

Государственный университет «Дубна»  
Факультет естественных и инженерных наук  
Кафедра Ядерной физики

Специальный семинар по физике ядра и ядерным реакциям

В.В.Самарин

# Электромагнитные взаимодействия

Дополнения к вопросам 11,12, 13

2017

# 11 вопрос

- Основные свойства электромагнитного взаимодействия.
- Потери энергии на ионизацию и возбуждение атомов .

## Формула Бете-Блоха

Наконец, сложив вклады (82,20) и (82,25), получим окончательно следующий результат для полных ионизационных потерь быстрой тяжелой частицы:

$$\kappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \left( \ln \frac{2mv^2}{I(1 - v^2/c^2)} - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (82,26)$$

(в обычных единицах). В нерелятивистском случае отсюда получается прежняя формула III (150,10):

$$\kappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I} \quad (\text{н. р.}), \quad (82,27)$$

а в ультрарелятивистском случае

$$\kappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mc^2} \left( \ln \frac{2mc^2}{I(1 - v^2/c^2)} - 1 \right) \quad (\text{у. р.}). \quad (82,28)$$

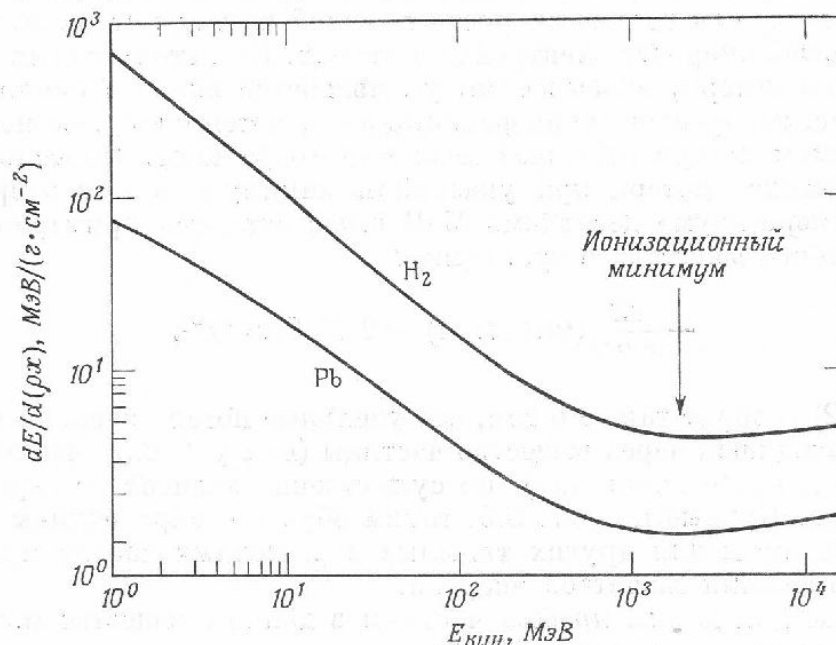
Торможение зависит только от скорости (но не от массы) быстрой частицы. Убывание торможения при увеличении скорости согласно (82,27) сменяется в ультрарелятивистской области медленным (логарифмическим) возрастанием.

# Формула Бете-Блоха

формулу так и называют «формулой Бете — Блоха»:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n Z^2 e^4}{m_e v^2} \left\{ \ln \frac{2m_e v^2}{I [1 - (v/c)^2]} - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right\}. \quad (3.2)$$

Здесь —  $dE$  — энергия, теряемая частицей на длине  $dx$ ;  $n$  — число электронов в  $1 \text{ см}^3$  тормозящего вещества;  $m_e$  — масса электрона;  $Ze$  и  $v$  — соответственно заряд и скорость тяжелой заряженной частицы;  $I$  — средний потенциал возбуждения атомов тормозящего вещества. [Формула (3.2) приближенная, однако здесь это приближение вполне достаточно.]



Фиг. 3.5. Зависимость удельных потерь энергии  $dE/d(\rho x)$  протонов в водороде и свинце от их кинетической энергии.

# 12 вопрос

- Основные свойства электромагнитного взаимодействия.
- Испускание и поглощение фотонов.
- Упругое рассеяние электронов.
- Формула Мотта.

# Основные свойства электромагнитного взаимодействия

К сожалению, совсем не прибегая к вычислениям, мы не сможем понять электромагнитные взаимодействия. Самые простые такие вычисления — это вычисления в рамках квантовомеханической теории возмущений, в частности расчет скорости переходов квантовой системы из начального состояния  $\alpha$  в конечное состояние  $\beta$ . Для этой скорости в теории возмущений мы имеем формулу

$$w_{\beta\alpha} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \beta | H_{\text{int}} | \alpha \rangle|^2 \rho(E), \quad (10.1)$$

которую Ферми назвал *золотым правилом* из-за ее исключительной важности и пользы.

для вероятности перехода около

только имеем

$$P(T) = \frac{2\pi T}{\hbar} |\langle \beta | H_{\text{int}} | \alpha \rangle|^2 \frac{dN}{dE}. \quad (10.2)$$

Обозначение  $\langle \beta | H_{\text{int}} | \alpha \rangle$  указывает на то, что мы рассматриваем вероятность перехода из состояния  $|\alpha\rangle$  в состояние  $|\beta\rangle$ . Поскольку гамильтониан  $H_{\text{int}}$  предполагается не зависящим от времени, вероятность перехода оказывается пропорциональной времени  $T$ . Скорость переходов есть вероятность перехода в единицу времени, и поэтому

$$w_{\beta\alpha} = \dot{P}(T) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \beta | H_{\text{int}} | \alpha \rangle|^2 \frac{dN}{dE}. \quad (10.3)$$

Так мы получаем знаменитое «золотое правило» (Ферми на самом деле назвал его «золотым правилом номер 2»). Оно необычайно помогает при обсуждении всех процессов квантовых переходов в атомной и субатомной физике и далее мы будем очень часто пользоваться им. Множитель

$$\frac{dN}{dE} \equiv \rho(E) \quad (10.3)$$

называется *множителем плотности состояний*; он характеризует число доступных состояний, приходящихся на единичный интервал энергии; мы

Гамильтониан точечной частицы с зарядом  $q$ , движущейся во внешнем поле можно получить из гамильтониана свободной частицы, если воспользоваться предписанием Лармора<sup>2)</sup>. Согласно ему, энергию и импульс свободной частицы надо заменить следующим образом:

$$H_{\text{своб}} \rightarrow H_{\text{своб}} - qA_0, \quad \mathbf{p}_{\text{своб}} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}. \quad (10.3)$$

Получающееся взаимодействие называют *минимальным электромагнитным взаимодействием*. Этот термин придумал Гелл-Манн, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что только одна величина, а именно заряд  $q$ , вводится нами в теории электромагнетизма в качестве фундаментальной постоянной. Имеющиеся токи мы считали обязательно связанными с движением заряженных частиц. В частности, ток, создаваемый точечной частицей, дается выражением  $q\mathbf{v}$ . Далее, мы считаем, что все мультипольные моменты (дипольный, квадрупольный и т. д.) обязаны исключительно *структуре* частицы; в качестве фундаментальных постоянных эти моменты мы не рассматриваем.

