Разное

Класс: **9** **10** Задача: **1**

? **Нарисуйте оптическую схему (в масштабе 1:4) телескопа Ньютона со следующими характеристиками:**

Главное зеркало − диаметр 200 мм;
Фокусное расстояние − 1 м;
Диагональное зеркало − длина малой оси 50 мм;
Труба − диаметр 240 мм, толщиной трубы пренебречь;
Длина трубы от вершины главного зеркала − 900 мм;
Вынос фокуса (расстояние от поверхности трубы до точки фокуса) − 100 мм.

Нарисуйте ход лучей для звезды, находящейся на оптической оси телескопа. Вычислите масштаб изображения в фокальной плоскости, определите линейный и угловой диаметр невиньетированного (незатененного) трубой поля зрения. Укажите на схеме все размеры, использованные при ее построении.

! Вначале начертим трубу в масштабе 1:4. Затем с одного из ее концов нарисуем зеркало так, чтобы его центр его оптической поверхности пришелся на центр задней стенки трубы. Сделаем вспомогательное построение − нарисуем главную оптическую ось зеркала, совпадающую с осью трубы. Вычислим, на каком расстоянии от главного зеркала должен находиться центр вторичного зеркала. Для этого из фокусного расстояния F вычтем вынос фокуса l и радиус трубы $D/2$. Получим:

$$L = F - l - \frac{D}{2} = 780 \text{ мм.}$$

В требуемом масштабе расстояние составит $L/4$ или 195 мм. Теперь вычислим размер большой оси диагонального зеркала. Эта же величина равна длине проекции зеркала на плоскость рисунка. Очевидно, что размер малой оси зеркала a_2 должен быть равен толщине пучка света, идущего от главного зеркала. Размер большой оси тогда будет равен

$$a_1 = \frac{a_2}{\cos 45^\circ} \approx 70 \text{ мм.}$$

В масштабе чертежа это составит $a_1/4$ или примерно 18 мм. Рисуем вторичное зеркало на схеме. Наносим лучи, параллельные главной оптической оси и падающие от звезды на края зеркала. После этого рисуем их дальнейший ход до пересечения в точке фокуса. На этом построение схемы телескопа и хода лучей закончено.

Вычислим масштаб изображения. Угловому расстоянию в 1° (1/57.3 радиан) будет соответствовать линейный размер d в фокальной плоскости. Он зависит только от фокусного расстояния телескопа и равен

$$d = \frac{F}{57.3} = 17.5 \text{ мм.}$$

Таким образом, масштаб составляет 3.4′ на мм. Чтобы определить размер поля зрения, нарисуем крайние лучи, участвующие в построении невиньетированного трубой изображения участка неба. Для этого соединим на схеме верхний край главного зеркала телескопа и край трубы. Получим треугольник **ABC**. В нем длина отрезка **BC** составляет 900 мм, длина отрезка **AB** равна

$$\mathbf{AB} = \frac{D - D_0}{2} = 20 \text{ мм.}$$

Здесь D_0 − диаметр зеркала. Таким образом, угол **ACB**, определяющий угловой радиус невиньетированного поля зрения, равен

$$\angle\mathbf{ACB} = \arcsin\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = 1^{\circ}16'.$$

Диаметр поля зрения составляет 2°32′. Линейный размер поля равен

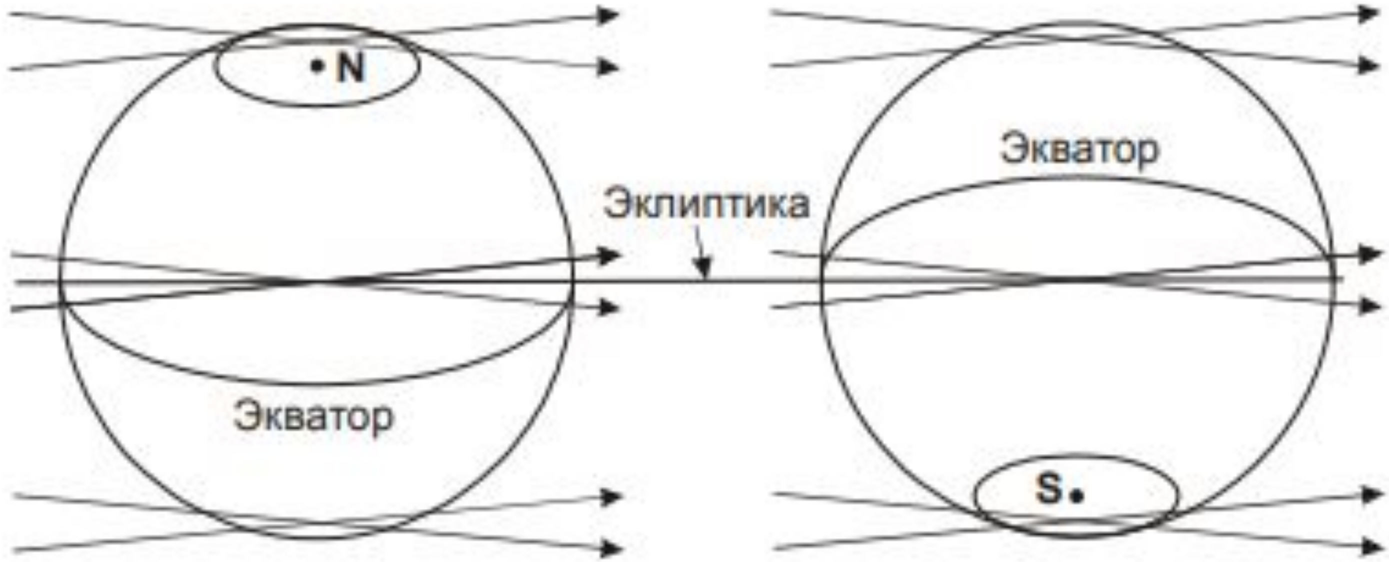
$$f = \frac{2^{\circ}32'}{1^{\circ}} d = 44 \text{ мм.}$$

