Линейные блочные коды.
Коды Хэмминга.

Линейные блочные коды позволяют представить информационные и кодовые слова ***в виде двоичных векторов***, что позволяет описать процессы кодирования и декодирования с помощью аппарата линейной алгебры, с учетом того, что компонентами вводимых векторов и матриц являются символы **«0» и «1».** Операции над двоичными компонентами производятся при этом по правилам арифметики по модулю 2.

Множество 2^k возможных двоичных информационных слов блокового (n,k)-кода взаимно однозначно отображается в множество 2^k кодовых слов длиной n.

Рассмотрим ***механизм исправления и обнаружения ошибок в помехоустойчивом кодировании***. Для этого удобно рассмотреть множество двоичных слов (векторов) длиной N в виде точек на плоскости. На рис. 1 черными кругами показаны два кодовых слова c_1 и c_2, отличающиеся друг от друга в d_{min} двоичных символов. Вокруг них показаны области, содержащие слова длиной *n,* отличающиеся от этих кодовых слов не более чем в *t* позициях. Прочие кодовые слова показаны черными ромбами.

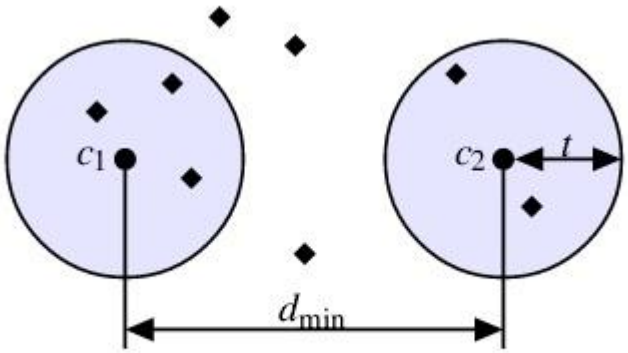
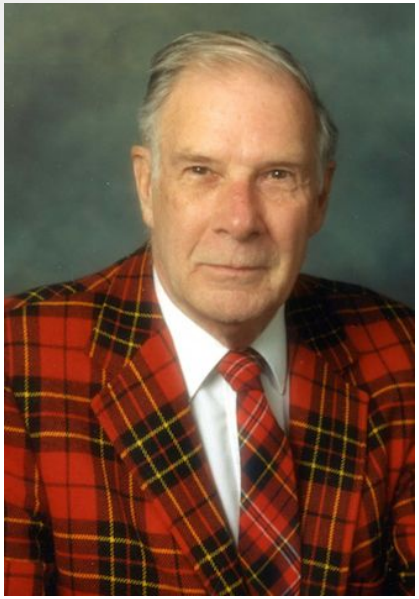


Рис. 1. Общий принцип исправления и обнаружения ошибок

В случае, если по каналу было передано кодовое слово c_1, и оно пришло ***с искажениями***, возможны ***три варианта*** декодирования с исправлением ошибки.

- ***1.*** *Было получено слово, попадающее в область вокруг вектора* c_1. *Такое слово будет преобразовано декодером в слово* c_1 *и декодирование будет осуществлено верно.*
- ***2.*** *Если получено слово, не принадлежащее областям ни одного кодового слова, то оно не может быть декодировано и, следовательно, возникает ошибка декодирования.*
- ***3.*** *Слово, попадающее в область вокруг* c_2, *будет преобразовано декодером в* c_2. *Такая ошибка не может быть обнаружена.*

В показанном на рис. 1 случае не все слова размерности *n* принадлежат областям декодирования. Таких кодов большинство. *Коды, в которых непересекающиеся области декодирования охватывают все пространство слов размерности n, называются* **совершенными** или **плотноупакованными**. При использовании совершенных кодов всегда возможна коррекция ошибок (не всегда правильная). Декодер такого кода не может определить ошибку декодирования. Он работает либо в ***режиме определения ошибок,*** либо в ***режиме исправления ошибок***. Основными совершенными кодами являются коды *Хэмминга* и коды *Голея*.



Код Хэмминга можно построить для натурального числа r ≥3. *Этот код будет обладать рядом* **свойств**

- $n - 2^r - 1$
- $k - 2^r - 1 - r$
- $r - n - k$
- $d_{\min} - 3, t - 1$

Далее будем рассматривать процессы кодирования и декодирования линейных блочных кодов на примере кодов Хэмминга.

Кодирование линейных блочных кодов.

Поскольку между информационными и кодовыми словами существует ***взаимно однозначное соответствие***, процесс кодирования может быть осуществлен с использованием таблицы соответствий, хранящейся в памяти кодера. Однако, для длинных кодов такой метод неприемлем, так как требует большой объем памяти для хранения таблицы.