Производя замену (10.39) в гамильтониане (10.36), получаем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + qA_0, \quad (10.4)$$

или

$$H = H_{\text{своб}} + H_{\text{int}} + \frac{q^2 A^2}{2mc^2}, \quad (10.4)$$

где  $H_{\text{своб}}$  дается формулой (10.36), а для гамильтониана  $H_{\text{int}}$  имеем

$$H_{\text{int}}(\mathbf{x}) = -\frac{q}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + qA_0. \quad (10.4)$$

Для всех напряженностей полей, встречающихся на практике, последнее слагаемое в (10.41) настолько мало, что им всегда можно пренебречь. Когда нет никаких внешних электрических зарядов, скалярный потенциал обращается в нуль и энергия взаимодействия дается формулой

$$H_{\text{int}}(\mathbf{x}) = -\frac{q}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = -\frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (10.4)$$

Взаимодействие  $H_{\text{int}}(\mathbf{x})$  в (10.42) есть энергия взаимодействия нерелятивистской точечной частицы, находящейся в точке  $\mathbf{x}$ , и электромагнитного поля, характеризуемого потенциалами  $\mathbf{A}$  и  $A_0$ . Формула (10.43) оказывается вполне достаточной для очень многих приложений. В частности, она позволяет описывать процессы испускания и поглощения фотонов. Для некоторых других случаев, например при описании электромагнитного взаимодействия между двумя частицами, нам необходимо изменить приведенные формулы, выразив в них потенциалы через токи и заряды, порождающие их. Вместо того чтобы выводить общую формулу, давайте рассмотрим несколько характерных примеров, которые нам понадобятся позже.

Самый простой случай мы имеем, когда электромагнитное поле создается точечным зарядом  $q'$ , находящимся в точке  $\mathbf{x}'$ . Потенциал тогда равен

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{iq'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (10.44)$$

а взаимодействие оказывается обычным *кулоновским взаимодействием*, с которым мы уже встречались в гл. 6 [см. (6.15)]. Когда заряд  $q'$  размазан по некоторому объему, например по объему атомного ядра, тогда скалярный потенциал нужно рассчитывать по формуле<sup>1)</sup>

$$A_0(\mathbf{x}) = q' \int d^3x' \frac{\rho'(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (10.45)$$

а взаимодействие имеет вид, указанный в (6.23). Заряд, содержащийся в малом объеме  $d^3x'$ , окружающем точку  $\mathbf{x}'$ , равен  $q'\rho'(\mathbf{x}')d^3x'$ , причем плотность вероятности  $\rho'(\mathbf{x}')$  нормирована условием (6.26).

Гамильтониан взаимодействия точечной частицы с электромагнитным векторным потенциалом дается формулой (10.43). Если частица не точечная, а протяженная с распределением электрического заряда  $q\rho(\mathbf{x})$ , то множитель  $q/m = q\mathbf{v}$  в формуле (10.43) следует заменить на величину

$$q \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

# Основные свойства электромагнитного взаимодействия

Непосредственно очевидно, что

$$\rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) = q \mathbf{j}(\mathbf{x}), \quad (10.46)$$

где  $q \mathbf{j}(\mathbf{x})$  — плотность электрического тока, а именно заряд, протекающий через единицу площади в единицу времени. Учитывая (10.46), взаимодействие нашей частицы с внешним потенциалом  $A(\mathbf{x})$  можно представить в окончательном виде:

$$H_{\text{int}} = -\frac{q}{c} \int d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (10.47)$$

Итак, мы получили знаменитую формулу « $\mathbf{j}$ -точка- $\mathbf{A}$ ». Формула (10.47) — одна из фундаментальных, на которой основано большое число вычислений.

Векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , создаваемый плотностью тока  $q' \mathbf{j}'(\mathbf{x}')$ , можно вычислить по формуле <sup>1)</sup>

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{q'}{c} \int d^3x' \mathbf{j}'(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (10.48)$$

Подставляя это выражение для  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  в (10.47), получаем

$$H_{\text{int}} = -\frac{qq'}{c^2} \int d^3x d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (10.49)$$

Это взаимодействие тока с током впервые было введено в науку Ампером, оно с успехом используется в настоящее время в теории слабых взаимодействий.

Еще одно классическое соотношение оказывается очень полезным в субатомной физике, а именно уравнение непрерывности. Из уравнений Максвелла следует, что плотности заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (10.50)$$

Интегрируя уравнение (10.50) по объему  $V$ , мы непосредственно видим связь этого уравнения и закона сохранения электрического заряда:

$$\int_V d^3x \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t} = - \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = - \int_S dS \cdot \mathbf{j}.$$

Здесь  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ . Если эту поверхность неограниченно расширять до бесконечности от области, где находится рассматриваемая система, ток через нее станет равным нулю. Переставляя операции интегрирования и дифференцирования в выражении, стоящем в левой части, а также умножая правую и левую части на  $q$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x q \rho(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} Q_{\text{полн}} = 0. \quad (10.51)$$

Уравнение непрерывности, таким образом, выражает закон сохранения

## 4. ИСПУСКАНИЕ ФОТОНОВ <sup>1)</sup>

Все формулы, которые мы привели в предыдущем параграфе, — классические, и, следовательно, их нельзя непосредственно использовать в квантовой механике. Попробуем дать квантовомеханическое обобщение классических формул, мы столкнемся с двумя проблемами. Во-первых, энергию взаимодействия надо сделать оператором — гамильтонианом взаимодействия. Во-вторых, после построения оператора  $H_{\text{int}}$  мы должны еще суметь вычислить скорость переходов или эффективное сечение для конкретного рассматриваемого процесса, чтобы можно было производить сопоставление предсказаний развиваемой теории с экспериментом. И мы здесь не сможем продвинуться в решении этих задач, если не будем использовать не вполне обоснованных рассуждений. Большой проблемой является сам фотон. Он всегда движется со скоростью света, а потому нерелятивистское описание фотона бессмысленно и невозможно. Далее, для большинства интересных процессов участвующие в них частицы обладают энергиями, многими большими их энергий покоя, а потому и эти частицы мы должны рассматривать как релятивистские. Должное обсуждение квантовой электродинамики, однако, выходит за пределы уровня рассуждений, принятого в этой книге. Поэтому мы подробно расскажем здесь только об одном процессе, а именно об *испускании фотона квантовомеханической системой*. Многие важные положения квантовой электродинамики отчетливо проявляются уже в таком простом случае.

