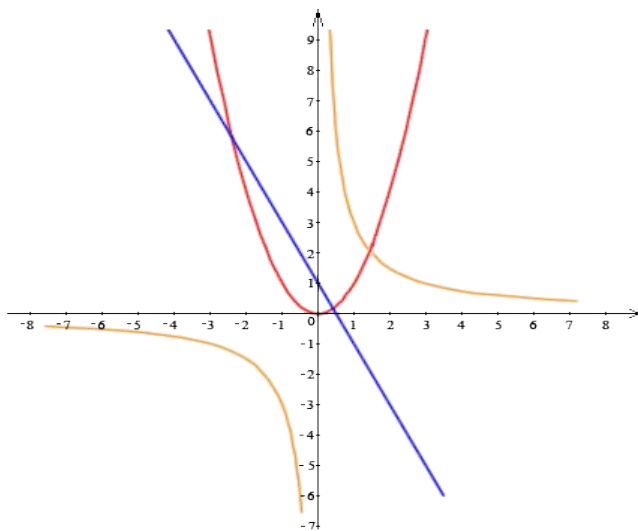


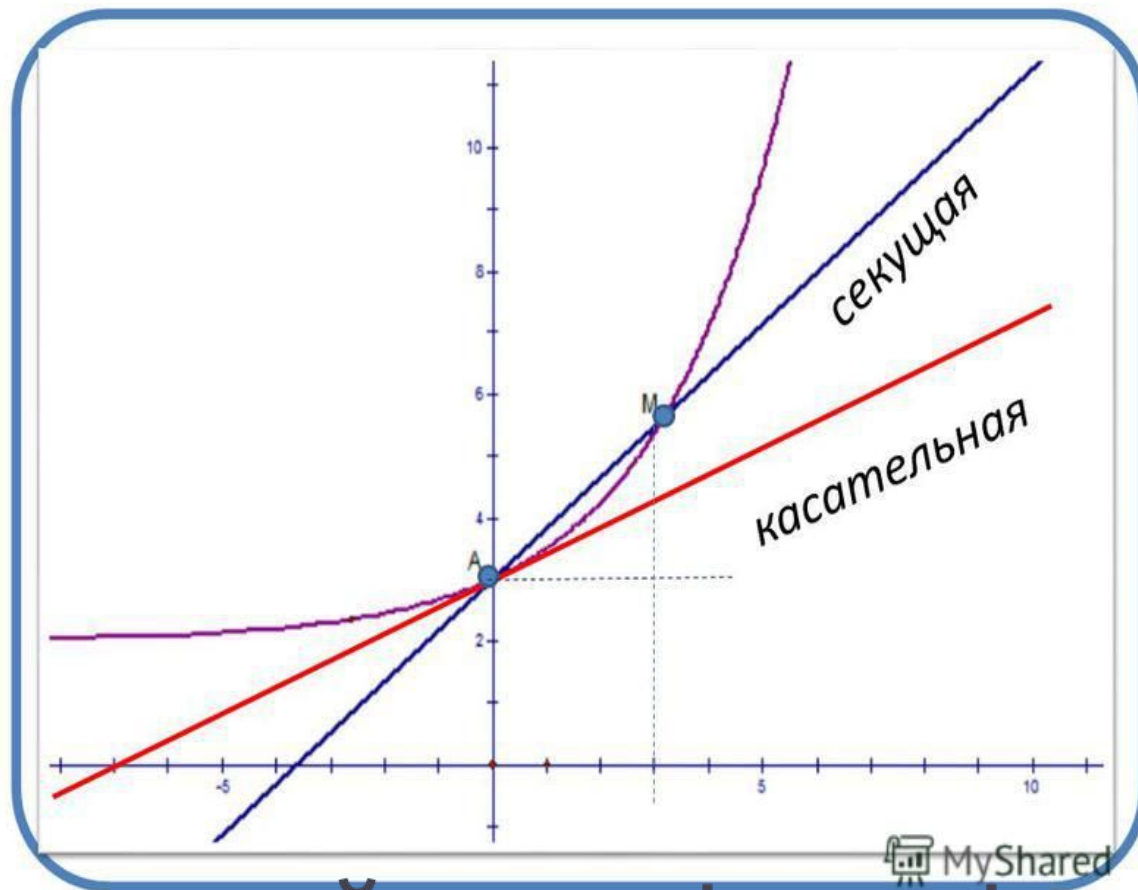
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ к исследованию функции и построению графика функции



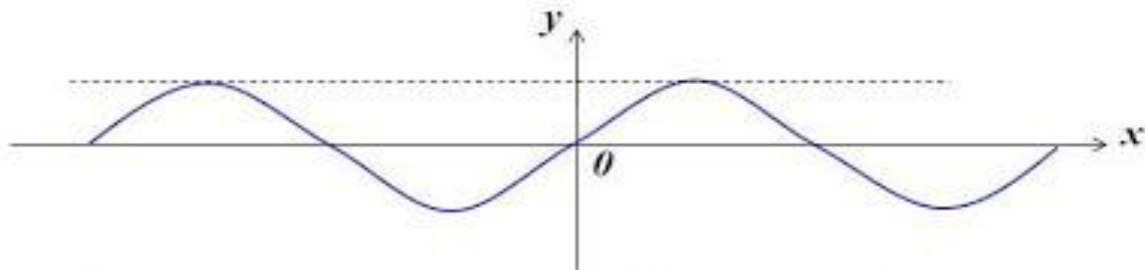
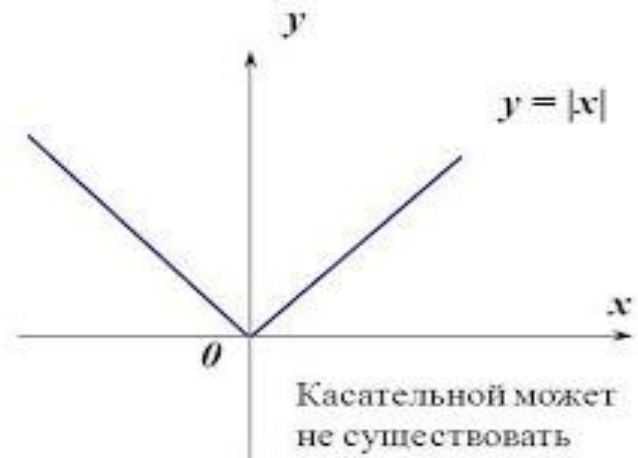
*Разработано преподавателем
математики Кольтиновой С.В.*

