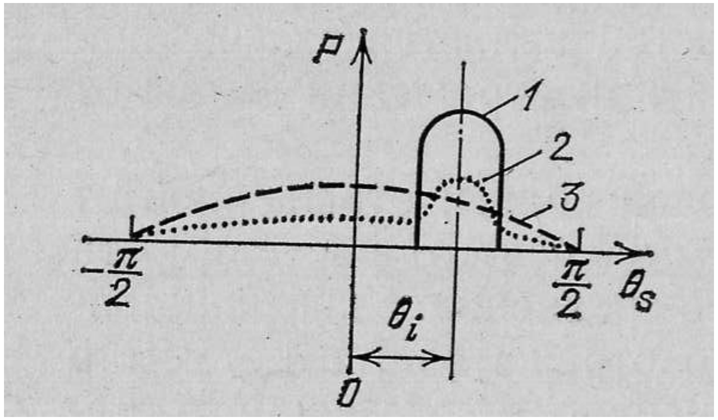
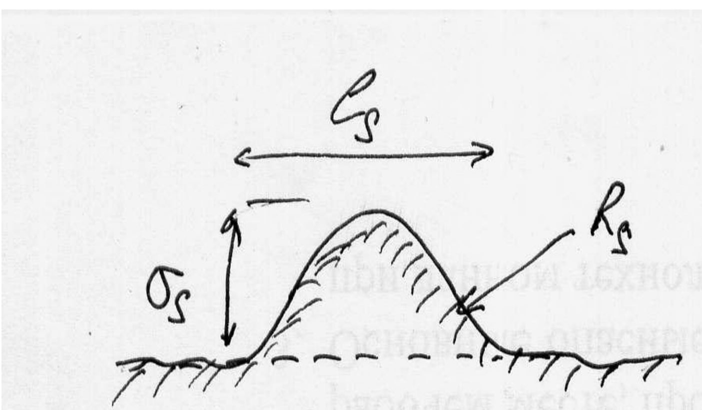
Рассеяние света на шероховатой поверхности



$$z < z_{пр}$$

$$z \square \; L_s = k l_s^{\,2}$$

$$l_s \square \; \lambda$$



$$\sigma_s \square \; \lambda, \; \frac{\sigma_s}{l_s} \square \; 1 - MMB$$

$$\sigma_s \square \; \lambda, (\lambda R_s)^{1/3} \square \; 1 - МКУТ$$

$$\vec{\rho}\,' = \left\{\vec{r}, z'\right\}, \; E\left(\vec{\rho}\right), \; \psi\left(\vec{\rho}\right)$$

$$\psi\left(\vec{\rho}\,'\right)=V\left(\vec{\rho}\,'\right)E\left(\vec{\rho}\,'\right),\quad \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}=-V\left(\vec{\rho}\,'\right)\frac{\partial E}{\partial\vec{n}}$$

Падающая волна локально плоская:

$$E\left(\vec{\rho}\,'\right)=\left|E\left(\vec{\rho}\,'\right)\right|\mathrm{e}^{iu\left(\vec{\rho}\,'\right)}=A\left(\vec{\rho}\,'\right)\mathrm{e}^{ik_z z'}$$

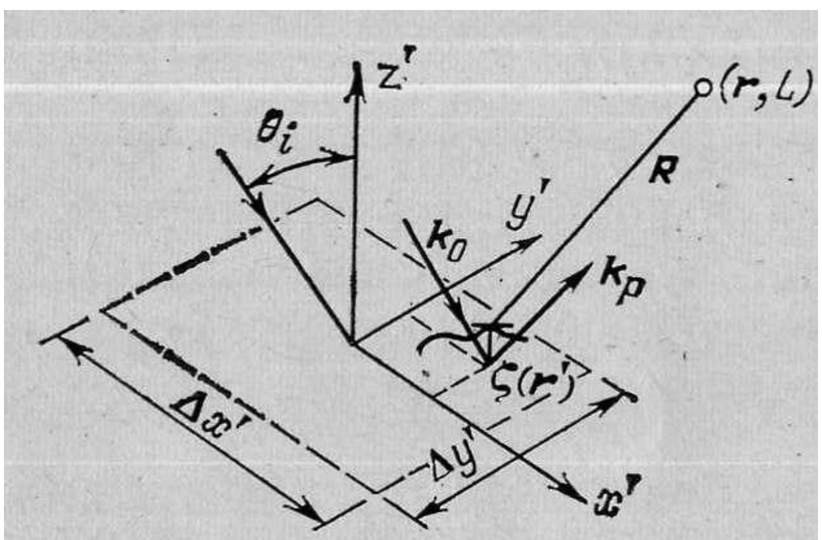
$$\left|E\right|-const,\ \vec{k}=k\nabla u\left(\vec{\rho}\,'\right)-const,\ \vec{\rho}\,'\in l_s$$