Элементарный процесс испускания кванта света показан на фиг. 10.6. Этот процесс предстает перед нами в кинематическом и динамическом аспектах. Примером *кинематического* вопроса является следующий: «Чему равны энергия и импульс фотона, если он был испущен под определенным углом?» На этот вопрос можно дать ответ сразу, если только использовать законы сохранения энергии и импульса. Примеры *динамических* вопросов следующие: «Какова вероятность распада? Какова поляризация испущенного излучения?» На эти вопросы можно ответить только в том случае, если мы знаем известную форму, или вид, взаимодействия, вызывающего испускание фотона. В настоящем параграфе мы займемся самой простой динамической проблемой, а именно вычислим время жизни системы относительно ее электромагнитного распада, используя формулу (10.1) золотого правила. Прежде всего мы должны остановить свой выбор на каком-нибудь гамильтониане взаимодействия  $H_{\text{int}}$ . При этом самым привлекательным выглядит гамильтониан (10.43) из § 3 этой главы <sup>1)</sup>. Для электрона с зарядом  $q = -e$  ( $e > 0$ ) гамильтониан взаимодействия, обозначаемый теперь символом  $H_{em}$  <sup>2)</sup>, дается выражением

$$H_{em} = e \frac{\mathbf{p}}{mc} \cdot \mathbf{A}. \quad (10.52)$$

В этом гамильтониане имеется три множителя, которые мы можем связать с отдельными элементами диаграммы на фиг. 10.6. Это векторный потенциал

# Испускание фотонов

## 4. ИСПУСКАНИЕ ФОТОНОВ <sup>1)</sup>

Все формулы, которые мы привели в предыдущем параграфе, — классические, и, следовательно, их нельзя непосредственно использовать в квантовой механике. Пытаясь дать квантовомеханическое обобщение классическим формулам, мы сталкиваемся с двумя проблемами. Во-первых, энергию взаимодействия надо «перевести» на язык квантовой механики — для этого ее надо сделать оператором — гамильтонианом взаимодействия. Во-вторых, после построения оператора  $H_{\text{int}}$  мы должны еще суметь вычислить скорость переходов или эффективное сечение для конкретного рассматриваемого процесса, чтобы можно было производить сопоставление предсказаний развиваемой теории с экспериментом. И мы здесь не сможем продвинуться в решении этих задач, если не будем использовать не вполне обоснованных рассуждений. Большой проблемой является сам фотон. Он всегда движется со скоростью света, а потому нерелятивистское описание фотона бессмысленно и невозможно. Далее, для большинства интересующих нас процессов участвующие в них частицы обладают энергиями, много меньшими их энергий покоя, а потому и эти частицы мы должны рассматривать как релятивистские. Должное обсуждение квантовой электродинамики, однако, выходит за пределы уровня рассуждений, принятого в этой книге. Поэтому мы подробно расскажем здесь только об одном процессе, а именно об *испускании фотона квантовомеханической системой*. Многие важные положения квантовой электродинамики отчетливо проявляются уже в таком простом случае.

Элементарный процесс испускания кванта света показан на фиг. 10.6. Этот процесс предстает перед нами в кинематическом и динамическом аспектах. Примером *кинематического* вопроса является следующий: «Чему равны энергия и импульс фотона, если он был испущен под определенным углом?» На этот вопрос можно дать ответ сразу, если только использовать законы сохранения энергии и импульса. Примеры *динамических* вопросов следующие: «Какова вероятность распада? Какова поляризация испущенного излучения?» На эти вопросы можно ответить только в том случае, если известна форма, или вид, взаимодействия, вызывающего испускание фотона. В настоящем параграфе мы займемся самой простой динамической проблемой, а именно вычислим время жизни системы относительно ее электромагнитного распада, используя формулу (10.1) золотого правила. Прежде всего мы должны остановить свой выбор на каком-нибудь гамильтониане

взаимодействия  $H_{\text{int}}$ . При этом самым привлекательным выглядит гамильтониан (10.43) из § 3 этой главы <sup>1)</sup>. Для электрона с зарядом  $q = -e$  ( $e > 0$ ) гамильтониан взаимодействия, обозначаемый теперь символом  $H_{em}$  <sup>2)</sup>, дается выражением

$$H_{em} = e \frac{\mathbf{p}}{mc} \cdot \mathbf{A}. \quad (10.5)$$

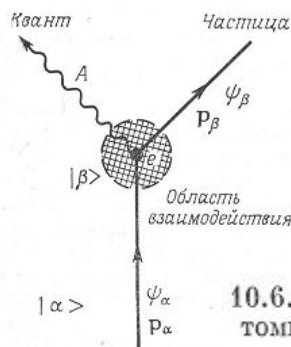
В этом гамильтониане имеется три множителя, которые мы можем связать с отдельными элементами диаграммы на фиг. 10.6. Это векторный потенциал

$\mathbf{A}$ , который описывает испускаемый фотон, затем множитель  $\mathbf{p}/mc$ , который характеризует частицу, и, наконец, константа  $e$ , которая задает силу, или величину взаимодействия.

Классическое выражение для  $H_{em}$  легко сделать оператором, если вместо входящих в него величин  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{A}$  подставить соответствующие квантовомеханические операторы. Сделать импульс  $\mathbf{p}$  оператором просто: оператор импульса имеет следующий вид:

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (10.6)$$

Эта замена объясняется во всех курсах нерелятивистской квантовой механики. Сделать потенциал  $\mathbf{A}$  оператором не столь просто: для этого надо фиксировать свое внимание на каком-нибудь одном конкретном процессе. При распаде состояния  $|\alpha\rangle$  могут происходить два различных процесса излучения фотона. Первый процесс связан с внешним электромагнитным полем, порожденным, например, фотонами, падающими на систему, пребывающую в состоянии  $|\alpha\rangle$ . В этом случае  $\mathbf{A}$  будет полем, которое создано этими фотонами и вызывает так называемое *стимулированное* или *индуцированное* излучение фотона состоянием  $|\alpha\rangle$ . Стимулированное излучение фотонов — это тот физический процесс, который лежит в основе работы лазеров. Здесь мы, однако, будем интересоваться вторым процессом излучения, который называют *спонтанным* излучением. Состояние  $|\alpha\rangle$  может распадаться даже и тогда, когда внешнее электромагнитное поле отсутствует, т. е. совершенно спонтанным образом. Выражение для  $\mathbf{A}$  в случае спонтанного излучения никак нельзя получить из формул нерелятивистской квантовой механики, потому что фотоны — релятивистские частицы. Мы обойдем, однако, эту трудность, связанную с необходимостью использовать строгую квантовую электродинамику, и просто *постулируем*, что  $\mathbf{A}$  есть *волновая функция рожденного фотона* <sup>1)</sup>.