Цели урока

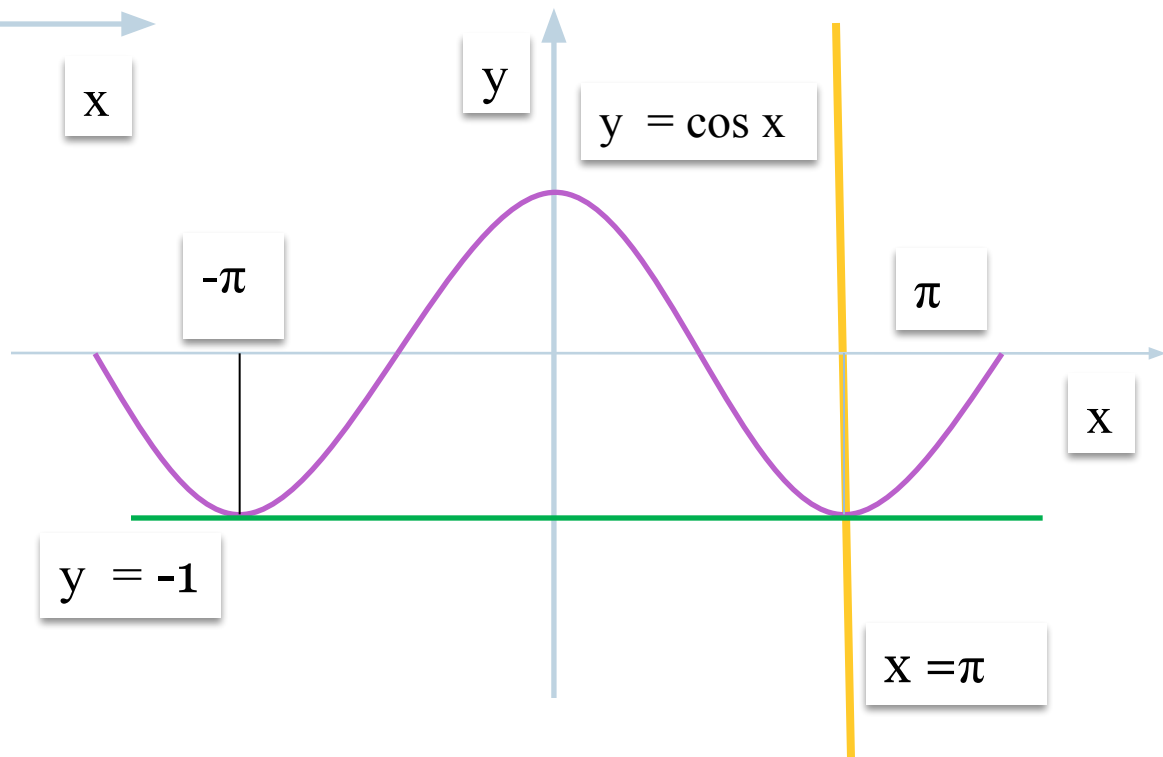
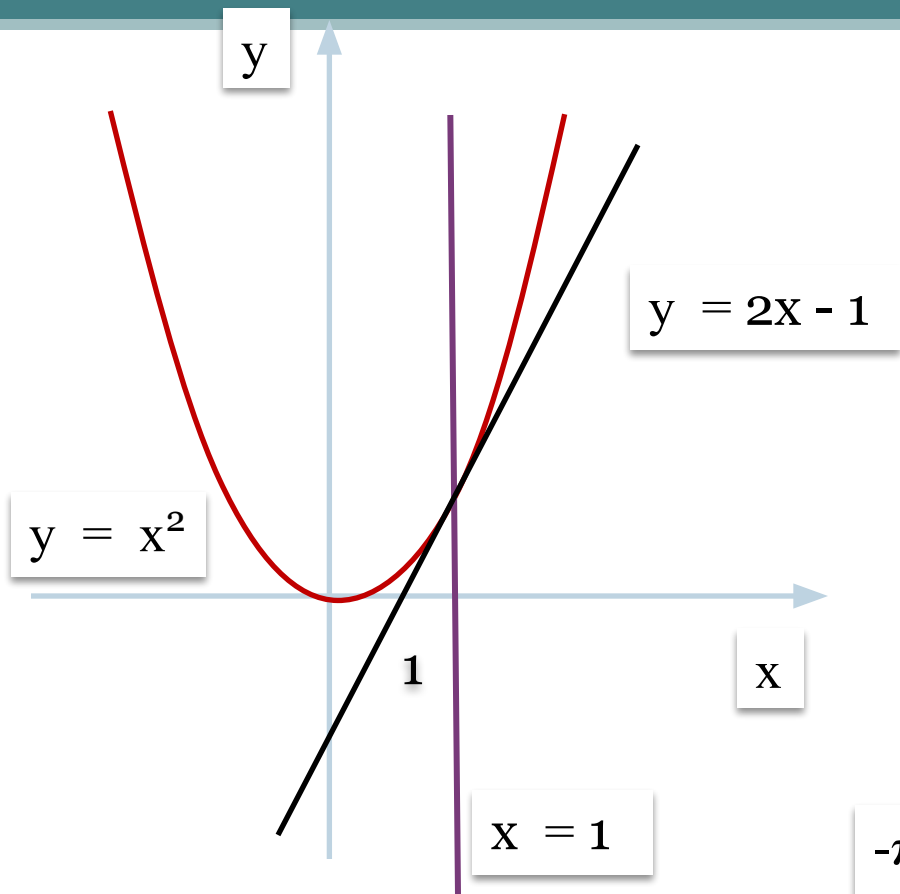
- Ввести понятие касательной к графику функции в точке и выяснить в чем состоит геометрический смысл производной
- **Научиться находить уравнение касательной для конкретных функций**
- Научиться определять промежутки возрастания и убывания функции
(исследовать функции на монотонность)
- Научиться находить точки экстремума функции
- **Научиться применять производную к исследованию функции и построению графика**