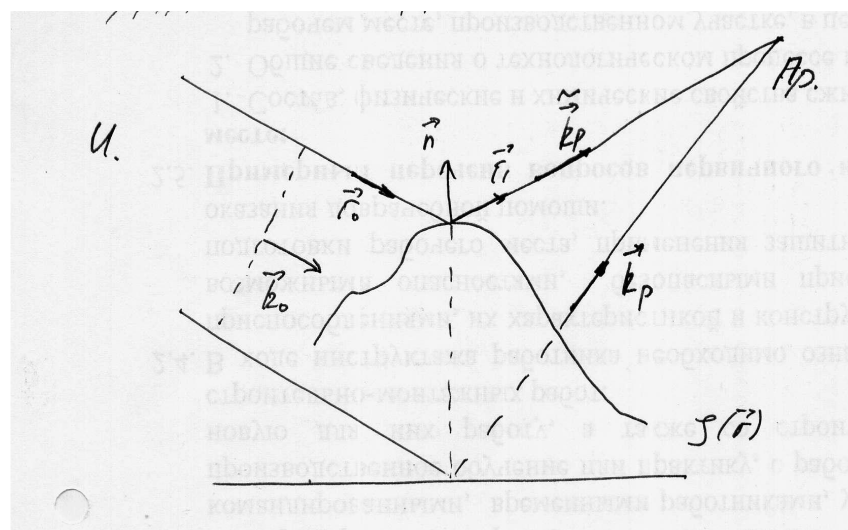
$$z'=0,\ z'=\varsigma\left(\vec{r}\,'\right),\ <\varsigma\left(\vec{r}\,'\right)>=0 \qquad \theta\ll 1,\ L\gg k\sigma_s^{\,2}\,(L\gg ka_s^{\,2})$$

$$\psi\left(\vec{\rho}\,'\right)=-\frac{ik}{4\pi}\int V\left|E\left(\vec{\rho}\,'\right)\right|\exp\left[i\left(kR+u\right)\right]\mathrm{R}^{-1}\left\{\cos\left(\widehat{\vec{\mathrm{n}},\vec{\mathrm{r}}_0}\right)-\cos\left(\widehat{\vec{\mathrm{n}},\vec{\mathrm{r}}_1}\right)\right\}\mathrm{dS}$$

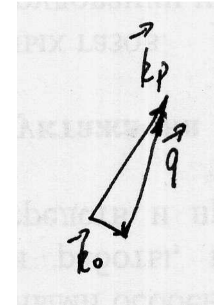
$$R=\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'\right|;\vec{\rho}=\left\{\vec{r},L\right\},\vec{\rho}\,'=\left\{\vec{r}\,',\varsigma\left(\vec{r}\,'\right)\right\};\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{n}$$

Формула Френеля-Кирхгофа





$$\cos\left(\vec{n},\vec{r}_0\right)-\cos\left(\vec{n},\vec{r}_1\right)=\left(\vec{n},\vec{r}_0\right)-\left(\vec{n},\vec{r}_1\right)\qquad \vec{q}=\vec{k}_p-\vec{k}_0$$



$$\psi\left(\vec{\rho}'\right)=-\frac{i}{4\pi}\int V\left|E\left(\vec{\rho}'\right)\right|\exp\left[i\left(kR+u\right)\right]\mathrm{R}^{-1}\left(\vec{n},\vec{q}\right)\mathrm{dS}$$

$$\left|E\right|,\ V-const,\ \exp[i\left(kR+u\right)]\approx\exp[i(kR+u)_{\varsigma=0}-iq_z\varsigma]$$