10.6. Испускание фотона атомной или субатомной системой при переходе  $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$ .



# Испускание фотонов

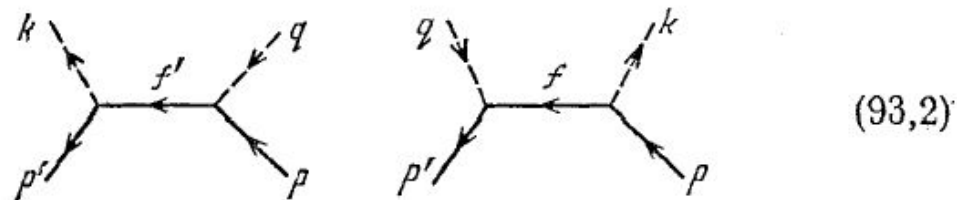
Обратимся к тормозному излучению электрона на ядре в случае релятивистских скоростей электрона<sup>1)</sup>. При этом будем предполагать выполненным условие применимости борновского приближения, т. е. как для начальной ( $v$ ), так и для конечной ( $v'$ ) скоростей электрона:  $Ze^2/\hbar v \ll 1$ ,  $Ze^2/\hbar v' \ll 1$ . При этом во всяком случае заряд ядра не должен быть слишком велик:  $Z\alpha \ll 1$ .

Как и в предыдущем параграфе, будем пренебрегать отдачей ядра, так что ядро играет лишь роль источника внешнего поля (об оправдании такого пренебрежения см. § 97).

Согласно (91,4) сечение тормозного излучения выражается через его амплитуду формулой

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{\omega |p'|}{8(2\pi)^5 |p|} d\omega_k d\omega' d\omega. \quad (93,1)$$

В первом не исчезающем приближении матричному элементу  $M_{fi}$  отвечают две диаграммы:



Свободный конец  $q$  соответствует внешнему полю, так что  $q = p' - p + k$  есть 4-вектор передачи импульса ядру. Пренебрежение отдачей означает, что временная компонента  $q^0 = 0$ .

Согласно диаграммам (93,2) имеем

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\mathbf{q}) \sqrt{4\pi} e_{\mu\bar{\nu}}^* \left( \gamma^\mu \frac{\gamma f' + m}{f'^2 - m^2} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{\gamma f + m}{f^2 - m^2} \gamma^\mu \right) u. \quad (93,3)$$

Образование электрон-позитронной пары при столкновении фотона с ядром ( $Z + \gamma \rightarrow Z + e^- + e^+$ ) и тормозное излучение при столкновении электрона с ядром ( $Z + e^- \rightarrow Z + e^- + \gamma$ ) — два перекрестных канала одной и той же реакции. В § 91 были уже сформулированы правила, по которым преобразуются формулы при переходе от второго из этих случаев к первому.

# Испускание фотонов

При энергиях электрона, значительно меньших критической энергии  $E_{кр}$ , определяемой приблизительно формулой

$$E_{кр} \approx \frac{600 \text{ МэВ}}{Z}, \quad (3.6)$$

доминируют потери на процессы возбуждения и ионизации связанных электронов атомов поглощающего вещества ( $Z$  — зарядовое число тормозящих атомов). При энергиях выше критической преобладают потери на излучение.

**Радиационная область ( $E > E_{кр}$ ).** Заряженная частица, пролетающая около ядра с зарядом  $Ze$ , испытывает кулоновское притяжение или отталкивание и отклоняется (фиг. 3.9, а). Такой процесс называется *кулоновским рассеянием*. При отклонении частица ускоряется (или замедляется). Как мы уже говорили в § 5 гл. 2, ускоренно движущаяся электрически заряженная частица излучает. В случае электронов в синхротроне излучение это называют *синхротронным излучением*; в случае рассеяния заряженных частиц в кулоновском поле ядер оно называется *тормозным излучением* (фиг. 3.9, б). Формулы (2.21) и (2.22) показывают, что при одинаковых величинах ускорения уносимая испускаемыми фотонами энергия пропорциональна отношению  $(E/mc^2)^4$ . Таким образом, тормозное излучение является важным механизмом потерь энергии электронами, но механизм этот совершенно несуществен для более тяжелых частиц, таких, как мюоны, пионы и протоны.

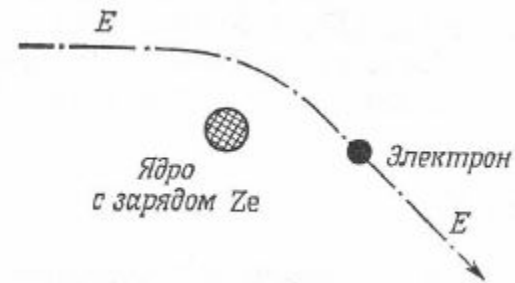
Формула (2.21) получена в рамках классической электродинамики. Тормозное излучение, однако, следует рассматривать квантовомеханически. Это рассмотрение провели в свое время Бете и Гайтлер. Полученные ими основные результаты следующие [6]. Число фотонов с энергиями между  $\hbar\omega$  и  $\hbar(\omega + d\omega)$ , испущенных электроном с энергией  $E$ , движущимся в поле ядра с зарядом  $Ze$ , пропорционально  $Z^2/\omega$ :

$$N(\omega) d\omega \sim Z^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (3.8)$$

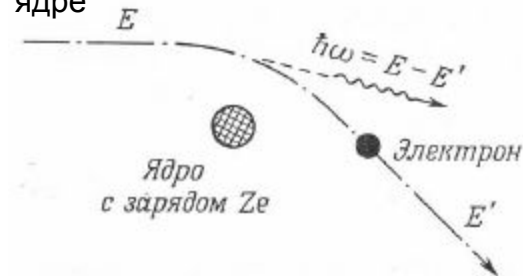
Из-за испускания этих фотонов электрон теряет энергию, причем расстояние, на котором его энергия уменьшается в  $e$  раз, называется *радиационной длиной* и обычно обозначается через  $X_0$ . Потери энергии на излучение при больших энергиях электрона можно выразить в виде

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{рад} \approx \frac{E}{X_0} \text{ или } E = E_0 e^{-x/X_0}. \quad (3.9)$$

Радиационную длину выражают либо в  $\text{г/см}^2$ , либо в см; некоторые значения  $X_0$  и критической энергии  $E_{кр}$  приведены в табл. 3.1.