Касательной к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение секущей



Касательная может иметь с кривой несколько общих точек

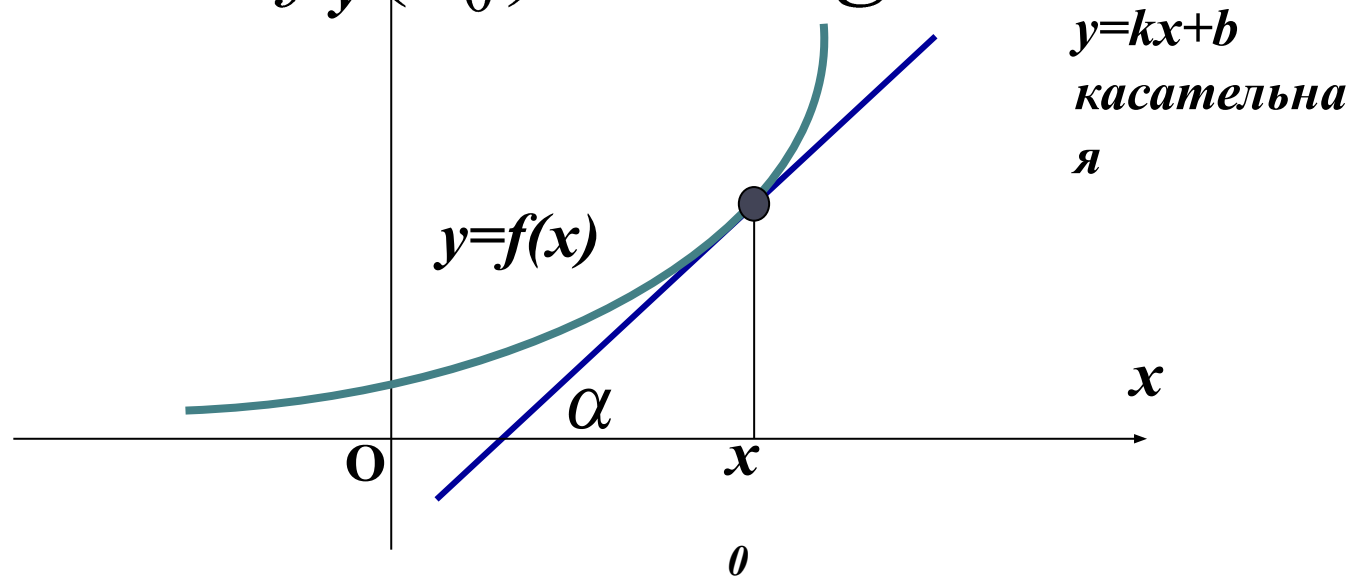


Геометрический смысл

производной

Значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$, т. е.

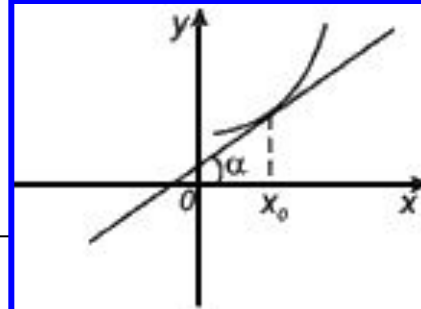
$$f'_y(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$



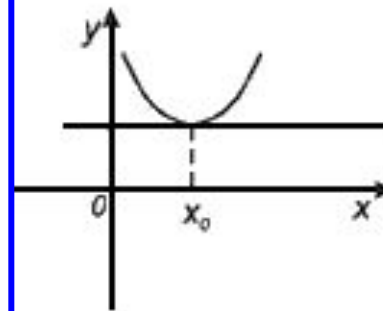
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Причем, если :

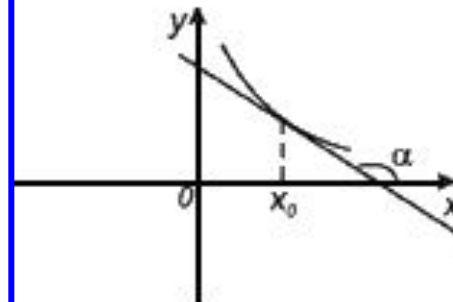
1. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$, то α – острый
2. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$, то α – развернутый
3. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$, то α – тупой



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$



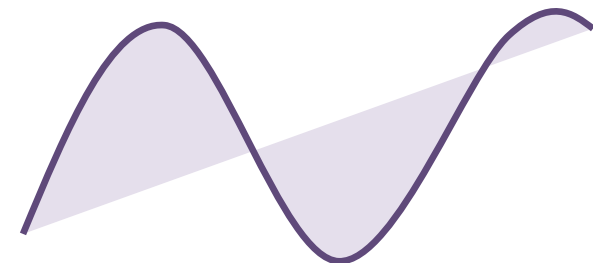
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

Уравнение касательной

- Касательной к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение секущей



Алгоритм

- Найти значение функции в точке x_0
- Вычислить производную функции
- Найти значение производной функции в точке x_0
- Подставить полученные числа в формулу
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
- Привести уравнение к стандартному виду

Составить уравнение касательной:

□ к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $M(1;1)$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f'(x) = 2x$$