Переход к подстилающей поверхности

$$(\vec{k}_0\varsigma)_z-(\vec{k}_p\varsigma)_z=-(\vec{k}_p-\vec{k}_0)_z\varsigma=q_z\varsigma,\ \ \vec{k}_0=k\nabla u,\ \ \vec{k}_p=-k\nabla R$$

$$dS=\frac{dxdy}{n_z}\qquad \psi\left(\vec{\rho}\right)=-\frac{i}{4\pi}\int V\left|E\left(\vec{r}',0\right)\right|\exp\left[i\left(kR+u-q_z\varsigma\right)\right]R^{-1}\left(\vec{n}\vec{q}\right)\frac{d\vec{r}'}{n_z}$$

$$\vec{n}=(\vec{n}_\perp,n_z)\qquad \vec{q}=(\vec{q}_\perp,q_z)\qquad \vec{q}_\perp\approx 0\qquad \left(\vec{n},\vec{q}\right)\frac{1}{n_z}=\frac{(\vec{n}_\perp\vec{q}_\perp)}{n_z}+\frac{n_z q_z}{n_z}\approx q_z$$

$$\psi\left(\vec{\rho}\right)=-\frac{i}{4\pi}\int V\left|E\left(\vec{r}',0\right)\right|\exp\left[i\left(kR+u-q_z\varsigma\right)\right]R^{-1}q_z d\vec{r}'$$

$q_z\varsigma(\vec{r}')$ - модуляция фазы на случайном фазовом экране

$$R = (L^2 + |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2)^{1/2} \approx L\left[1 + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2}{2L}\right]$$

Приближение Френеля

$$\psi(\vec{r}, L) = -\frac{ik}{2\pi L}\int \psi_0(\vec{r}\,')\exp\left[\frac{ik}{2L}|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2 - q_z\varsigma(\vec{r}\,')\right]d\vec{r}\,'$$

$$\psi_0(\vec{r}\,') = V(\vec{r}\,')E(\vec{r}\,', 0), \quad E(\vec{r}\,', 0) = \left|E(\vec{r}\,', 0)\right|\exp[i(kL + u)]$$

$$(\nabla u)_z \approx -1, \ (\nabla R)_z \approx 1, \ q_z = \left(\vec{k}_0 - \vec{k}_p\right) \approx -2k$$

Корреляционная функция рассеянного поля

$$B_\psi(\vec{r}, \vec{p}) = \langle \psi(\vec{r}, L)\psi^*(\vec{r} + \vec{p}, L) \rangle$$

$$B_\psi(\vec{r}, \vec{p}) = \left(\frac{k}{2\pi L}\right)^2 *$$

$$*\iint \psi_0(\vec{r}\,')\psi_0^*(\vec{r}\,' - \vec{l}) f_s(q_z', q_z'', \vec{r}\,', \vec{r}\,' - \vec{l})\exp\left\{\frac{ik}{2L}\left[\left|\vec{r}\,' - \vec{r}\right|^2 - \left|\vec{r}\,' - \vec{l} - \vec{r} - \vec{p}\right|^2\right]\right\}d\vec{r}\,' d\vec{l}$$

$$f_s = \langle \exp\{-i[q_z(\vec{r}\,')\varsigma(\vec{r}\,') - q_z(\vec{r}\,' - \vec{l})\varsigma(\vec{r}\,' - \vec{l})]\}\rangle$$

$$\vec{r}' - \vec{l},\ a_s\left(L \ll ka_s^2\right),\ q_z \sim const \Rightarrow f_s = f_s(\vec{l})$$