Упругое рассеяние электрона на ядре



Тормозное излучение при упругом рассеянии электрона на ядре

Таблица 3.1  
Значения критической энергии  $E_{кр}$  и радиационной длины  $X_0$  для различных веществ

Вещество	Z	Плотность, $\text{г/см}^3$	Критическая энергия, МэВ	Радиационная длина	
				$\text{г/см}^2$	см
$\text{H}_2$ (жидкость)	1	0,071	340	62,8	887
He (жидкость)	2	0,125	220	93,1	745
C	6	1,5	103	43,3	28
Al	13	2,70	47	24,3	9,00
Fe	26	7,87	24	13,9	1,77
Pb	82	11,35	6,9	6,4	0,56
Воздух		0,0012	83	37,2	30,870
Вода		1	93	36,4	36,4

# Поглощение и рассеяние фотонов

Имеются три основных процесса взаимодействия фотонов с веществом:

1. Фотоэлектрический эффект.
2. Эффект Комптона.
3. Рождение электрон-позитронных пар.

Полная теория этих трех эффектов довольно сложна и требует знакомства с квантовой электродинамикой. Самые основные факты, однако, понять нетрудно.

При фотоэлектрическом эффекте фотон поглощается атомом, после чего атом испускает электрон с одной из своих оболочек. При эффекте Комптона фотон рассеивается атомным электроном. При рождении электрон-позитронной пары фотон превращается в электрон-позитронную пару.

Последний процесс невозможен в пустом пространстве, поскольку при распаде одного фотона на две частицы, обладающие массой, энергия и импульс этой системы одновременно сохраняться не могут. Рождение пар из фотонов происходит в присутствии кулоновского поля атомного ядра, участие которого в процессе рождения обеспечивает сохранение энергии и импульса.

Эффекты 1—3 зависят по-разному от энергий фотонов. При низких энергиях (ниже нескольких кэВ) доминирует фотоэффект, комптон-эффект слаб, а рождение пар вообще энергетически запрещено. Начиная с энергии  $2m_0c^2$ , рождение пар становится возможным, и вскоре оно превращается в доминирующий процесс.

В двух из вышеупомянутых трех эффектов — при фотоэффекте и рождении пар — фотон, участвующий во взаимодействии с веществом, уничтожается. При комптоновском рассеянии фотон не уничтожается. Он лишь теряет часть своей энергии. Отметим, что предельный случай взаимодействия типа «все или ничего», описанный в настоящей главе и изображенный на фиг. 3.1, б, представляет собой неплохое приближение для поглощения фотонов в веществе. Интенсивность пучка фотонов должна экспоненциально уменьшаться согласно формуле (3.1). Коэффициент поглощения  $\mu$  можно представить в виде суммы трех членов:

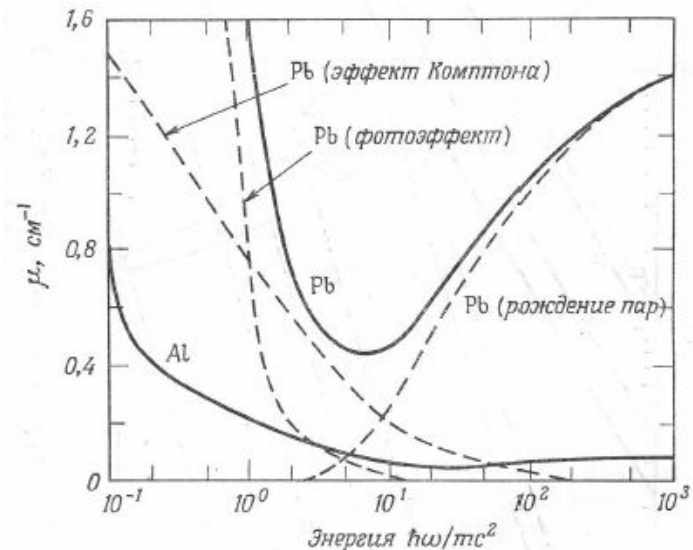
$$\mu = \mu_{\text{ф.э}} + \mu_{\text{к.э}} + \mu_{\text{р.п.}} \quad (3.5)$$

причем каждый член можно точно вычислить. Кривые зависимости от энергии трех коэффициентов поглощения и полного коэффициента поглощения показаны на фиг. 3.7. Энергию фотона  $\hbar\omega$  принято выражать в единицах  $m_0c^2 = 0,511$  МэВ.

Изменение интенсивности тонкого пучка гамма- (или рентгеновского) излучения происходит по экспоненциальному закону (закону Бугера)

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x), \quad (4.11)$$

где  $I_0$  — начальная интенсивность,  $x$  — пройденное в веществе расстояние. Величину  $\mu$  называют линейным коэффициентом поглощения гамма-излучения (см. рис. 4.4).



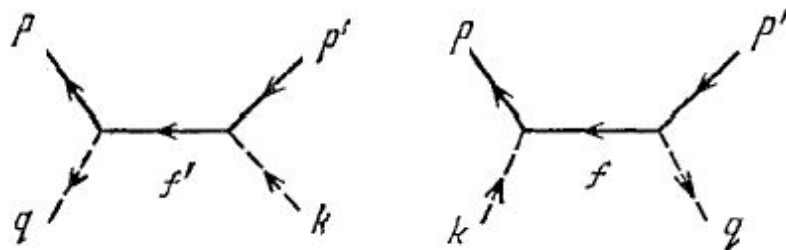
Зависимость полного коэффициента поглощения гамма-лучей в свинце и алюминии от энергии (сплошные кривые). Поглощение за счет фотоэффекта в алюминии пренебрежимо мало при рассматриваемых энергиях. Пунктирные линии — отдельные вклады, вносимые в полный коэффициент поглощения фотоэлектрическим рассеянием, рождением пар для Pb.

Энергия по оси абсцисс дана в единицах  $m_0c^2 = 0,511$  МэВ.

## Рождение электрон-позитронных пар.

Образование электрон-позитронной пары при столкновении фотона с ядром ( $Z + \gamma \rightarrow Z + e^- + e^+$ ) и тормозное излучение при столкновении электрона с ядром ( $Z + e^- \rightarrow Z + e^- + \gamma$ ) — два перекрестных канала одной и той же реакции. В § 91 были уже сформулированы правила, по которым преобразуются формулы при переходе от второго из этих случаев к первому.

$$k - q = p - p'$$

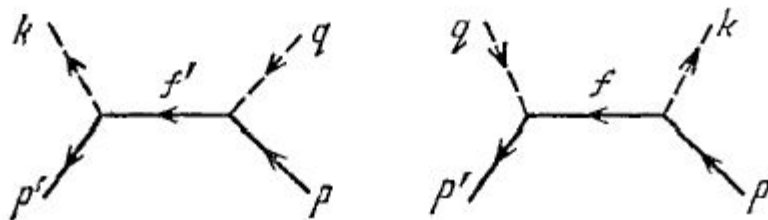


Согласно (91,4) сечение тормозного излучения выражается через его амплитуду формулой

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{\omega |p'|}{8 (2\pi)^5 |p|} d\omega_k d\omega' d\omega. \quad (93,1)$$

В первом не исчезающем приближении матричному элементу  $M_{fi}$  отвечают две диаграммы:

$$p - p' = k - q$$



$$(93,2)$$

Свободный конец  $q$  соответствует внешнему полю, так что  $q = p' - p + k$  есть 4-вектор передачи импульса ядру. Пренебрежение отдачей означает, что временная компонента  $q^0 = 0$ .