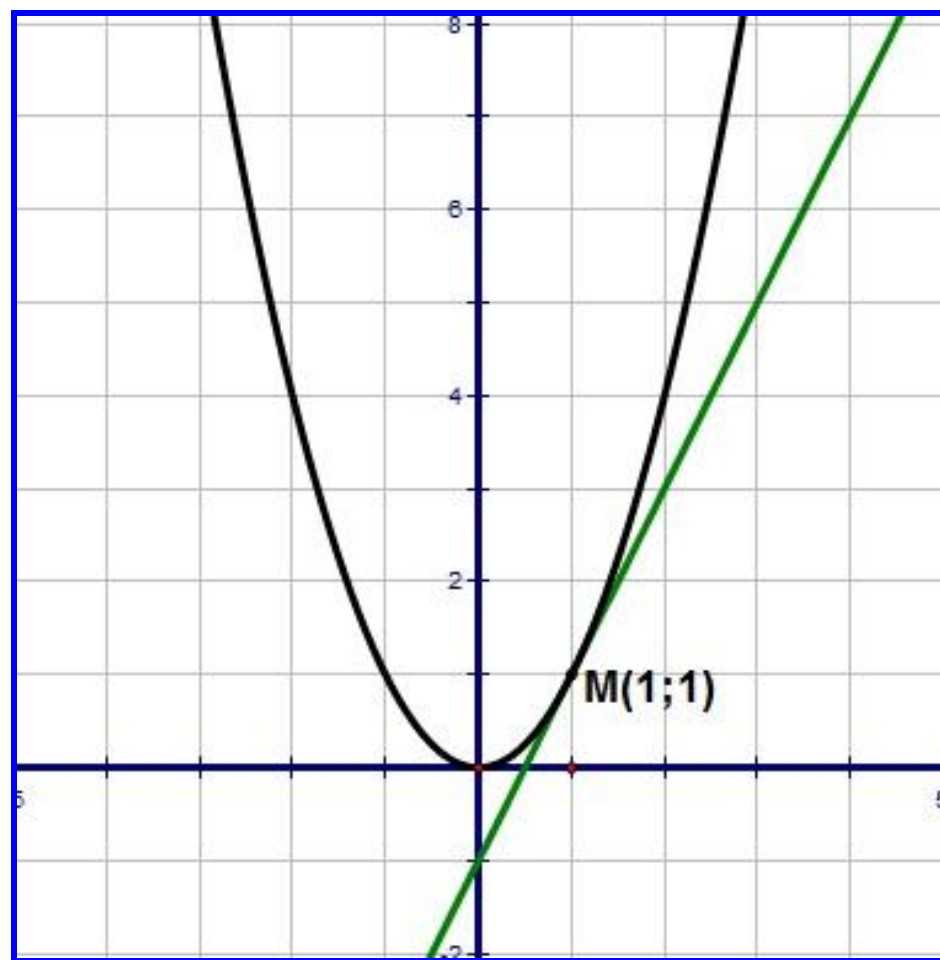
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$

$$y = 1 + 2x - 2$$

$$y = 2x - 1$$



Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1) $a = 1$

2) $f(a) = f(1) = 1$

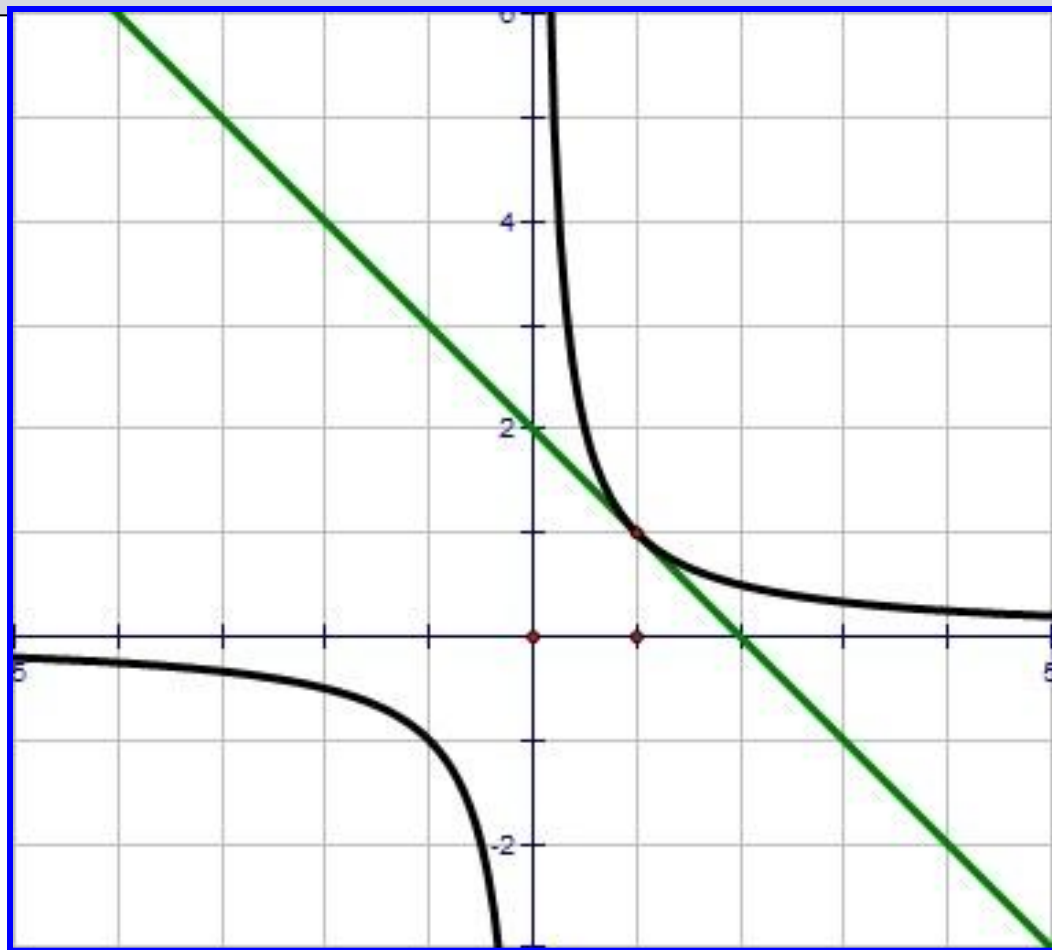
3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

4) $y = 1 - (x - 1)$

$$y = 2 - x$$

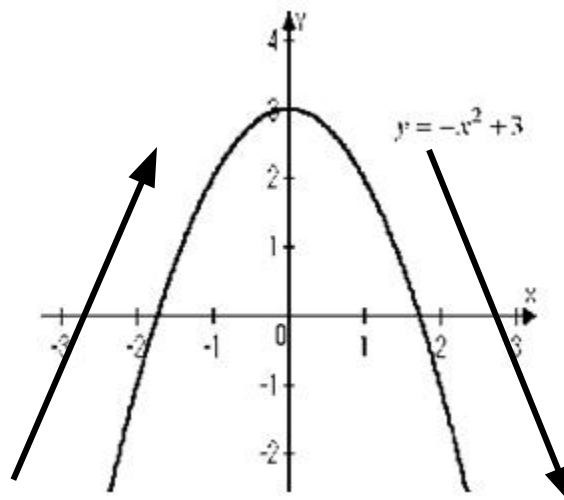
Ответ: $y = 2 - x$



Исследование функции на МОНОТОННОСТЬ

**Исследовать функцию
на монотонность – это
значит выяснить, на каких
промежутках из области
определения
функция возрастает,
а на каких –
убывает.**