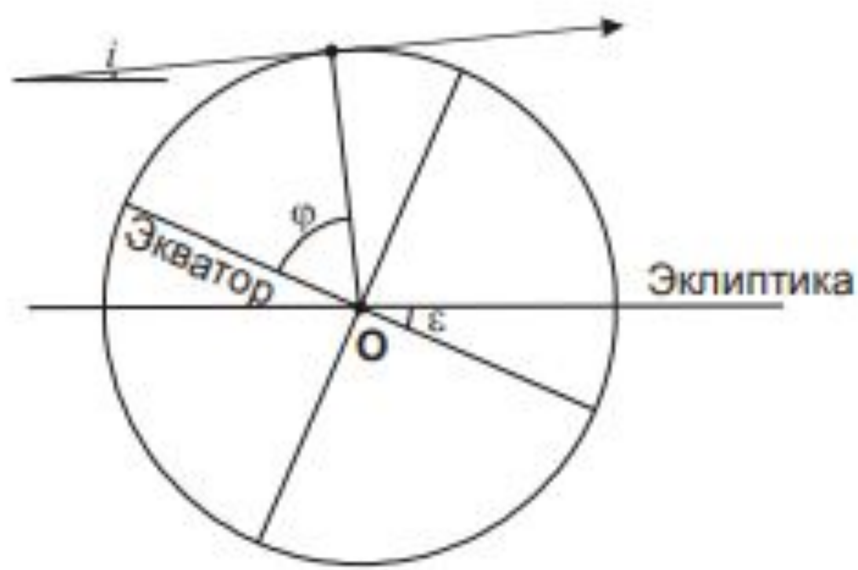
IX.4 БЕГУЩАЯ ТЕНЬ

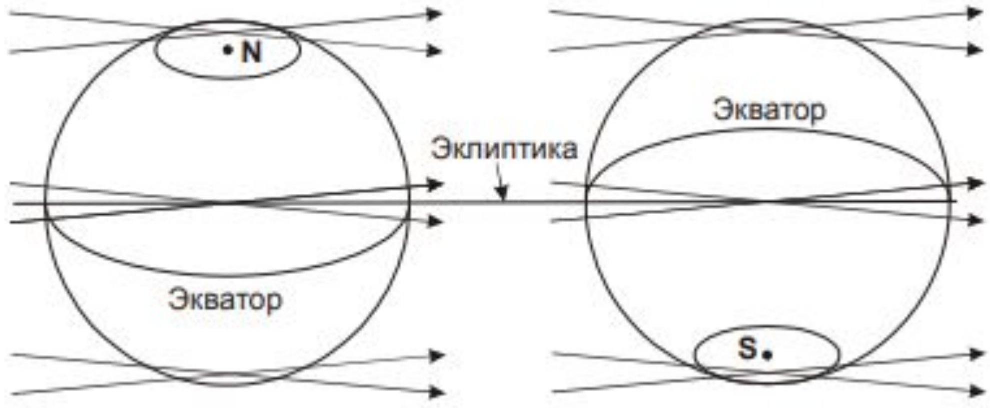
А.Н. Акиньщиков

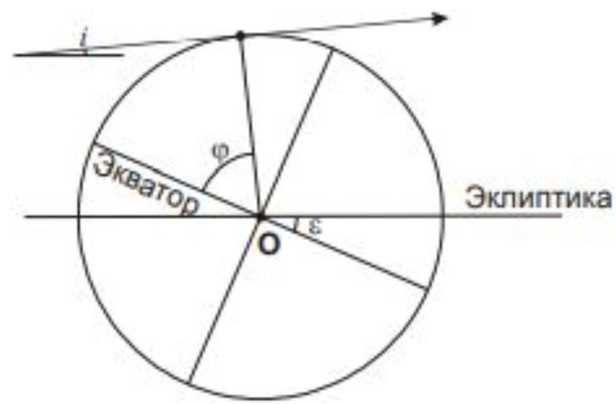
4. Условие. В каких широтах лунная тень во время солнечного затмения может двигаться по поверхности Земли точно с запада на восток, и в каких – точно с востока на запад? Атмосферной рефракцией и рельефом Земли пренебречь.

4. Решение. Луна движется по орбите вокруг Земли против часовой стрелки (если смотреть с северной стороны) и при полном солнечном затмении ее тень движется по поверхности Земли обычно от утреннего полушария к вечернему. На рисунке показаны примеры движения тени Луны во время летнего и зимнего солнцестояния. Направление движения тени наклонено к плоскости эклиптики на малый угол (около 5°). В зависимости от сезона, когда наблюдается затмение, для любой широты от северного до южного полюса тень Луны в какой–то точке Земли может двигаться точно вдоль параллели, с запада на восток.


N
Экватор
Эклиптика
Экватор
S


i
φ
Экватор
Эклиптика
ε
O





На этих же рисунках мы можем видеть, что вблизи летнего солнцестояния, если затмение наблюдается вблизи светлой полуночи в полярной области Земли на широтах более +66.6° (Северный полярный круг), тень может двигаться и с востока на запад. Соответственно, за Южным полярным кругом (широты от –66.6° до –90°) такая ситуация может случиться вблизи дня зимнего солнцестояния. Однако, широты в ±66.6° не будут предельными. Для нахождения граничной широты рассмотрим иной случай. Пусть затмение происходит вблизи весеннего равноденствия, а Луна располагается у восходящего узла своей орбиты. Предположим также, что лунная тень лишь слегка задела Землю с северной стороны. По рисунку мы можем определить, на какой широте произошло касание:

$$\varphi = 90° - \varepsilon - i = 61.4°.$$

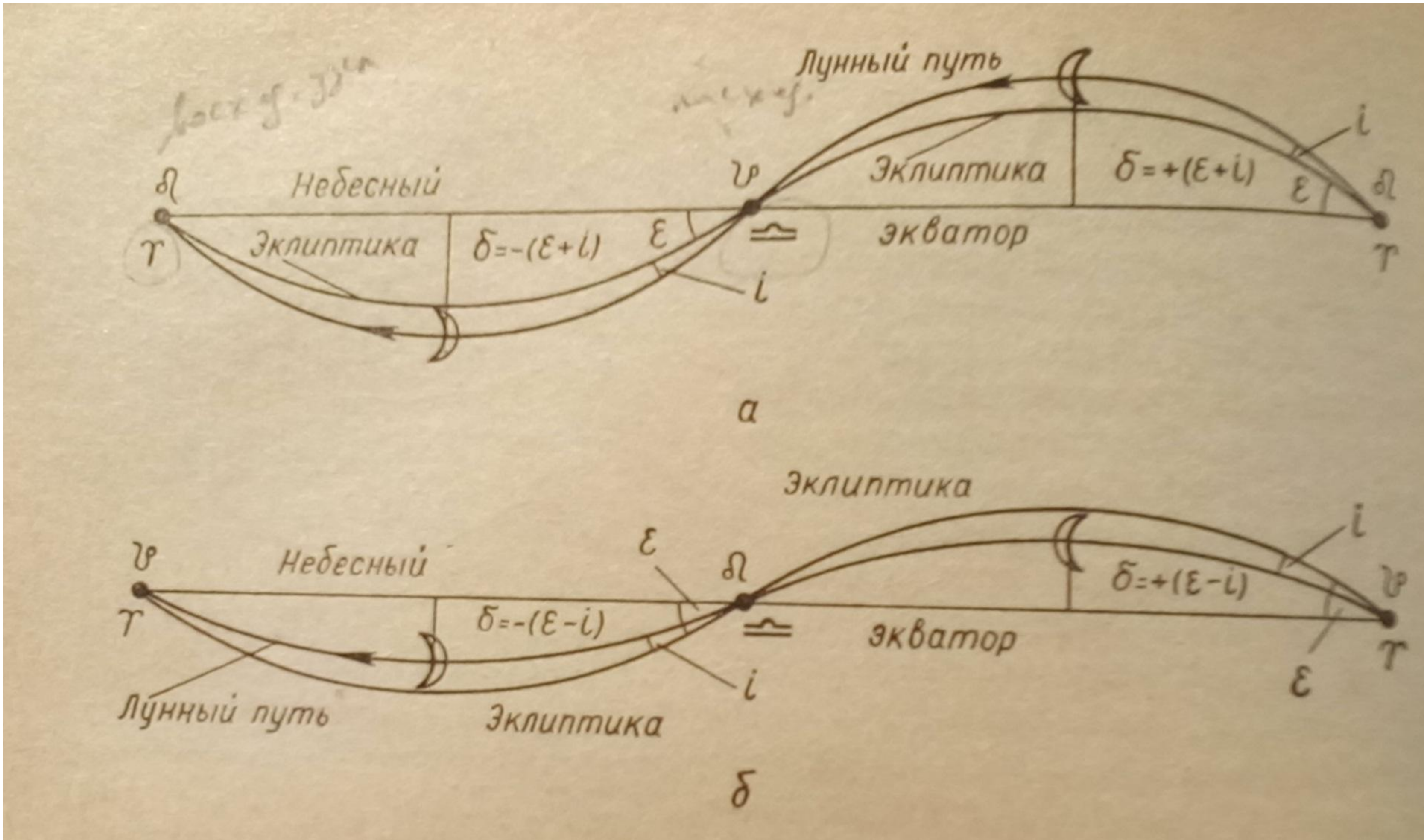
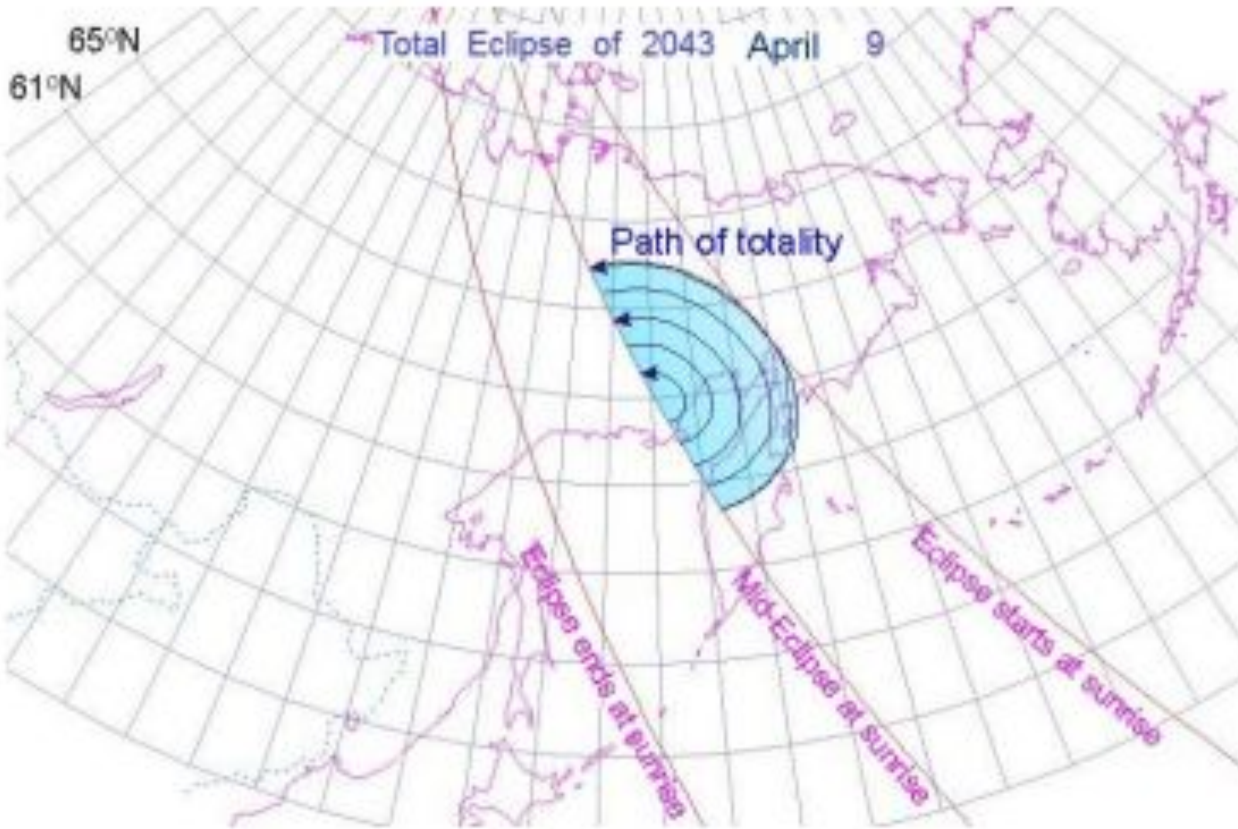