# Рассеяние фотонов. Эффект Комптона.

Упругое рассеяние коротковолнового рентгеновского излучения на свободных (или слабо связанных с атомами) электронах вещества было исследовано А.Комптоном\*. Им был открыт и объяснен эффект увеличения длины волны рассеянного излучения, названный впоследствии эффектом Комптона.

Схема опыта Комптона представлена на рис.4.1.

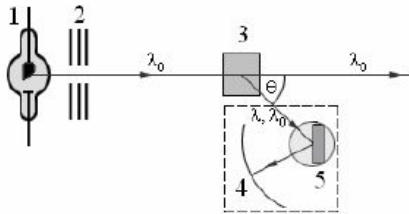


Рис. 4.1. Схема опыта Комптона

Исходящее из рентгеновской трубки 1 монохроматическое (называемое характеристическим) рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda_0$ , проходит через свинцовые диафрагмы 2 и в виде узкого пучка направляется на рассеивающее вещество – мишень 3. Излучение, рассеянное под некоторым углом  $\theta$ , анализируется с помощью спектрографа рентгеновских лучей 4, в котором роль дифракционной решетки играет кристалл 5, закрепленный на поворотном столике. Опыт показал, что в рассеянном излучении наблюдается увеличение длины волны  $\Delta\lambda$ , зависящее от угла рассеяния  $\theta$ :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \Lambda = \frac{h}{mc} = 2,426 \cdot 10^{-3} \text{ нм.}$$

где  $\Lambda = 2,43 \cdot 10^{-3}$  нм – так называемая комптоновская длина волны, не зависящая от свойств рассеивающего вещества. В рассеянном излучении наряду со спектральной линией с длиной волны  $\lambda$  наблюдается несмещенная линия с длиной волны  $\lambda_0$ . Соотношение интенсивностей смещенной и несмещенной линий зависит от рода рассеивающего вещества. На рис.4.2 представлены кривые распределения интенсивности в спектре излучения, рассеянного под некоторыми углами.

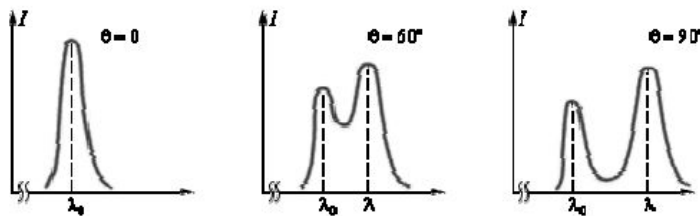


Рис. 4.2. Спектры рассеянного рентгеновского излучения

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц – налетающего фотона, обладающего энергией  $E_0 = h\nu_0$  и импульсом  $p_0 = h\nu_0/c$ , с покоящимся

электроном, энергия покоя которого равна  $E_e = mc^2$ . Фотон, столкнувшись с электроном, изменяет направление движения (рассеивается). Импульс фотона после рассеяния становится равным  $p = h\nu/c$ , а его энергия  $E' = h\nu < E_0$ . Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны. Скорость электрона после столкновения нельзя считать пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света и для его энергии необходимо использовать релятивистскую формулу  $E'_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}$ , где  $p_e$  – приобретенный импульс электрона. В силу закона сохранения энергии

$$E'_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 + h\nu_0 - h\nu. \quad (4.2)$$

При возведении обеих частей равенства (4.2) в квадрат и упрощения получится соотношение

$$p_e^2 c^2 = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2h^2\nu_0\nu - 2mc^2 h(\nu_0 - \nu). \quad (4.3)$$

По закону сохранения импульса импульс электрона равен разности импульсов первичного и рассеянного фотонов (см. диаграмму импульсов, рис.4.3):

$$\vec{p}_e = \vec{p}_0 - \vec{p}. \quad (4.4)$$

При возведении обеих частей равенства (4.4) в квадрат и умножении на  $c^2$  получится соотношение

$$p_e^2 c^2 = p_0^2 c^2 + p^2 c^2 - 2p_0 p c^2 \cos \theta = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2h^2\nu_0\nu \cos \theta. \quad (4.5)$$

Приравняв друг другу правые части выражений (4.3) и (4.5) можно получить

$$mc^2(\nu_0 - \nu) = h\nu_0\nu(1 - \cos \theta). \quad (4.6)$$

Переход от частот к длинам волн  $\nu_0 = c/\lambda_0$ ,  $\nu = c/\lambda$  приводит к выражению, совпадающему с формулой Комптона (4.1):

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.7)$$

Наличие в рассеянном излучении наряду со смещенной линией с длиной волны  $\lambda$  несмещенной линии с первоначальной длиной волны  $\lambda_0$  (см. рис. 4.2) объясняется рассеянием части фотонов на электронах, сильно связанных с атомами. В этом случае фотон обменивается энергией и импульсом с атомом в целом. Из-за большой массы атома  $M \gg m$  по сравнению с массой электрона атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона

$$\Delta E = E - E' = h(\nu_0 - \nu) = h\nu_0 \frac{h\nu}{Mc^2}(1 - \cos \theta) \ll h\nu_0. \quad (4.9)$$

Поэтому длина волны такого рассеянного излучения практически не отличается от длины волны  $\lambda_0$  падающего излучения.

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{Mc}(1 - \cos \theta) = 2 \frac{h}{Mc} \sin^2 \frac{\theta}{2} \ll \Delta\lambda = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.10)$$

# Рассеяние фотонов. Эффект Комптона.

Рассмотрим другой эффект второго порядка — рассеяние фотона на электроне (*эффект Комптона*). Пусть в начальном состоянии фотон и электрон имеют 4-импульсы  $k_1$  и  $p_1$ , а в конечном  $k_2$  и  $p_2$  (а также определенные поляризации, которые для краткости не указываем).

, получим окончательно амплитуду рассеяния

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \bar{u}_2 \{ (\gamma e_2^*) G(p_1 + k_1) (\gamma e_1) + (\gamma e_1) G(p_1 - k_2) (\gamma e_2^*) \} u_1, \quad (74,13)$$

где  $e_1, e_2$  — 4-векторы поляризации фотонов,  $G(p)$  — электронный пропагатор в импульсном представлении.