**Функция
возрастает**

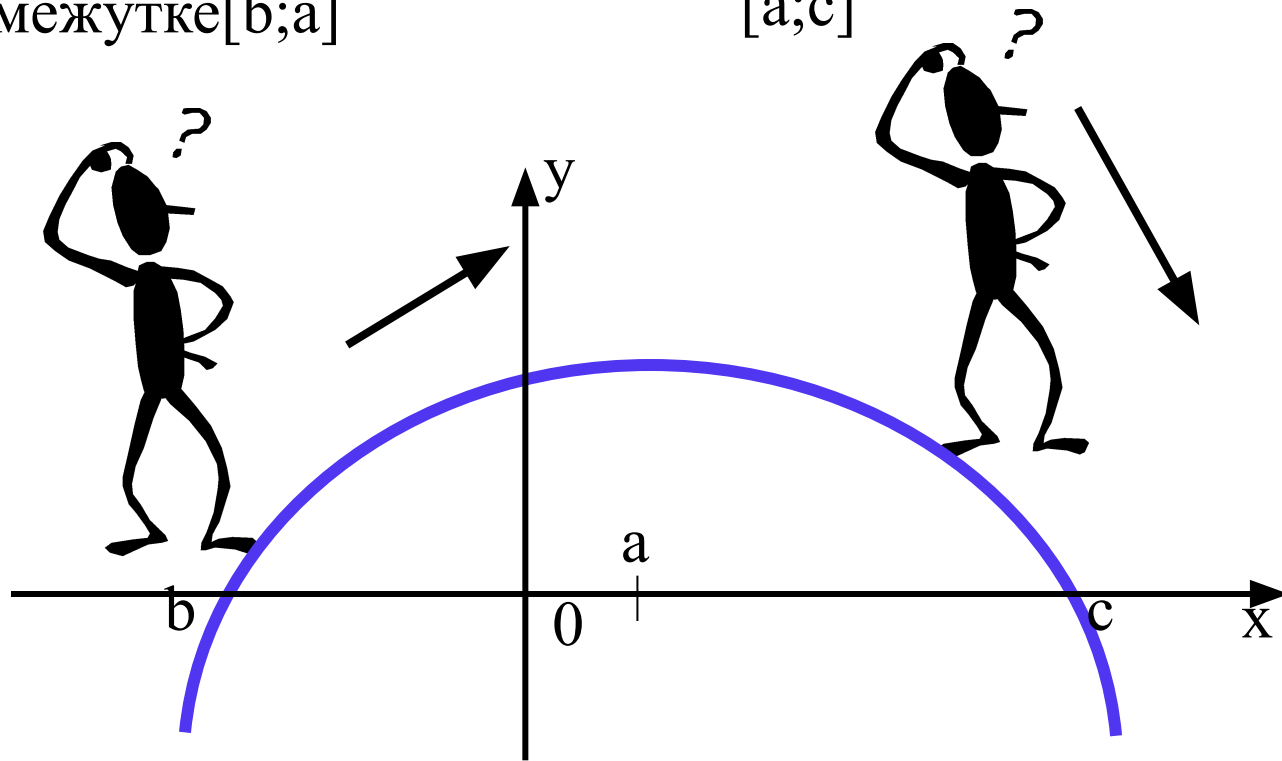


**Функция
убывает**

Возрастание и убывание функции можно изобразить так

Иду в гору. Функция *возрастает* на промежутке $[b;a]$

Иду под гору. Функция *убывает* на промежутке $[a;c]$



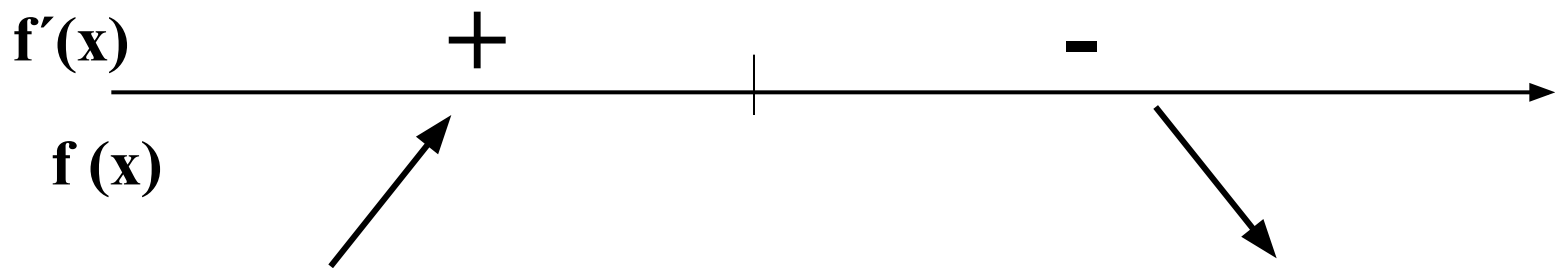
**Для определения промежутков
возрастания и убывания
функции можно использовать и
производную .**

Теорема:

Если $f(x)$ – непрерывна на промежутке и имеет $f'(x)$, то

а) если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ – **возрастает**

б) если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ – **убывает**



Алгоритм исследования функции на монотонность

- 1) Найти производную функции $f'(x)$
- 2) Найти **стационарные** ($f'(x) = 0$) и **критические** ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$
- 3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
- 4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
- 5) По знаку производной определить промежутки монотонности функции
(если $f'(x) > 0$ – функция возрастает; если $f'(x) < 0$ – функция убывает; если $f'(x) = 0$ – функция постоянна)

Определения

- Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными**.
- Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими**