Рис. 60. Предельные положения лунного пути.

Плоскость лунной орбиты и линия узлов поворачиваются с востока на запад (навстречу движению Луны) с периодом 18,61 г, поэтому лунные узлы перемещаются
по эклиптике в том же направлении на 19,3^0 в год или 1,5^0 за сидерический месяц.
Луна возвращается к одному и тому же узлу через период, называемый **драконическим месяцем:** S_{Ω} =27,21^{д}

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике, i – наклон орбиты Луны к эклиптике. При затмении, близком к касательному, тень опишет на поверхности Земли дугу, по форме близкую к полукругу. В какой-то момент, ближе к окончанию затмения, она будет двигаться в западном направлении. Похожая ситуация сложится во время полного солнечного затмения 9 апреля 2043 года, которое будет наблюдаться на восходе Солнца на севере Камчатского полуострова. Область видимости полной фазы показана на рисунке. Такая же картина может наблюдаться в южном полушарии на широтах ниже –61.4° на заходе Солнца вблизи весеннего равноденствия или на его восходе вблизи осеннего равноденствия.



4. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Интервал широт, где тень может двигаться с запада на восток. Оценивается 3 баллами только в случае правильного ответа (все широты). При указании половины интервала (от экватора до полюса) оценка составляет 1 балл, при указании интервала между полярными кругами - также 1 балл, в остальных случаях оценка за этап - 0 баллов. Формально говоря, участник олимпиады может не включать в ответ сами полюса, так как там понятия запада и востока не определены, это не влияет на оценку.

Этап 2 - 5 баллов. Интервал широт, где тень может двигаться с востока на запад. При указании интервала широт от полярного круга до полюса (наиболее вероятная ошибка) оценка составляет 1 балл при указании одного полушария и 2 балла - при указании двух полушарий. При указании правильных границ оценка составляет 3 балла при указании одного полушария и 5 баллов - при указании двух полушарий. В последнем случае должно быть указано, при каких обстоятельствах может произойти такое затмение - вблизи равноденствий, тень Луны касается поверхности Земли. Оценка не меняется, если границы интервала изменены на 0.25° для учета видимых размеров Солнца.

Вероятная ошибка при правильном ответе: участник рассматривает случай, соответствующий солнцестояниям (верхние рисунки), но при этом указывает, что склонение Луны может достигать $\varepsilon+i=28.6°$, и поэтому минимальная широта по модулю равна 61.4°. Хотя данный ответ численно совпадает с правильным, но он получен из неверных соображений, так как при таких склонениях Луны затмения наступить не могут. Оценка за второй этап не превосходит 2 баллов (1 балла при указании одного полушария). Это правило действует, даже если участник олимпиады не указывает такое значение склонения Луны, но оно вытекает из его рассуждений, либо если правильный ответ дается без обоснований.

IX.2 АРЕС В ГОСТЯХ У АНТАРЕСА

А.Н. Акиньщиков

Условие. 22 мая 2016 года Марс прошел точку противостояния с Солнцем в созвездии Скорпиона. В этот момент он был примерно на середине своего пути через это созвездие. Считая, что Марс движется в плоскости эклиптики, оцените, когда наступит следующее противостояние Марса, при котором он вновь окажется в созвездии Скорпиона. Известно, что Солнце находится в Скорпионе 7 дней в году.

Решение. То, что Солнце находится в Скорпионе 7 дней в году, означает, что длина дуги эклиптики, проходящая через это созвездие, составляет примерно 7°. То есть, будущее противостояние Марса, о котором идет речь, должно наступить в точке неба, удаленной не более, чем на 3.5° (0.01 от полного круга) от положения в противостоянии в 2016 году.

При решении задачи мы, вообще говоря, должны учитывать эксцентриситет орбиты Марса. Он приводит к тому, что синодический период этой планеты не является величиной постоянной. Например, противостояния 2018 и 2020 годов будет разделять не 780, а целых 809 дней. Однако, нас будут интересовать противостояния вблизи одного положения Марса на орбите примерно в 90° от точки перигелия. Во время противостояния 2016 года Марс располагался как раз на своем среднем расстоянии от Солнца – 1.52 а.е. Его угловая скорость вращения в этот момент также была близка к среднему значению. Поэтому при решении задачи мы будем считать орбитальное вращение Марса равномерным, а синодический период - постоянным.

