Дифференциальные уравнения
Лекция 3

- Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах
- Дифференциальные уравнения высших порядков
- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах - это уравнения вида,

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (1)$$

в котором функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ удовлетворяют определенному условию.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

есть полный дифференциал некоторой функции.

Теорема

Для того, чтобы выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ где функции $P(x;y)$, $Q(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости XOY, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Таким образом, для решения уравнения *(1)* необходимо найти функцию $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \qquad (3)$$

Если в первом уравнении зафиксировать y и проинтегрировать его по x, получим:

$$u(x;y) = \boxed{\int P(x;y)\,dx} + \varphi(y) \qquad (4)$$

Здесь произвольная постоянная $C = \varphi(y)$ зависит от y или является постоянной. Для ее нахождения продифференцируем функцию $u(x, y)$ по y.

При вычислении интеграла, считаем y постоянным числом

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)dx\right)'_y + \varphi'(y) = Q(x;y) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)dx\right)'_y$$

В этом равенстве правая часть зависит только от *y*, если выполняются условия *(2)*. Находим *φ(y)*:

$$\varphi(y) = \int\left(Q(x;y) - \left(\int P(x;y)dx\right)'_y\right)dy + C$$

Подставляя найденную функцию в равенство *(4)*, найдем функцию *u(x; y)*.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=0$$

$$P(x;y)=2xy-5; \quad Q(x;y)=3y^2+x^2$$

Проверим выполнение условий (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(2xy-5)'_y=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=(3y^2+x^2)'_x=2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow$$ *Уравнение является уравнением в полных дифференциалах.*

Условия (4) здесь будут выглядеть так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-5; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$u(x;y)=\int(2xy-5)dx+\varphi(y)\ =2y\int xdx-5\int dx+\varphi(y)$$

$$u(x;y)=x^2y-5x+\boxed{\varphi(y)}$$

Q (x;y)

Продифференцируем полученную функцию по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2y-5x+\varphi(y)\right)'_y\ =x^2+\varphi'(y)\ =\boxed{3y^2+x^2}\ \Rightarrow$$

$$\varphi'(y)=3y^2\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=\int 3y^2dy\ =\boxed{y^3+C}$$

Подставим найденную функцию φ(y) в выражение для u(x; y)

$$u(x;y)=x^2y-5x+y^3+C$$

Общим интегралом является: $\boxed{x^2y-5x+y^3=C}$

Дифференциальные уравнения высших порядков

- Основные понятия
- Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ***ДУ высших порядков***.

Символически ДУ высших порядков можно записать:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$ или

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Общее решение ДУ n – ого порядка является функцией вида:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$$

Начальные условия для ДУ n – ого порядка задаются в виде:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'; \quad y''(x_0) = y_0''; \ldots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных, называется ***частным решением:***

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является ***метод понижения порядка.***

Рассмотрим 3 вида уравнений, допускающих понижение порядка.

- $y^{(n)} = f(x)$ *(1)*

Общее решение данного уравнения находится с помощью последовательного интегрирования :

$$y^{(n)} = \frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx} \Rightarrow \frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx} = f(x) \Rightarrow$$

$$\int d\left(y^{(n-1)}\right) = \int f(x)dx \Rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

В результате получается ДУ на порядок ниже. Проинтегрировав уравнение n раз, получим искомую функцию.

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найти общее решение ДУ: $y''' = \sin 2x$

$$y'' = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y' = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2\right)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3}$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

$$y'' = f(x; y') \qquad (2)$$

- уравнение второго порядка, не содержащее явно искомой функции y,

Сделаем замену переменной: $\boxed{y' = p(x)}$ тогда $\boxed{y'' = p'}$

и получим уравнение первого порядка:

$$p' = f(x; p)$$

Пусть: $p = \varphi(x; C_1)$ - решение данного уравнения.

Заменим функцию p на y': $\quad y' = \varphi(x; C_1)$

Это уравнение вида *(1)*, поэтому:

$$y = \int \varphi(x; C_1)\, dx + C_2$$

В общем случае, порядок уравнения: $F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots ; y^{(n)})$

можно понизить на k единиц с помощью подстановки: $y^{(k)} = p(x)$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найти частное решение ДУ: $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0 \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 2$

Сделаем замену: $y' = p; \quad y'' = p' \quad \Rightarrow \quad p' - \dfrac{p}{x} = 0$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$p = C_1 x \Rightarrow y' = C_1 x$ *Найдем C_1 с помощью начального условия:*

$$y'(1) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow$$

$$y = \int 2x\,dx \Rightarrow y = x^2 + C_2$$

Найдем C_2 с помощью начального условия: $y(1) = 1 \Rightarrow$

$$1 = 1^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = x^2}$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

- $y'' = f(y; y')$ (3) - уравнение второго порядка,

не содержащее явно независимой переменой x.

Сделаем замену переменной: $\boxed{y' = p(y)}$ тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' \Rightarrow$$

$$\boxed{y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p}$$

Теперь уравнение (3) запишется в виде:

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y; p)$$

Пусть: $p = \varphi(y; C_1)$ - решение данного ДУ $\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1) \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Найти частное решение ДУ:

$$y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0 \qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = 2$$

Сделаем замену: $y' = p; \quad y'' = \dfrac{dp}{dy}p \quad \Rightarrow$

$$\frac{dp}{dy}p - p^2 + p(y-1) = 0$$

Так как $p = y' \neq 0$ *(по начальному условию), получим:*

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y$$ *- линейное уравнение 1 порядка.*

$$p = u \cdot v \qquad \frac{dp}{dy} = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad u'v + [uv' - uv] = 1 - y \quad \Rightarrow$$

$$u'v + u(v' - v) = 1 - y \quad \Rightarrow \quad v' - v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = v \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dy \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = y \quad \Rightarrow \quad v = e^y$$

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

$$u'e^{y}=1-y\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dy}=(1-y)\cdot e^{-y}\quad\Rightarrow\quad\int du=\int(1-y)\cdot e^{-y}dy$$

$$=\begin{bmatrix}u=1-y & du=-dy\\ dv=e^{-y} & v=-e^{-y}\end{bmatrix}\Rightarrow\quad u=\ -e^{-y}(1-y)-\int e^{-y}dy=$$

$$=\ -e^{-y}(1-y)+e^{-y}+C_1\quad=\ e^{-y}y+C_1$$

$$p=uv=\ e^{y}\left(e^{-y}y+C_1\right)\quad\Rightarrow\quad y'=C_1e^{y}+y$$

Найдем C_1 с помощью начальных условий: $2=C_1e^{2}+2\quad\Rightarrow C_1=0$

$$y'=y\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=y\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{y}=\int dx\quad\Rightarrow\quad\ln|y|=\ x+C_2\quad\Rightarrow$$

$$y=\ e^{x+C_2}\quad\Rightarrow\quad y=\ C_2e^{x}\quad\Rightarrow\quad 2=\ C_2e^{0}\quad\Rightarrow\quad C_2=2$$

$$\boxed{y=\ 2e^{x}}$$