Например: найти промежутки

монотонности функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

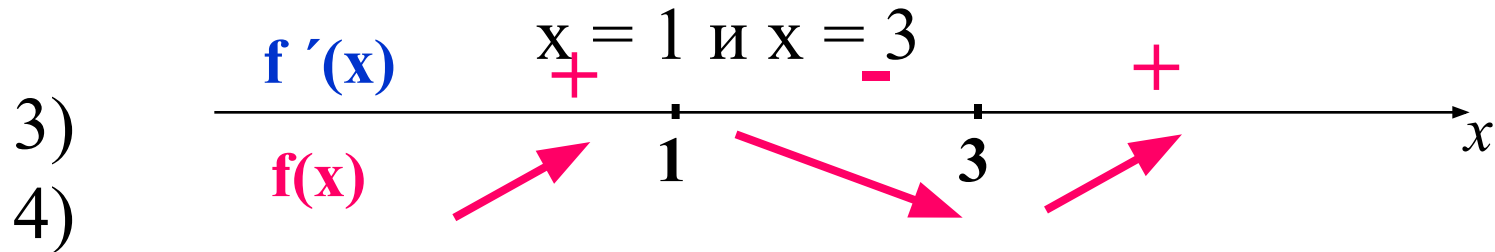
1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2) Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

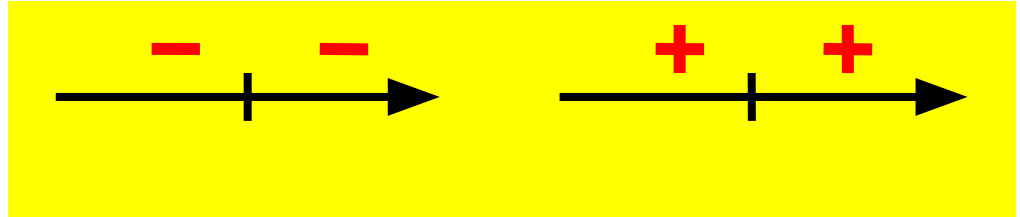
$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 3$$



5) $f'(x) > 0$, при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$

$f'(x) < 0$, при $x \in (1; 3)$

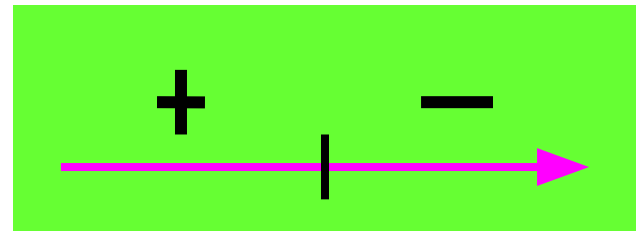
Ответ: при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (1; 3)$ - убывает