Средний синодический период Марса составляет 780 дней или 2.135 года. Каждое следующее противостояние происходит через 1.5-2.5 месяца после предыдущего. Через 7-8 синодических периодов, составляющих 15 или 17 лет, противостояния Марса вернутся примерно на те же календарные сезоны и будут происходить в тех же областях неба. Но если мы рассчитаем точную длительность 7 и 8 синодических периодов, мы получим 14.945 и 17.080 лет. Помня о нашем упрощении (постоянство синодического периода), мы получаем, что соответствующие противостояния произойдут в 0.055 и 0.080 доли окружности от точки изначального противостояния. Это соответствует угловым расстояниям Δl в 19.8° и 28.8° к западу и востоку, что существенно больше половины дуги пути Солнца через созвездие Скорпиона. Поэтому через 15 и 17 лет, в 2031 и 2033 годах, противостояния Марса случатся в других созвездиях.

Чтобы облегчить решение задачи, будем проверять не все возможные значения количества синодических периодов, а числа $N=7p+8q$, где p и q – целые числа, отличающиеся не более, чем на единицу. Для таких N мы будем вычислять соответствующую величину времени в годах. Результаты занесем в таблицу:

p	q	N	T, годы	Δl, часть окружности	Δl,°
1	0	7	14.945	0.055	19.8
0	1	8	17.080	0.080	28.8
1	1	15	32.025	0.025	9.0
2	1	22	46.970	0.030	10.8
1	2	23	49.105	0.105	37.8
2	2	30	64.050	0.050	18.0
3	**2**	**37**	**78.995**	**0.005**	**1.8**
2	3	38	81.130	0.130	46.8

IX. 3 ДАЛЕКИЙ КОРАБЛЬ

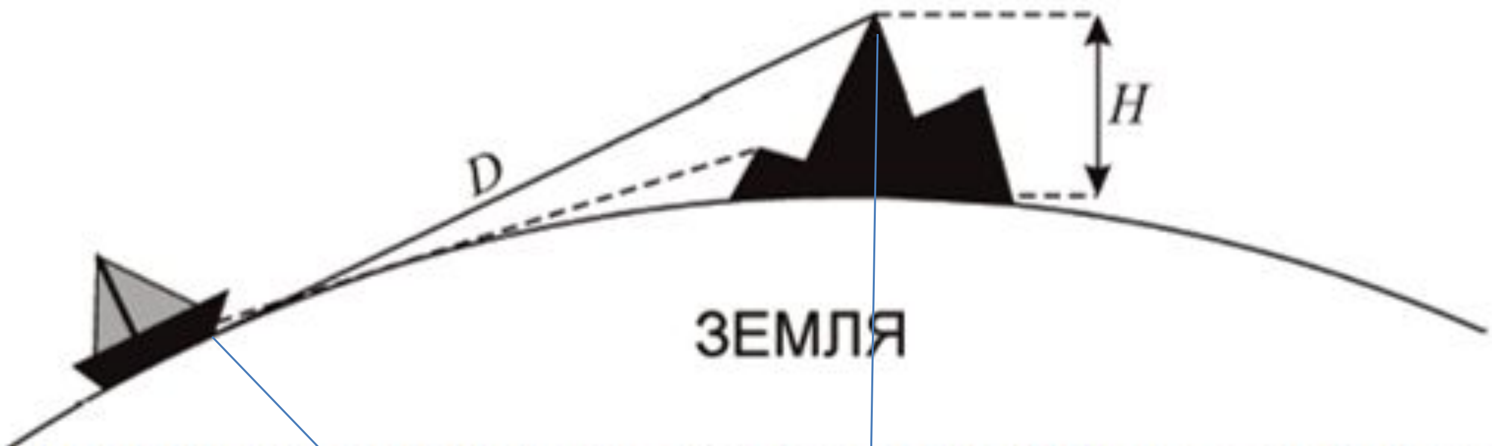
О.С. Угольников

? Находясь на вершине горы над морем, наблюдатель видит небольшой корабль у горизонта. Различая форму корабля, он видит, что его нижняя надводная часть скрыта за горизонтом. Найдите максимально возможную высоту горы, если размер корабля составляет 20 метров. Атмосферной рефракцией и искажениями пренебречь.

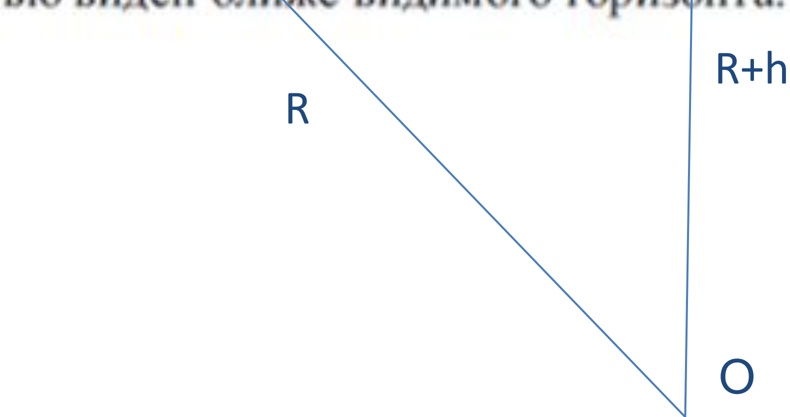
! Предел углового разрешения человеческого глаза составляет примерно $1'$. Раз наблюдатель различает форму корабля, его угловой размер должен быть в несколько раз (можно считать, в 3 раза) больше, то есть не меньше $3'$ или 10^{-3} радиан. Это может быть, если расстояние до корабля *D* не больше его размеров, умноженных на 1000, то есть 20 километров.

Определим предельную высоту горы H, с которой поверхность воды у корабля будет видна на самом горизонте:

$$H = \sqrt{R^2 + D^2} - R \approx \frac{D^2}{2R} = 30 \text{ м.}$$



Это и есть искомый верхний предел, так как при наблюдении с меньшей высоты нижняя часть корабля не будет видна над морем, а с большей высоты корабль будет полностью виден ближе видимого горизонта.