Два члена в этом выражении представляются следующими диаграммами Фейнмана:

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 (\gamma e_2^*) G(f) (\gamma e_1) u_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_2 & & k_1 \\ & \swarrow & \searrow \\ & f = p_1 + k_1 & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ p_2 & & p_1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} p_2 & & k_1 \\ & \swarrow & \searrow \\ & f = p_1 - k_2 & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ k_2 & & p_1 \end{array} \end{array} \quad (74,14)$$

Пунктирные свободные концы диаграмм отвечают реальным фотонам; входящим линиям (начальный фотон) сопоставляется множитель  $\sqrt{4\pi e}$ , а выходящим линиям (конечный фотон) — множитель  $\sqrt{4\pi e^*}$ , где  $e$  — 4-вектор поляризации. В первой диаграмме начальный фотон поглощается вместе с начальным электроном, а конечный испускается вместе с конечным электроном. Во второй диаграмме испускание конечного фотона происходит вместе с уничтожением начального электрона, а поглощение начального фотона — с рождением конечного электрона.

Внутренняя сплошная линия (соединяющая обе вершины) отвечает виртуальному электрону, 4-импульс которого определяется сохранением 4-импульса в вершинах. Этой линии сопоставляется множитель  $iG(f)$ . В отличие от 4-импульса реальной частицы квадрат 4-импульса виртуального электрона не равен  $m^2$ .

# Рассеяние фотонов. Эффект Комптона.

Сечение  $\sigma$  определяется как отношение числа рассеянных (в других процессах – поглощенных) в единицу времени квантов к плотности потока квантов (числу квантов, проходящих в единицу времени через единицу площади). Электрон в эффекте Комптона (атом в фотоэффекте, атомное ядро при рождении пары) можно условно представить в виде препятствия (диска) площадью  $\sigma$ . Если представить кванты распространяющимися прямолинейно, то рассеивается (поглощается) та их часть, которая попадает в препятствие. Сечение имеет размерность площади и обычно выражается во внесистемной единице измерения барн ( $\text{б}$ ):  $1 \text{ б} = 10^{-24} \text{ см}^2$ . Полное сечение  $\sigma$  равно сумме сечения эффекта Комптона  $\sigma_K$ , сечения фотоэффекта  $\sigma_\phi$  и сечения образования пар  $\sigma_{\text{пар}}$

$$\sigma = \sigma_K + \sigma_\phi + \sigma_{\text{пар}}. \quad (4.12)$$

При используемых энергиях гамма-квантов

$$\sigma \approx \sigma_K. \quad (4.13)$$

В результате параллельный поток гамма-квантов, проходя через вещество, ослабляется, в основном, за счет комптоновского рассеяния

$$\mu = n_e \sigma = n Z \sigma, \quad (4.14)$$

где  $n_e$  – концентрация электронов,  $n$  – концентрация атомов.

Формула (4.11) получается следующим образом. Если поперечное сечение пучка равно  $S$ , то на интервале  $dx$  пучок встречает  $dN = n_e S dx$  электронов, которые можно представить как площадки с общей площадью  $\sigma dN$ . Для каждого из гамма-квантов вероятность выбытия из пучка равна отношению площадей

$$p = \sigma dN / S = \sigma n_e dx. \quad (4.15)$$

Из пучка, состоящего из  $I$  гамма-квантов, на интервале  $dx$  выбывают  $|dI| = pI = I \sigma n_e dx$  квантов. Поэтому

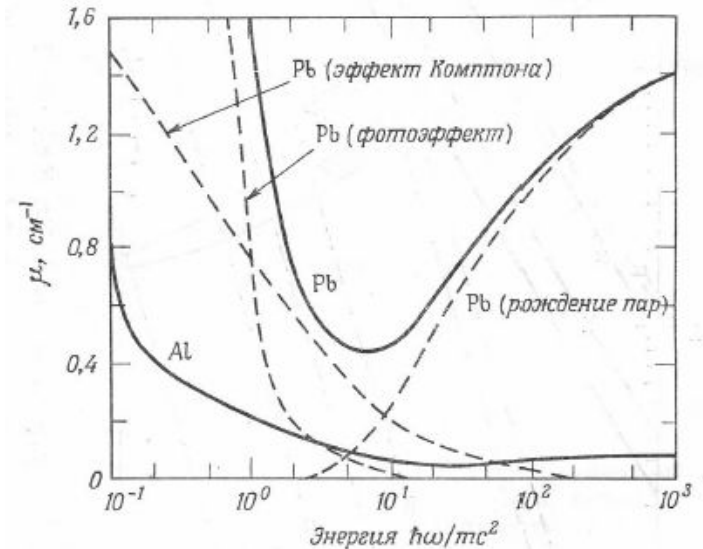
$$dI = -I \sigma n_e dx, \quad \frac{dI}{dx} = -I \sigma n_e. \quad (4.16)$$

Решение дифференциального уравнения (4.16) с начальным условием  $I(0) = I_0$  имеет вид  $I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$ , где  $\mu$  – коэффициент ослабления.

теоретическое значение сечения эффекта Комптона на свободных электронах [10]

$$\sigma_{\text{теор}} = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left\{ \left( 1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right\}, \quad (4.37)$$

где  $x = 2E_\gamma / (m_e c^2)$ ,  
радиусом электрона

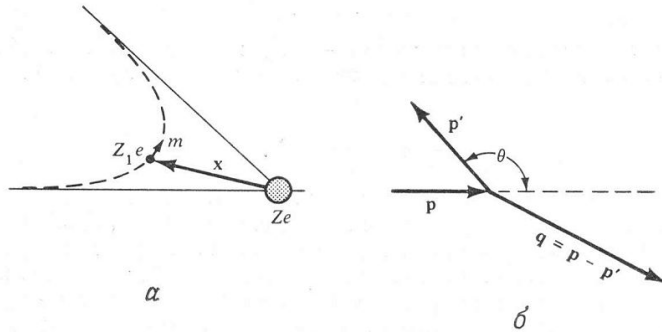


10. Берестецкий В.Б. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2,8 \text{ фм}. \quad (4.38)$$

# Формулы Резерфорда и Мотта.

Классическая картина упругого рассеяния  $\alpha$ -частицы кулоновским полем ядра с зарядом  $Ze$  изображена на фиг. 6.3. Такой процесс носит название *резерфордовского рассеяния*, если считать ядро не имеющим спина ( $\alpha$ -частица спина не имеет). Эффективное сечение частицы с нулевым спином бесспиновым ядром можно вычислить по классической или по квантовой механике: результат получается одинаковый. Мы придем к знаменитой формуле Резерфорда. *Формула Резерфорда для эффективного сечения рассеяния* представляет собой одно из немногих соотношений, которые можно перенести из классической механики в квантовую без каких-либо изменений, и этим фактом сам Резерфорд очень гордился <sup>1)</sup>.