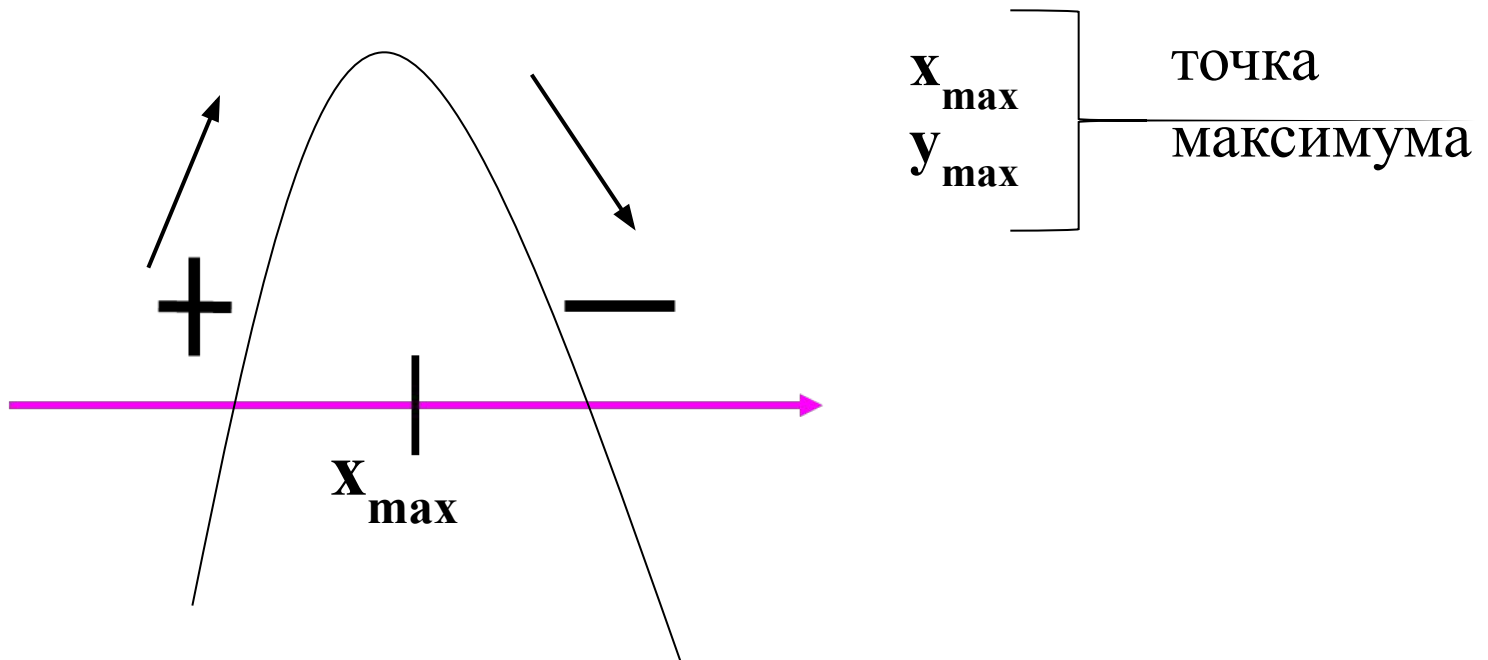
Нахождение

точек экстремума

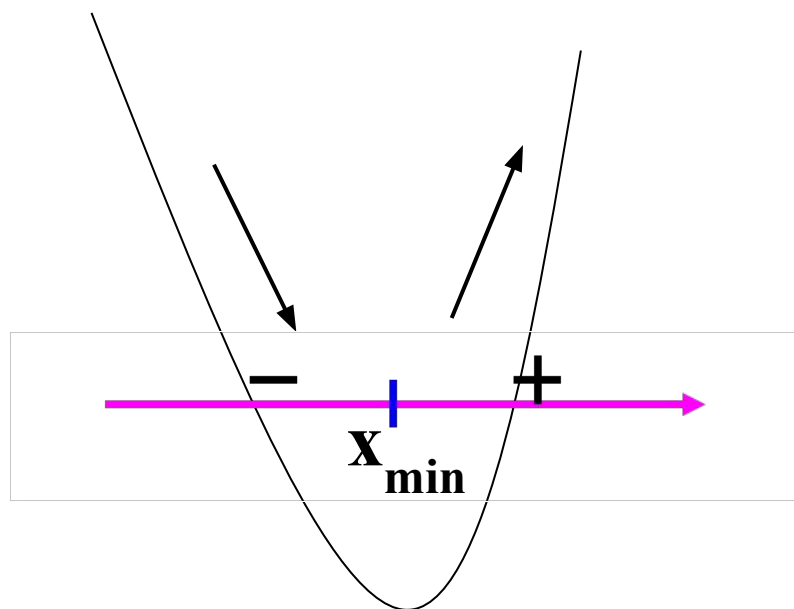
функции



- Если в точке x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то точка x_0 – это точка максимума

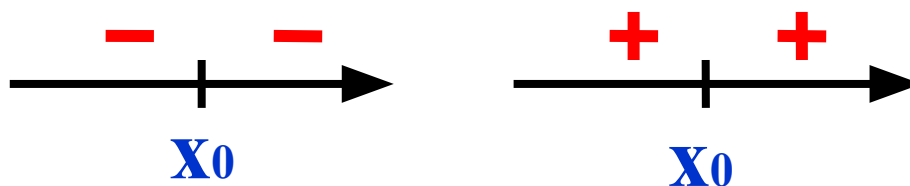


- Если в точке x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то точка x_0 – это точка минимума



x_{\min}
 y_{\min} } точка
МИНИМУМА

Если в точке X_0 знаки производной
одинаковы, то в точке X_0 экстремума
нет



экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума функции

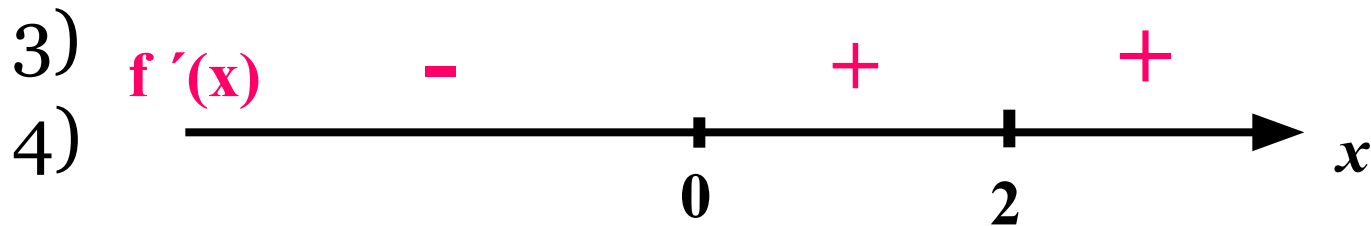
- 1) Найти производную функции $f'(x)$
- 2) Найти стационарные и критические точки функции $y = f(x)$
- 3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
- 4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
- 5) Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «+» на «-», то эта точка – **точка максимума**. Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «-» на «+», то эта точка – **точка минимума**. Если $f'(x_0)$ не меняет знак, то в этой точке экстремума нет (это точка перегиба).

Например: найти точки
экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

Решение. 1) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$
 $= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2$

2) $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$ (стационарные точки)