Вместо этого вводится понятие так называемой порождающей матрицы *G*. Оно основано на том, что подпространство всех кодовых слов линейного блочного (n,k)-кода имеет некоторый базис ($v_0, v_{1,\ldots,} v_{k-1}$), через ко

$$v = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_{k-1} v_{k-1}, \quad \text{где } u_i \in \{0,1\},\ 0 \le i < k. \tag{34}$$

бое кодовое слово этого кода.

Векторы базиса

$$G = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \ldots \\ v_k - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \ldots & v_{0,n-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \ldots & v_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{k-1,0} & v_{k-1,1} & \ldots & v_{k-1,n-1} \end{bmatrix} \tag{35}$$

ра k*n

Тогда уравнение (34) принимает вид

$$v = uG, \quad (36)$$

Фактически, *формула (36) описывает процедуру кодирования линейного блочного кода* посредством образующей матрицы.

Для пространства кодовых слов линейного (n,k)-кода существует дуальное ему пространство кода (n,n-k), порождаемое матрицей H размера (n-k)*n. *Такая матрица* получила название *проверочной* для кода (n,k) и обладает следующими *свойствами:*

$$\begin{aligned} GH^T &= 0, \\ vH^T &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

на основе которых реализована ***операция декодирования линейных блочных кодов.***

Как правило рассматривают так называемые ***систематические*** или ***канонические*** формы матриц G и H, использующиеся для процедуры систематического кодирования. На практике, *любая порождающая матрица G линейного блочного (n, k)-кода может быть преобразована к систематическому виду посредством элементарных операций и перестановок столбцов матрицы.*

Матрица G в систематической форме состоит из двух подматриц: единичной матрицы I_k размера k*k и проверочной подматрицы P размера k*(n-k).

$$G_{k\times n} - (P_{k\times(n-k)}|I_k). \quad (38)$$

Соответственно, исходя из *свойства (37),* следует, что *проверочная матрица* **H** состоит из единичной матрицы I_{n-k} и транспонированной проверочной под матрицы **P.**

$$H_{(n-k)\times n} - (I_{n-k}|P^T_{k\times(n-k)}). \qquad (39)$$

В качестве примера приведем *порождающую(40)* и *проверочную(41)* матрицы для кода Хэмминга *(7; 4).*

$$G_{(7,4)} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (40)$$

$$H_{(7,4)} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (41)$$

Для примера также рассмотрим процедуру кодирования с использованием *порождающей* матрицы G (40). В качестве информационного слова возьмем вектор u = [1 0 1 1].

$$v = u \cdot G_{(7,4)} = [1\ 0\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1]. \qquad (42)$$

Декодирование линейных блочных кодов

Как и в случае кодирования, декодирование линейных блочных кодов можно *осуществлять посредством таблицы по принципу максимального правдоподобия*.

В этом случае производится ***последовательное поразрядное сравнение принятого на вход декодера слова со всеми возможными кодовыми словами***. В результате будет выбрано кодовое слово, имеющее наименьшее число отличий от декодируемого. В случае несовершенных кодов возможен вариант, когда есть несколько кодовых слов, отличающихся от принятого в одинаковом числе разрядов. *Соответственно, декодер не может принять решение о верности одного из вариантов и выдает сигнал о невозможности декодирования*. Недостатки такой схемы те же, что и в случае кодирования — необходим большой объем памяти для хранения всех кодовых слов в случае длинных кодов. Быстродействие для длинных кодов также значительно увеличивается.

В связи с этим используют механизм *синдромного декодирования*, основанный на использовании проверочной матрицы H.

Для понимания принципа декодирования рассмотрим как выражаются проверочные символы кодового слова через информационные на примере ***систематического кода*** Хэмминга (7; 4).

$$v_0 = v_3 \oplus v_5 \oplus v_6;$$
$$v_1 = v_3 \oplus v_4 \oplus v_5;$$
$$v_2 = v_4 \oplus v_5 \oplus v_6.$$

Если в канале произошла ошибка, то для принятого вектора r хотя бы одно из равенств выполняться **не будет**. Эти проверочные соотношения можно записать для принятого вектора в виде системы уравнений *(43).*

$$r_0 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_6 = s_0;$$
$$r_1 \oplus r_3 \oplus r_4 \oplus r_5 = s_1; \qquad (43)$$
$$r_2 \oplus r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 = s_2.$$

Соответственно, если хотя бы один из компонент вектора $s = \{s_0; s_1; s_2\}$ **не равен нулю**, то в принятом слове есть ошибка.

