

Дифференциальные уравнения

Лекция 3

1

- Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах
- Дифференциальные уравнения высших порядков
- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах - это уравнения вида,

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \quad (1)$$

в котором функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ удовлетворяют определенному условию.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy$$

есть полный дифференциал некоторой функции.

Теорема

Для того, чтобы выражение $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$

где функции $P(x; y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости XOY , было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Таким образом, для решения уравнения (1) необходимо найти функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad (3)$$

Если в первом уравнении зафиксировать y и проинтегрировать его по x , получим:

$$u(x; y) = \int P(x; y) dx + \varphi(y) \quad (4)$$

Здесь произвольная постоянная $C = \varphi(y)$ зависит от y или является постоянной. Для ее нахождения продифференцируем функцию $u(x, y)$ по y .

При вычислении интеграла, считаем y постоянным числом

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x; y) dx \right)'_y + \varphi'(y) = Q(x; y) \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = Q(x; y) - \left(\int P(x; y) dx \right)'_y$$

В этом равенстве правая часть зависит только от y , если выполняются условия (2). Находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x; y) - \left(\int P(x; y) dx \right)'_y \right) dy + C$$

Подставляя найденную функцию в равенство (4), найдем функцию $u(x; y)$.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$$

$$P(x; y) = 2xy - 5; \quad Q(x; y) = 3y^2 + x^2$$

Проверим выполнение условий (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2xy - 5)'_y = 2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (3y^2 + x^2)'_x = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{Уравнение является уравнением в полных дифференциалах.}$$

Условия (4) здесь будут выглядеть так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 5; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + x^2$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$u(x; y) = \int (2xy - 5)dx + \varphi(y) = 2y \int x dx - 5 \int dx + \varphi(y)$$

$$u(x; y) = x^2 y - 5x + \varphi(y) \quad \boxed{Q(x; y)}$$

Продифференцируем полученную функцию по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 y - 5x + \varphi(y))'_y = x^2 + \varphi'(y) = \boxed{3y^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2 dy = \boxed{y^3 + C}$$

Подставим найденную функцию $\varphi(y)$ в выражение для $u(x; y)$

$$u(x; y) = x^2 y - 5x + y^3 + C$$

Общим интегралом является:

$$\boxed{x^2 y - 5x + y^3 = C}$$

Дифференциальные уравнения высших порядков

- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются **ДУ высших порядков**.

Символически ДУ высших порядков можно записать:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{или}$$

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Общее решение ДУ n – о го порядка является функцией вида:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Начальные условия для ДУ n – о го порядка задаются в виде:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad y''(x_0) = y''_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных, называется **частным решением**:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является **метод понижения порядка**.

Рассмотрим 3 вида уравнений, допускающих понижение порядка.

 $y^{(n)} = f(x) \quad (1)$

Общее решение данного уравнения находится с помощью последовательного интегрирования :

$$y^{(n)} = \frac{d(y^{(n-1)})}{dx} \Rightarrow \frac{d(y^{(n-1)})}{dx} = f(x) \Rightarrow$$

$$\int d(y^{(n-1)}) = \int f(x) dx \Rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

В результате получается ДУ на порядок ниже. Проинтегрировав уравнение n раз, получим искомую функцию.

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найти общее решение ДУ: $y''' = \sin 2x$

$$y'' = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2 \right) dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

► $y'' = f(x; y')$ (2)

- уравнение второго порядка, не содержащее явно искомой функции y ,

Сделаем замену переменной: $y' = p(x)$ тогда $y'' = p'$

и получим уравнение первого порядка:

$$p' = f(x; p)$$

Пусть: $p = \varphi(x; C_1)$ - решение данного уравнения.

Заменим функцию p на y' : $y' = \varphi(x; C_1)$

Это уравнение вида (1), поэтому:

$$y = \int \varphi(x; C_1) dx + C_2$$

В общем случае, порядок уравнения: $F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \dots; y^{(n)})$

можно понизить на k единиц с помощью подстановки: $y^{(k)} = p(x)$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найти частное решение ДУ: $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$

Сделаем замену: $y' = p$; $y'' = p' \Rightarrow p' - \frac{p}{x} = 0$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$p = C_1 x \Rightarrow y' = C_1 x$ Найдем C_1 с помощью начального условия:

$$y'(1) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow$$

$$y = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C_2$$

Найдем C_2 с помощью начального условия: $y(1) = 1 \Rightarrow$

$$1 = 1^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = x^2}$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

► $y'' = f(y; y')$ (3) - уравнение второго порядка,
не содержащее явно независимой переменной x .

Сделаем замену переменной: $y' = p(y)$ тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

Теперь уравнение (3) запишется в виде:

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y; p) \quad \text{Пусть: } p = \varphi(y; C_1) \text{ - решение данного ДУ} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1) \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найти частное решение ДУ:

$$y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0 \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 2$$

Сделаем замену: $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dy} p \Rightarrow$

$$\frac{dp}{dy} p - p^2 + p(y - 1) = 0$$

Так как $p = y' \neq 0$ (по начальному условию), получим:

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y \quad \text{- линейное уравнение 1 порядка.}$$

$$p = u \cdot v \quad \frac{dp}{dy} = u'v + uv' \Rightarrow u'v + [uv' - uv] = 1 - y \Rightarrow$$

$$u'v + u(v' - v) = 1 - y \Rightarrow v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = v \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dy \Rightarrow \ln|v| = y \Rightarrow v = e^y$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

$$u'e^y = 1-y \Rightarrow \frac{du}{dy} = (1-y) \cdot e^{-y} \Rightarrow \int du = \int (1-y) \cdot e^{-y} dy$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = 1-y \quad du = -dy \\ dv = e^{-y} \quad v = -e^{-y} \end{array} \right] \Rightarrow u = -e^{-y}(1-y) - \int e^{-y} dy =$$

$$= -e^{-y}(1-y) + e^{-y} + C_1 = e^{-y}y + C_1$$

$$p = uv = e^y(e^{-y}y + C_1) \Rightarrow y' = C_1e^y + y$$

Найдем C_1 с помощью начальных условий: $2 = C_1e^2 + 2 \Rightarrow C_1 = 0$

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = e^{x+C_2} \Rightarrow y = C_2e^x \Rightarrow 2 = C_2e^0 \Rightarrow C_2 = 2$$

$$y = 2e^x$$