IX/X.3 ВНУТРИ ГАЛАКТИКИ

О.С. Угольников

3. Условие. Эллиптическая галактика типа E0 (шарообразная форма) на 20% по массе состоит из звезд солнечного типа и на 80% - из темной материи. Плотность обеих составляющих постоянна на всем объеме галактики. Некоторая звезда движется по замкнутой траектории внутри галактики, не вылетая за ее пределы, с периодом 100 миллионов лет. Сколько всего звезд было бы видно невооруженным глазом в небе обитаемой планеты, обращающейся вокруг этой звезды? Тесные сближения с другими звездами не учитывать.

3. Решение. Как известно, для сферического однородного массивного тела выполняется свойство: на материальную точку, расположенную внутри нее, действует притяжение всех частей тела, расположенных ближе к центру, нежели эта точка, а действие внешних слоев компенсируется. Таким образом, на тело, расположенное на расстоянии r от центра, будет действовать ускорение тяготения:

$$g = -\frac{4\pi G\rho r}{3}.$$

Знак "–" означает, что ускорение направлено к центру, противоположно радиусу-вектору **r**. Мы получили уравнение, похожее на уравнение пружинного маятника, возвращающая сила которого противоположна по знаку и пропорциональна по величине смещению груза маятника относительно равновесного положения: $a = -\omega^2 r$, здесь ω – частота колебаний маятника. В таком поле тяжести звезда будет совершать движение с постоянным периодом, не зависящим от начального положения. Колебания могут происходить и в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, и тогда звезда будет описывать эллипс, но центр галактики будет уже не в фокусе, а в центре этого эллипса. Период колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}.$$

Отсюда мы получаем соотношение для полной плотности галактики:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = 1.4 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3.$$

Учтем далее, что на звезды приходится лишь доля η (0.2) от этой плотности и найдем концентрацию звезд солнечного типа в этой галактике n:

$$\rho \cdot \eta = n \cdot M; \quad n = \frac{\rho \cdot \eta}{M} = \frac{3\pi\eta}{GMT^2} = 1.4 \cdot 10^{-51} \text{ м}^{-3} = 0.041 \text{ пк}^{-3}.$$

Здесь M - масса Солнца. Определим, с какого расстояния r_0 Солнце, имеющее абсолютную звездную величину m_0 (+4.7) будет выглядеть как звезда с m=+6:

$$\lg r_0 = \frac{m - m_0}{5} + 1; \quad r_0 = 18.2 \text{ пк}.$$

Искомое число звезд есть их число внутри сферы с найденным радиусом:

$$N = \frac{4\pi n r_0^3}{3} \approx 1000.$$

3. Система оценивания.

Этап 1 - 3 балла. Установление связи между периодом вращения звезды и плотностью галактики, определение плотности.
Участники могут идти путем, описанным выше, и в этом случае этап при условии правильного выполнения оценивается полностью (3 балла). Они могут предположить, что орбита звезды круговая и произвести расчет по стандартным формулам небесной механики, учитывая только внутреннюю часть галактики. Тогда за этап выставляется 2 балла, но последующие этапы оцениваются в полной мере.

Этап 2 - 2 балла. Определение концентрации звезд в галактике.
Требуемая точность 10%.
Вероятная ошибка при решении: участник забывает о темной материи, завышая концентрацию звезд в 5 раз. В этом случае не засчитывается данный этап, а также финальный этап (запись ответа).

Этап 3 - 2 балла. Нахождение максимального расстояния до звезды, видимой невооруженным глазом.
В качестве предельной звездной величины для невооруженного глаза могут браться значения от 5.5^m до 6.5^m, что не является ошибкой. В остальных расчетах точность должна быть не хуже 10%.

Этап 4 - 1 балл. Определение числа звезд, видимых в небе планеты.
Засчитывается в случае правильных выполнений предыдущих этапов. Отличие ответа от приведенного выше может быть вызвано только другим заданием предельной звездной величины на этапе 3, во всех остальных случаях при отклонениях ответа более, чем на 20%, этап не засчитывается. Участники могут найти число звезд, видимых в один момент с одной точки поверхности планеты и получить число около 500, что также засчитывается при условии соответствующего описания найденной величины.

Вероятная ошибка при решении: попытка учета межзвездного поглощения света в галактике, которое при описанном условии отсутствует. Оценка определяется точностью выполнения всех этапов и далее уменьшается на 2 балла.