5) Значит: $x = 0$ – точка минимума,

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

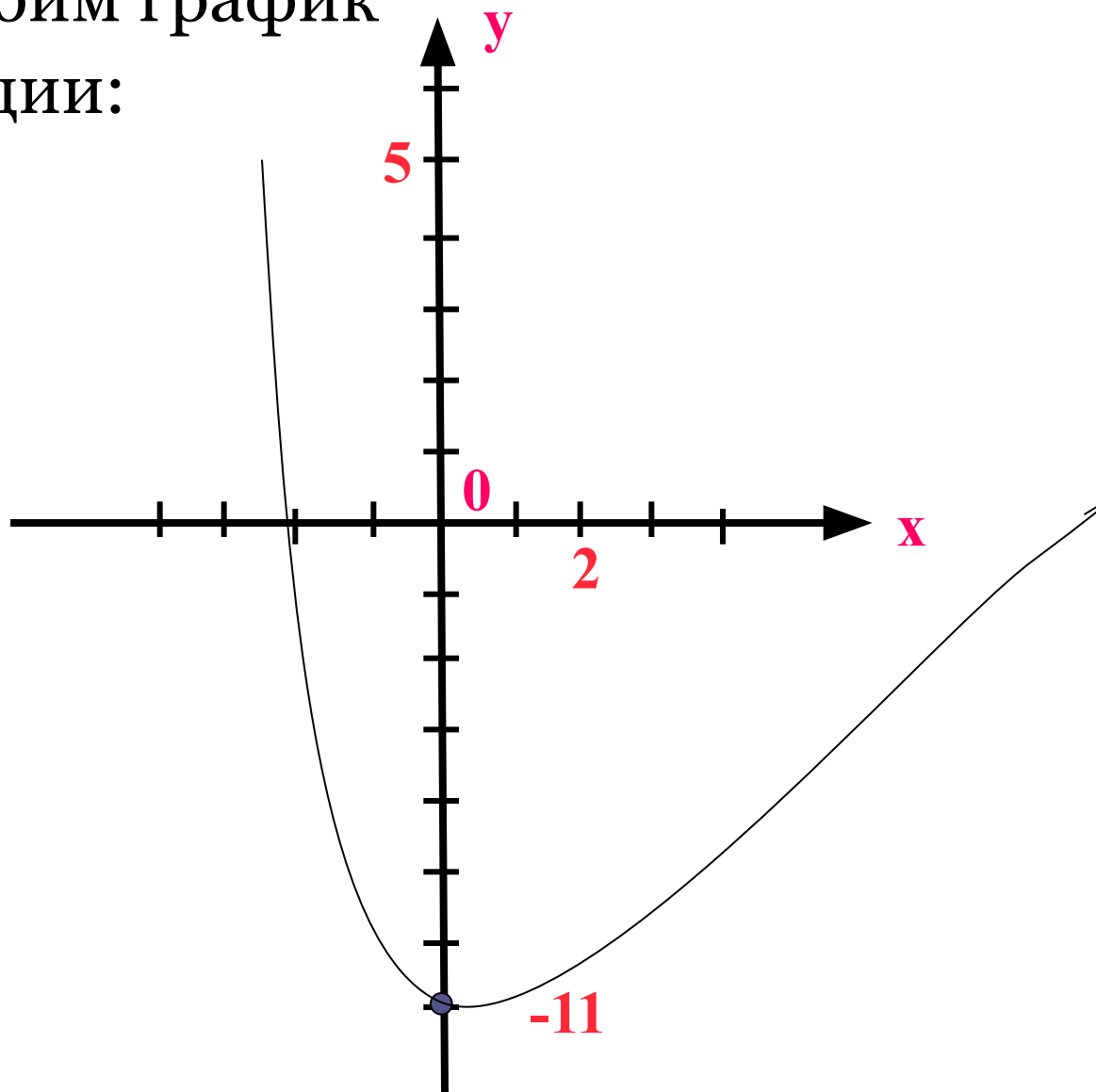
x = 0 – точка минимума,

$$x_{\min} = 0$$

$$y_{\min} = 3 \cdot 0^4 - 16 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0^2 - 11 = -11$$

(0;-11) точка минимума (экстремума)

Построим график
функции:



Например: исследовать функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ и построить её график

Решение. $D(y) = (-\infty; +\infty)$, четность не определена

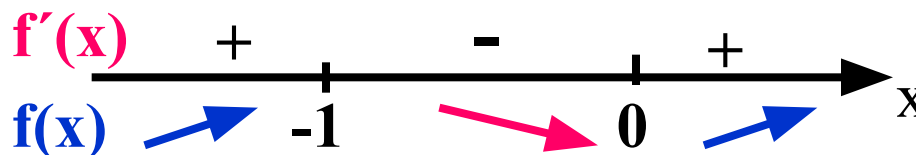
Найдем стационарные точки:

$$\text{т.к. } y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \Rightarrow 6x(x+1) = 0$$

тогда $x=0$ и $x=-1$ стационарные точки

Найдем точки экстремума:

Т.к.



и $x = -1$ – точка максимума

$x = 0$ – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

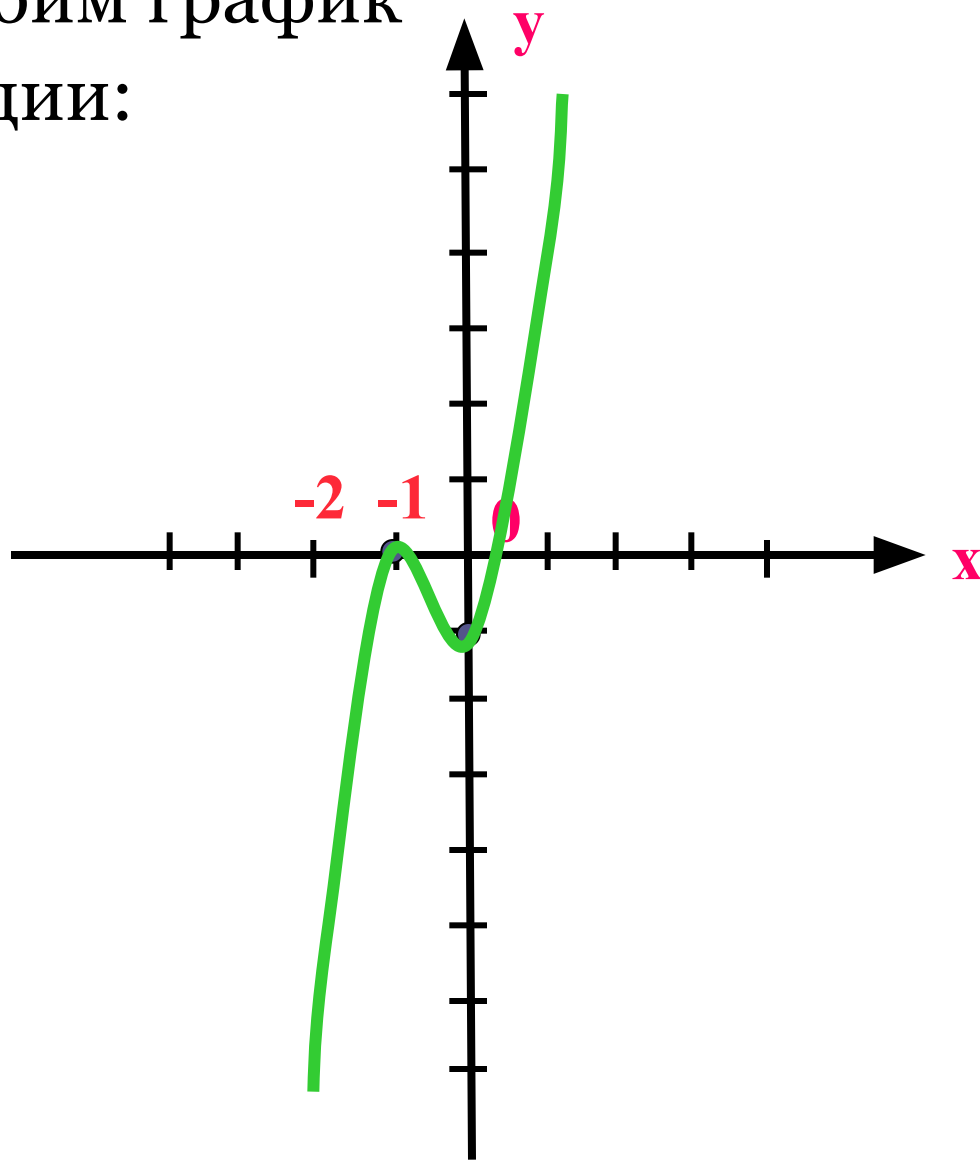
при $x \in (-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$ - функция
возрастает

при $x \in [-1; 0]$ - функция убывает

т.к. $x = -1$ – точка максимума, то $U_{\max} = 0$ т.к.

$x = 0$ – точка минимума, $U_{\min} = -1$

Построим график
функции:



Самостоятельная работа

- Касательной к графику функции $y = f(x)$ называется предельное положение секущей