Поле шероховатостей однородное, геометрия фиксирована

$$f_s\left(\vec{l}\right) = \left\langle \exp\left\{-iq_z\left[\varsigma\left(\vec{r}'\right) - \varsigma\left(\vec{r}' - \vec{l}\right)\right]\right\}\right\rangle = \exp\left[-\frac{q_z}{2} D_\varsigma\left(\vec{l}\right)\right]$$

$$D_\varsigma\left(\vec{l}\right) = \langle[\varsigma\left(\vec{r}'\right) - \varsigma\left(\vec{r}' - \vec{l}\right)]^2\rangle, D_\varsigma\left(\vec{l}\right) = 2[B_\varsigma(0) - B_\varsigma\left(\vec{l}\right)]$$

$$f_\varsigma\left(\vec{l}\right) = \exp\{-\sigma_s{}^2 q_z{}^2[1 - K_\varsigma(\vec{l})]\}$$

$$B_\Psi(\vec{r}, \vec{p}) = \left(\frac{k}{2\pi L}\right)^2 \exp\left\{-\frac{ik}{2L}\left[\vec{p}\left(\vec{p} + 2\vec{r}\right)\right]\right\} \int f_\varsigma\left(\vec{l}\right) \exp\left\{-\frac{ik}{2L}\left[l^2 + 2\vec{l}\left(\vec{r} + \vec{p}\right)\right]\right\}$$

$$\int \psi_0(\vec{r})\psi_0^*\left(\vec{r} - \vec{l}\right) \exp\left[\left(\frac{ik}{L}\right)\vec{r}'\left(\vec{l} + \vec{p}\right)\right] d\vec{r}' d\vec{l}$$

$$q_z\sigma_s \gg 1 \Rightarrow 0 \le l \le l_s,\ 1 \ge f_\varsigma \ge \exp(-\sigma_s{}^2 q_s{}^2)$$

$$l^2\frac{ik}{2L},\ \frac{ik\vec{r}'\vec{l}}{L}$$

$$l \le l_s \ll a_s \Rightarrow \psi_0\left(\vec{r}'\right)\psi_0{}^*\left(\vec{r}' - \vec{l}\right) \approx |\psi(\vec{r}')|^2$$

$$L \gg z_{np} = k l_s a_s \Rightarrow \frac{l_s^2}{\lambda L} \ll 1,\ \frac{l_s a_s}{\lambda L} \ll 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{ik}{2L} l^2\right) \approx \exp\left(\frac{ik}{L}\vec{r}l'\right) \approx 1$$

$$B_\psi(\vec{r},\vec{p}) = \exp\left\{\left(-\frac{ik}{2L}\right)\left[\vec{p}(\vec{p}+2\vec{r})\right]\right\}\Phi_\varsigma(\vec{p}+\vec{r})\Phi(p)$$

Обобщение т-мы Ван-Циттерта-Цернике

$$\Phi_\varsigma(\vec{r}+\vec{p}) = \left(\frac{k}{2\pi L}\right)^2 \int f_\varsigma(\vec{l})\exp\left[-\frac{ik}{L}\vec{l}(\vec{r}+\vec{p})\right]d\vec{l}$$

Рассеянное поле однородно вблизи направлений обратного рассеяния

$$\Phi(\vec{p}) = \int I(\vec{r}\,')V^2(\vec{r})\exp\left(\frac{ik\vec{r}\,'\vec{p}}{L}\right)d\vec{r}\,'$$

$$I(\vec{r}) = \left|E(\vec{r},0)\right|^2 = \left|A(\vec{r},0)\right|^2,\ V(\vec{r}) = V_0 \in [\Omega_s]$$

$$J(\vec{r}\,') = I(\vec{r}\,')\Phi_\varsigma(\vec{p})V_0^2;$$

$$q_z(\vec{r}) \equiv q_z,\ \Phi_\varsigma(\vec{r})$$

Формальная трактовка рассеяния. Функция светимости.

$$z > z_{np},\; H(\vec r-\vec\rho)=\frac{1}{i\lambda L}\exp\left\{i\lambda L+\frac{ik}{2L}\left|\vec r-\vec\rho\right|^2\right\},\; \vec\rho=\vec\rho_2-\vec\rho_1,\; \vec r=\vec\rho_1$$

$$B_\psi(\vec\rho_1,\vec\rho_2)=\int J(\vec r)H^*(\vec r-\vec\rho_1)H(\vec r-\vec\rho_2)d\vec r$$

$$z \gg ka_s l_s \qquad J(\vec r)=I(\vec r)V^2(\vec r)\int f_\varsigma(\vec l)\exp(-ik\vec l\vec r/L)d\vec l$$