IX.8 ПОСТОЯННАЯ ХАББЛА

А.М. Татарников

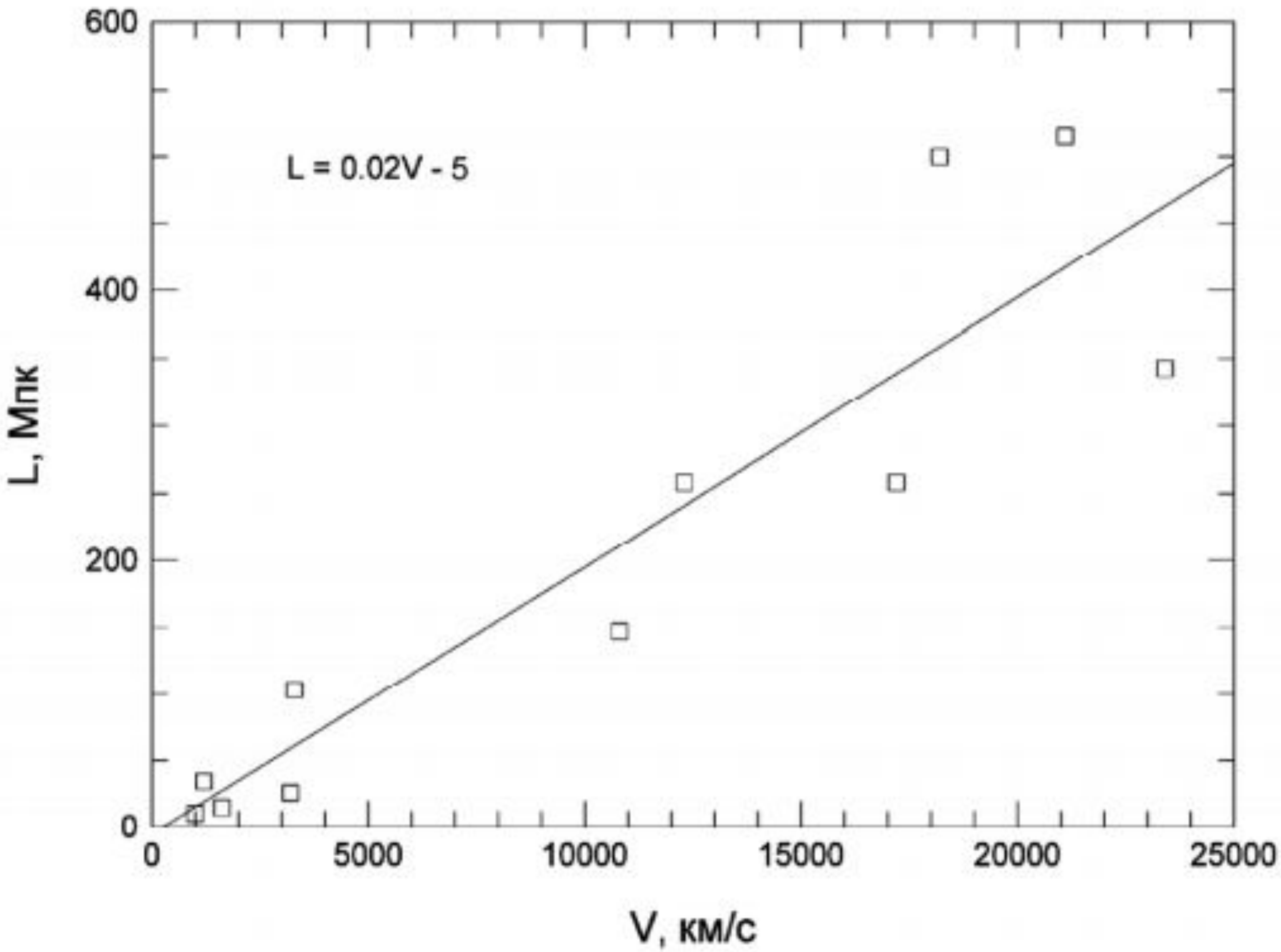
Условие. Некий любитель астрономии решил самостоятельно определить значение постоянной Хаббла H, связывающей скорость удаления далекой галактики v и расстояние до нее r ($v=H\cdot r$). Для этого он по разным каталогам и критериям отобрал спиральные галактики, относящиеся к типу SBbc – тому же, что и Галактика Млечный Путь. Вам дана составленная им таблица с лучевыми скоростями галактик и их угловыми размерами. Оцените значение постоянной Хаббла по этим данным. Проанализируйте полученный результат.

Название	**V, км/сек**	**Диаметр большой оси, ′**	**Диаметр малой оси, ′**
Млечный путь	---	---	---
Gal1	-20	15	7
Gal2	3290	1	0.4
Gal3	300	10	2
Gal4	1000	10	9
Gal5	50	22	15
Gal6	3200	4	4
Gal7	1620	7	6.5
Gal8	12300	0.4	0.2
Gal9	23400	0.3	0.3
Gal10	120	17	16
Gal11	10800	0.7	0.7
Gal12	17200	0.4	0.4
Gal13	1200	3	1
Gal14	21100	0.2	0.1
Gal15	18200	0.2	0.1

Решение. Наша Галактика Млечный Путь также относится к типу SBbc. Поэтому будем считать, что галактики из представленной таблицы имеют такие же линейные размеры, что и Млечный путь, т.е. R=15 кпк. Тогда представленные в таблице угловые размеры могут быть использованы для вычисления расстояния до галактик и построения стандартного графика «расстояние-скорость» для определения величины постоянной Хаббла H. Помня о том, что о диаметре диска галактики говорит размер большой оси изображения, построим таблицу:

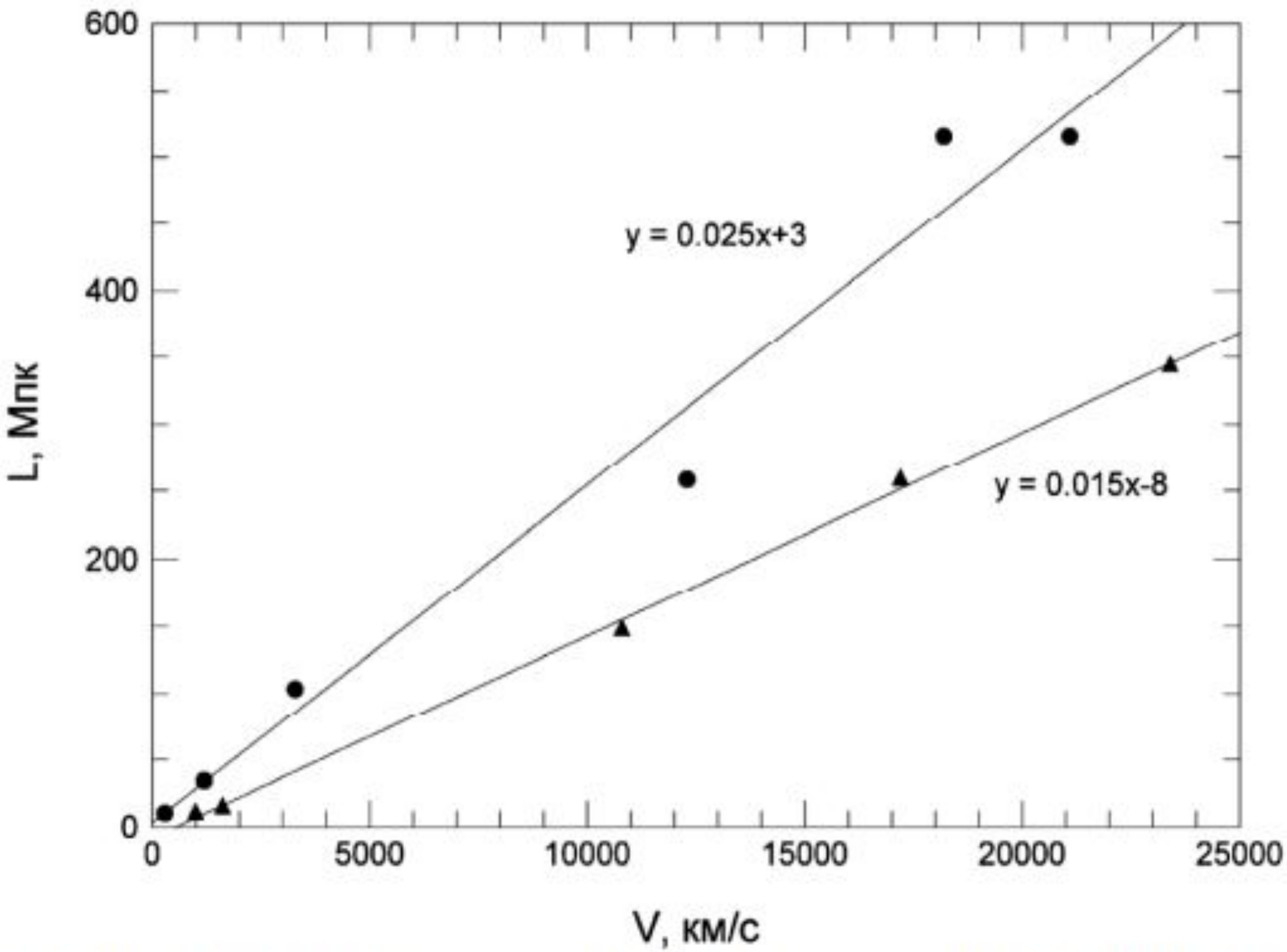
Название	V, км/сек	Диаметр большой оси, ′	Расстояние, Мпк
Млечный путь	---	---	---
Gal1	-20	15	7
Gal2	3290	1	103
Gal3	300	10	10.3
Gal4	1000	10	10.3
Gal5	50	22	4.7
Gal6	3200	4	25.8
Gal7	1620	7	14.7
Gal8	12300	0.4	258
Gal9	23400	0.3	343
Gal10	120	17	6
Gal11	10800	0.7	147
Gal12	17200	0.4	258
Gal13	1200	3	34.3
Gal14	21100	0.2	515
Gal15	18200	0.2	515

Так как величина постоянной Хаббла определяется крупномасштабным расширением Вселенной, то мы не можем при построении графика использовать близкие к нам галактики. Ограничимся при этом галактиками, имеющими скорости свыше 1000 км/с (допустимо использовать и галактику со скоростью 500 км/с – это не несет большой ошибки, но вот со скоростью 120 км/с – нет).



Нанесем на график V(R) данные из 1 и 3 столбцов таблицы и проведем через точки прямую линию. Коэффициент ее наклона равен $1/H$. Отсюда мы получаем величину постоянной Хаббла: H=50 км/(с·Мпк).

Полученное нами значение не согласуется с современными данными. При построении графика мы руководствовались тем, что все галактики из списка имеют такой же тип, как и Млечный путь. Однако, при внимательном изучении таблицы мы можем увидеть, что часть галактик в ней наблюдаются под большим углом. При этом будет затруднительно (если вообще возможно) сделать вывод об их принадлежности именно к типу SBbc. Если мы построим отдельно соответствующие графики для галактик, наблюдаемых с ребра, и тех, что видны плашмя, то получим:



В этом случае для популяции галактик, наблюдающихся плашмя, H=67 км/(с·Мпк), а для второй популяции – H=40 км/(с·Мпк). Скорее всего, вторая группа представлена галактиками меньших размеров, чем Млечный Путь.

Система оценивания (от одного члена жюри). Первым этапом решения является оценка расстояний до галактик. При этом радиус нашей Галактики может приниматься от 12 до 20 кпк, что изменяет окончательный ответ, но не влияет на оценку. Данный этап решения оценивается в 3 балла. Последующее определение коэффициента пропорциональности между скоростью и расстоянием оценивается в 7 баллов при условии четкого математического исполнения методом наименьших квадратов или его упрощенным вариантом:

$$H = \frac{\sum v_i R_i}{\sum R_i^2}.$$

Это эквивалентно усреднению отношений (v/R) с весом R – учитываются, прежде всего, далекие галактики. Если вместо этого делается обычное усреднение отношений (v/R), оценка уменьшается на 4 балла. Еще 2 балла вычитается, если из анализа не исключаются близкие галактики. Если величина постоянной Хаббла определяется графически, оценка за второй этап уменьшается до 5 баллов. 2 балла выставляются за анализ полученного результата.

В случае записи величины постоянной Хаббла, близкой к справочному значению (68 км/с) без корректного анализа данных в условии задачи максимальная оценка за все решение не превышает 2 баллов.

? **Вам предложены несколько изображений Луны, сделанных с Земли (последняя страница обложки). Определите, на каких из них происходит лунное затмение (в полутеневой или теневой фазе), а на каких затмения нет. Обоснуйте свои ответы.**