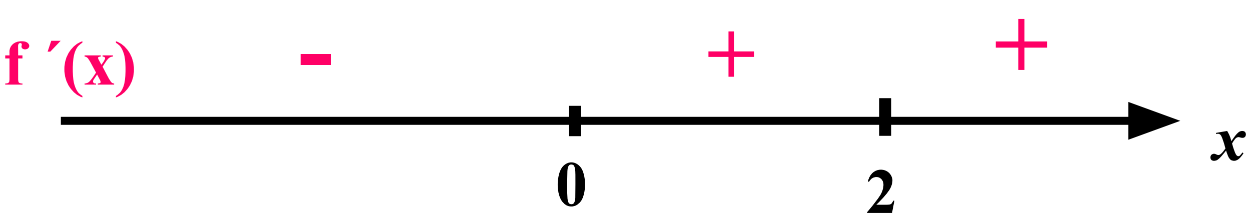
<u>Решение.</u> 1) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$

$= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x-2)^2$

2) **$y' = 0$** при **$x = 0$** и **$x = 2$** (стационарные точки)

3)

4)



5) Значит: **$x = 0$ – точка минимума**,

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

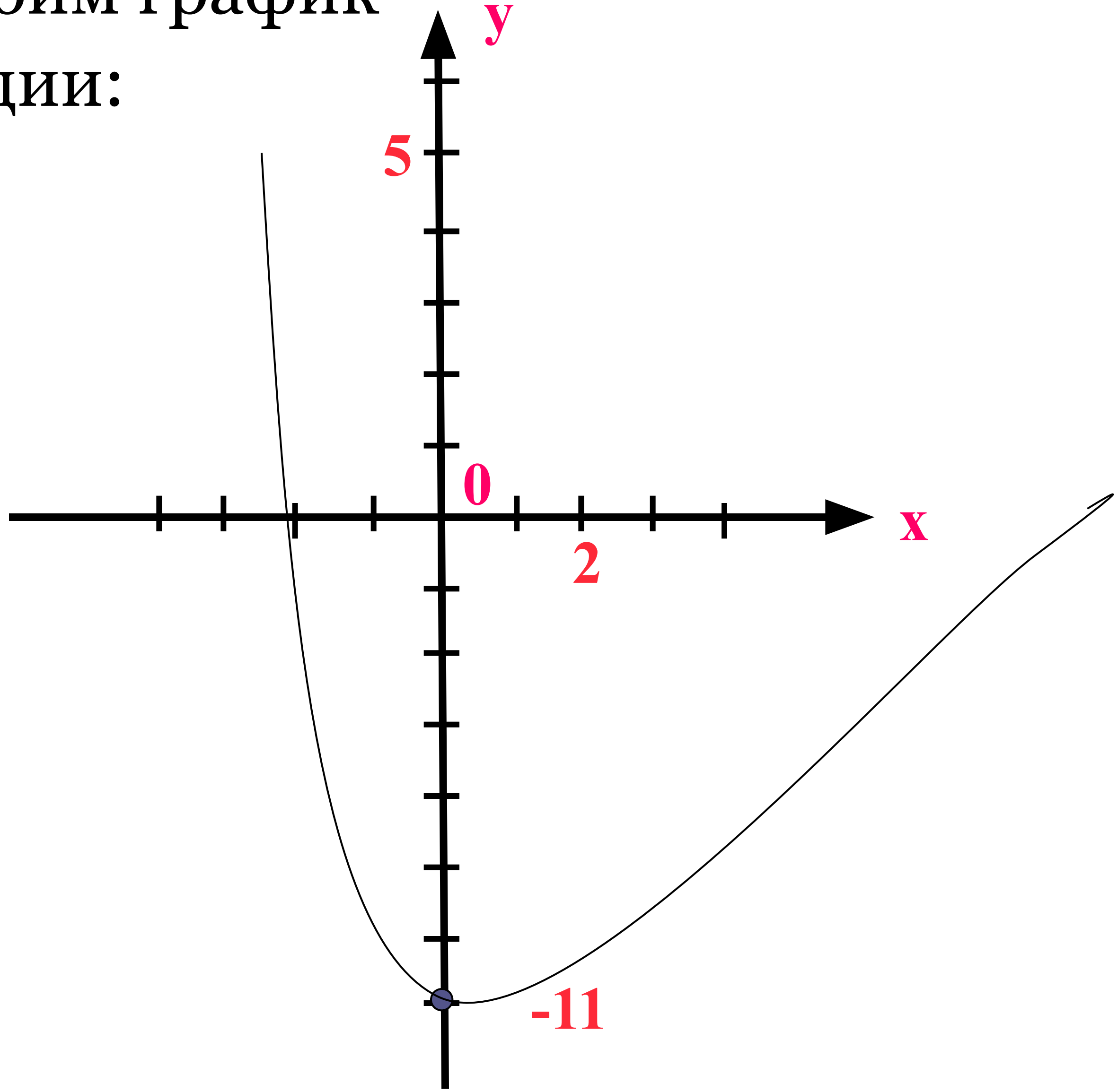
x = 0 – точка минимума,

x_{min} = 0

$$y_{\min} = 3 \cdot 0^4 - 16 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0^2 - 11 = -11$$

(0;-11) точка минимума (экстремума)

Построим график функции:



Например: исследовать функцию $y = 2x^3+3x^2 -1$ и построить её график

<u>Решение</u>. $D(y)= (-\infty; +\infty)$, четность не определена

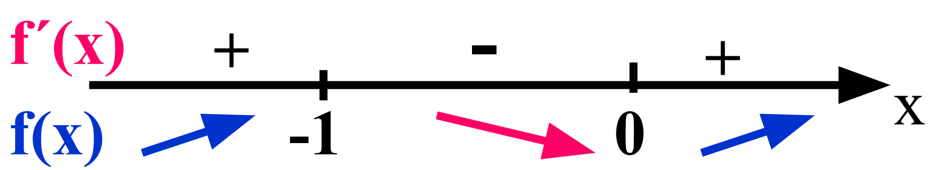
<u>Найдем стационарные точки:</u>

т.к. $\mathbf{y' = 6x^2+6x = 6x(x+1)}$ => $\mathbf{6x(x+1)=0}$

тогда $\mathbf{x=0}$ и $\mathbf{x=-1}$ стационарные точки

<u>Найдем точки экстремума:</u>

т.к.



и **x=-1** – точка максимума

x= 0 – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

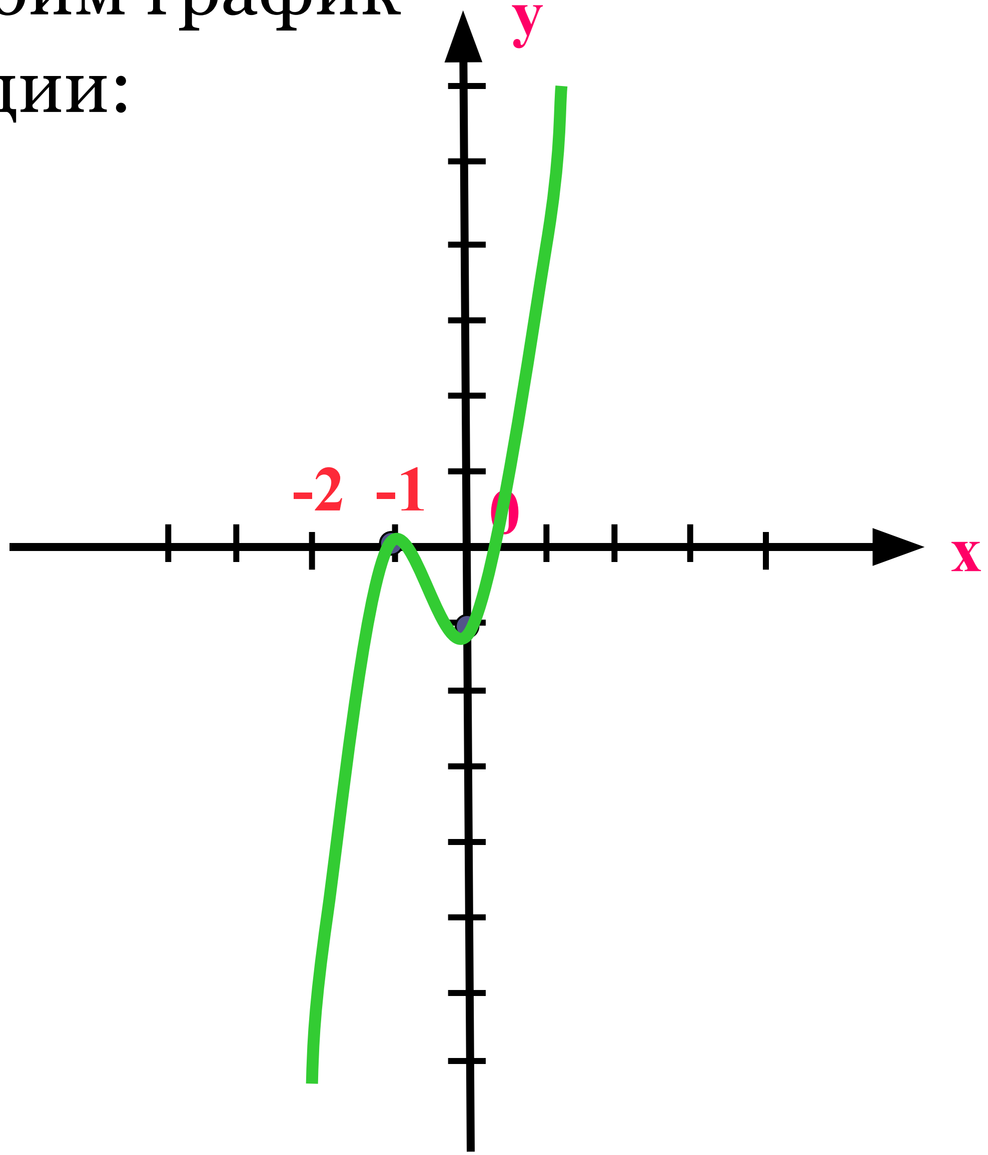
при **x** є **(-∞; -1] и [0; + ∞) -** функция возрастает

при **x** є **[-1; 0] -** функция убывает

т.к. **x=-1** – точка максимума, то Ymax=0 т.к.

x= 0 – точка минимума, Ymin=-1

Построим график функции:



Самостоятельная работа

- Касательной к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение секущей