Картинная плоскость

$$<\psi(\vec r,L)>=0,\; <\psi(\vec r,L)\psi(\vec r+\vec p,L)>=<\psi^*(\vec r,L)\psi^*(\vec r+\vec p,L)>=0$$

$$<E(\vec r)>=0,\; <E(\vec r_1)E(\vec r_2)>=<E^*(\vec r_1)E^*(\vec r_2)>=0$$

$$<E(\vec r_1)E^*(\vec r_2)>=<E^*(\vec r_1)E(\vec r_2)>=J(\vec r_1)\delta(\vec r_1-\vec r_2),\; \Omega_0$$

Математическая модель рассеянного поля

$$\varepsilon(\vec\rho)=\int_{\Omega_0}E(\vec r)H(\vec r-\vec\rho)d\vec r \qquad <\varepsilon(\vec\rho)>=0,<\varepsilon(\vec\rho_1)\varepsilon(\vec\rho_2)>=<\varepsilon^*(\vec\rho_1)\varepsilon^*(\vec\rho_2)>=0$$

$$K_{\varepsilon}(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2) = <\varepsilon(\vec{\rho}_1)\varepsilon^{*}(\vec{\rho}_2)> = \iint\limits_{\Omega_0} <E(\vec{r}_1)E^{*}(\vec{r}_2)> H(\vec{r}_1-\vec{p}_1)H^{*}(\vec{r}_2-\vec{p}_2)\,d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} J(\vec{r})H(\vec{r}-\vec{\rho}_1)H(\vec{r}-\vec{\rho}_2)\,d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

Средняя интенсивность рассеянного поля. Индикатриса рассеяния.

$$B(\vec{r},0) = <I(\vec{r})> = \left(\frac{k}{2\pi L}\right)^{2}\Phi(0)\int f_{\varsigma}\exp(-ik\frac{\vec{l}\vec{r}}{L})\,d\vec{l}$$

$$L \square\ kl_s a_s;\ q_z\sigma_s \square\ 1,\ kl_s^{2} \square\ L,\ I(\vec{r}) = const$$

$$q_s \square\ l_s,\ \Phi(\vec{p}) = \int I(\vec{r}')V^{2}(\vec{r}')\exp\left(-ik\frac{\vec{r}'\vec{p}}{L}\right)d\vec{r}'$$

$$L,\ r_s = \frac{L}{ka_s}$$

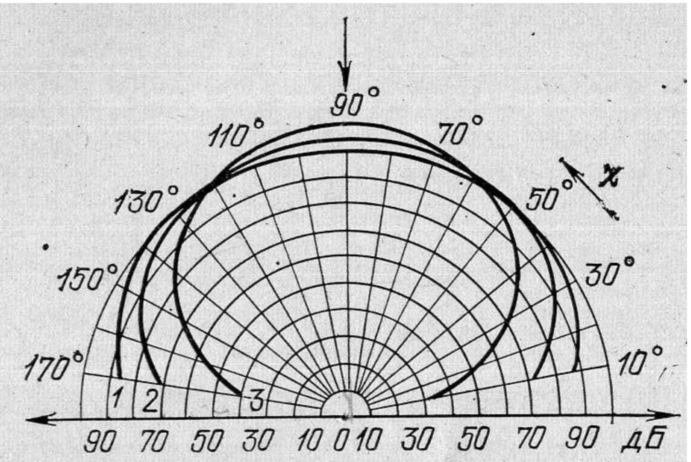


Рис. 14.3. Индикатрисы рассеяния плоской волны на случайной поверхности с гауссовской функцией корреляции шероховатостей при $l_s/\sigma_s = 5$ — кривая *1*, 7 — *2* и 10 — *3*; нормальное падение ($\theta_i = 0$)