Уравнения *(43)* можно $$s = r \odot H^T. \quad (44)$$ ерочную матрицу H.

Вектор s принято называть синдромом. Таким образом, ошибка в принятом слове будет обнаружена, если хоть один компонент синдрома принятого слова не равен нулю.

Для исправления ошибки используется тот факт, что каждый синдром соответствует своей позиции одиночной ошибки (код Хэмминга). Таким образом, перебрав все возможные варианты одиночной ошибки можно получить таблицу

Таблица 5.1

Таблица соответствия синдром-ошибка для кода Хэмминга (7,4)

Позиция ошибки	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
Синдром	[1 0 0]	[0 1 0]	[0 0 1]	[1 1 0]	[0 1 1]	[1 1 1]	[1 0 1]

Если сравнить *табл. 5.1* и проверочную *матрицу (41),* то можно увидеть, что ошибке в *i-й* позиции кодового слова соответствует синдром,образованный *i-м* столбцом матрицы **H.**

Для примера рассмотрим декодирование полученной ранее кодовой комбинации v = [1 0 0 1 0 1 1] *без ошибок и с ошибкой* в позиции v_4.

При *or*

$$s = v \odot H^T = [1\,0\,0\,1\,0\,1\,1] \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\,0\,0],$$

что доказывает отсутствие ошибки.

Если ***наложить на вектор v ошибку*** в позиции v_4 будет получен вектор r = [1 0 0 1 1 1 1]. Теперь синдром будет равен:

$$s = r \odot H^T = [1\,0\,0\,1\,1\,1\,1] \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\,1\,1],$$

что, во-первых, *показывает наличие ошибки*, а во-вторых, согласно *табл. 5.1, указывает, что она произошла в позиции* r_4. Таким образом, *ошибка может быть исправлена.*

Расширенные коды Хэмминга.

Расширение кода Хэмминга заключается в дополнении кодового слова дополнительным ***двоичным разрядом*** так, чтобы оно содержало **четное** число единиц. Такое расширение дает ряд преимуществ:

- Длина кода увеличивается до $\mathbf{n = 2^r}$, что удобнее для хранения и передачи информации.
- Минимальное расстояние $\mathbf{d_{min} = 4}$, следовательно $\mathbf{t_{обн} = 3}$.

Также, дополнительный разряд позволяет использовать декодер в **гибридном режиме** обнаружения и коррекции ошибок

Для примера рассмотрим расширение кода Хэмминга (7,4) - расширенный код Хэмминга (8,4).

Кодовый вектор

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_7)$$

расширенного кода (8,4) получается из вектора

$$v = (v_0, v_1, \ldots, v_6)$$

кода (7,4) путем добавления разряда проверки на четность, то есть

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_7) = (\tilde{v}_0, v_0, v_1, \ldots, v_6),$$

где

$$\tilde{v}_0 = \sum_{i=0}^{6} v_i.$$

Проверочная матрица кода (8,4) получается из проверочной матрицы кода (7,4) в два приема.

1. Слева к матрице $H_{(7;4)}$ дописывается нулевой столбец.

2. Полученная матрица дополняется сверху строкой из единиц.

$$H_{(8,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

При синдромном декодировани $\tilde{s} = \tilde{v} \odot H^T_{(8,4)}$ (46)

вектор синдрома имеет вид $\tilde{s} = (\tilde{s}_0, s_0, s_1, s_2) = (\tilde{s}_0, s), \quad (47)$

где компонента $\tilde{s}_0$ *равна сумме всех элементов кодового слова* $\tilde{v}$ и, следовательно, равна *нулю.*

Рассмотрим процесс коррекции и обнаружения ошибок.

Процедура исправления одиночных ошибок совпадает с таковой для обычных кодов Хэмминга. К$\tilde{s}_0$понента при этом всегда равна единице, а синдром s соответствует синдрому обычного кода Хэмминга. Если же ошибка в $\tilde{v}_0$ дс$\tilde{s}_0$пнительном разряде , то будет **равно 1**, а ***s* = (0 0 0).** І Іри двук$\tilde{s}_0$ной же ошибке компонента всегда будет равна **нулю**. Таким образом можно представить гибридный алгоритм коррекции ошибок.

1.Если $\tilde{s}_0$ **= 1, то исправление одиночной ошибки.**

2.Если $\tilde{s}_0$ **= 0 и s≠0, то обнаружена неисправляемая ошибка**

Спасибо за внимание!!!