Фиг. 6.3. Резерфордовское рассеяние. *a* — классическая траектория частицы с зарядом  $Z_1e$ , рассеивающейся в поле тяжелого ядра с зарядом  $Ze$ ; *b* — представление акта рассеяния в импульсном пространстве.

Самый быстрый способ вывода формулы Резерфорда для дифференциального эффективного сечения основан на использовании *первого борновского приближения*. Всякое дифференциальное эффективное сечение можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2, \quad (6.10)$$

где  $f(\mathbf{q})$  называется амплитудой рассеяния, а  $\mathbf{q}$  — передаваемым при рассеянии импульсом:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'; \quad (6.11)$$

здесь  $\mathbf{p}$  — импульс падающей частицы, а  $\mathbf{p}'$  — импульс частицы рассеянной. В случае упругого рассеяния величина переданного импульса, как это непосредственно видно из фиг. 6.3, *b*, связана с углом рассеяния  $\theta$  соотношением

$$q = 2p \sin \frac{\theta}{2}. \quad (6.12)$$

В первом борновском приближении предполагается, что и падающую, и рассеянную частицы можно описать плоской волной. Амплитуду рассеяния в таком случае можно записать в виде <sup>1)</sup>

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}/\hbar} d^3x. \quad (6.13)$$

Здесь  $V(\mathbf{x})$  — потенциал, на котором происходит рассеяние. Если он сферически-симметричен, то в формуле (6.13) можно провести интегрирование по углам, и амплитуда рассеяния приобретет вид

$$f(q^2) = -\frac{2m}{\hbar q} \int_0^\infty dx x \sin\left(\frac{qx}{\hbar}\right) V(x). \quad (6.14)$$

Здесь  $x = |\mathbf{x}|$ . Поскольку амплитуда  $f$  уже не зависит от направления переданного импульса  $\mathbf{q}$ , а зависит лишь от его величины, то теперь можно считать, что  $f = f(q^2)$ .

В случае резерфордовского рассеяния потенциал  $V(x)$  является кулоновским <sup>2)</sup>. Потенциал кулоновского взаимодействия между двумя точечными зарядами  $q_1, q_2$ , расположенными на расстоянии  $x$ , как известно, имеет вид

$$V(x) = \frac{q_1 q_2}{x}.$$

В реальном эксперименте по рассеянию, показанном на фиг. 6.3, надо принимать во внимание, что ядро окружено облаком атомных электронов, которое частично экранирует заряд ядра  $Ze$ . Наличие этого экранирования можно учесть, взяв для потенциала выражение

$$V(x) = \frac{Z_1 Z e^2}{x} \exp(-x/a), \quad (6.15)$$

где  $a$  — длина порядка *атомных* размеров. Подставив потенциал (6.15) в интеграл (6.14) и вычислив этот интеграл, для амплитуды рассеяния получаем формулу

$$f(q^2) = -\frac{2mZ_1 Z e^2}{q^2 + (\hbar/a)^2}. \quad (6.16)$$

В экспериментах по рассеянию, проводимых с целью изучения структуры ядер, переданный импульс  $q$  по порядку величины составляет несколько  $M\alpha B/c$ , поэтому слагаемым  $(\hbar/a)^2$  в знаменателе формулы (6.16) можно спокойно пренебречь. Подставляя теперь (6.16) в (6.10), мы сразу получаем формулу Резерфорда для дифференциального эффективного сечения рассеяния:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Резерфорд}} = \frac{4m^2 (Z_1 Z e^2)^2}{q^4}. \quad (6.17)$$

3. Как мы уже сказали, мы здесь в основном интересуемся экспериментами по рассеянию электронов на ядрах и нуклонах. В этих случаях следует учитывать, что падающие частицы обладают спинами. Рассеяние частиц со спином  $1/2$  и зарядом  $Z_1 = 1$  на бесспиновой частице-мишени рассмотрел Мотт. Для эффективного сечения он вывел так называемую формулу Мотта <sup>1)</sup>:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = 4(Ze^2)^2 \frac{E^2}{(qc)^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (6.19)$$

Здесь  $E$  — энергия падающего электрона, а  $v = \beta c$  — его скорость. Слагаемое  $\beta^2 \sin^2 \theta/2$  в скобках появляется из-за взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем частицы-мишени. В системе отсчета, в которой мишень покоится, это поле отсутствует, однако в системе отсчета, в которой покоится электрон, оно отлично от нуля. Это слагаемое для частицы со спином  $1/2$  обращается в нуль при  $\beta \rightarrow 0$ , а при  $\beta \rightarrow 1$  оно будет сравнимо с единицей в скобках в формуле (6.19), описывающей вклад от обычного кулоновского взаимодействия зарядов падающей частицы и частицы-мишени, поскольку при приближении скорости электрона к скорости света магнитные силы становятся равными по величине электрическим. В нерелятивистском пределе  $\beta \rightarrow 0$  ( $E \rightarrow mc^2$ ) формула Мотта для эффективного сечения, таким образом, переходит в формулу Резерфорда.



# 13 вопрос

- Размеры атомных ядер.
- Распределение заряда в ядре.

# Упругое рассеяние электронов

Основным источником сведений о распределении электрического заряда в атомном ядре явилось исследование рассеяния быстрых электронов на ядрах, начатое Р. Хофштадтером с 1956 г. (Нобелевская премия по физике за 1961 г.). Схема опыта была аналогична схеме опыта Резерфорда с заменой альфа-частиц от радиоактивного препарата на ускоренные электроны. В типичных экспериментах (см. рис. 1.1) интенсивный пучок релятивистских электронов с энергией от 150 МэВ до нескольких ГэВ направлялся из ускорителя в камеру с мишенью в виде тонкой плёнки.

Рис. 1.1. Схема эксперимента по рассеянию релятивистских электронов на атомных ядрах



Измерялась интенсивность потока  $I(\theta)$  электронов рассеянных в элемент телесного угла  $d\Omega$ . Отношение  $I$  к плотности потока налетающих электронов представляет собой *дифференциальное сечение рассеяния*  $d\sigma/d\Omega$ . Его значения принято записывать в  $\text{см}^2/\text{ср.}$ ,  $\text{фм}^2/\text{ср.}$  ( $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$ ),  $\text{б/ср.}$  ( $1 \text{ б} = 1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ ).

Электроны малых энергий рассеиваются кулоновским полем, не проникая внутрь ядра. Угловые распределения рассеяния электронов (дифференциальные сечения рассеяния) являются при этом монотонно убывающими функциями угла рассеяния.

Картина меняется при больших значениях энергии  $E$ , когда длина волны де Бройля  $\lambda$  релятивистского электрона уменьшается и становится соизмеримой с размерами ядра. Угловые распределения рассеянных электронов в этом случае обнаруживают немонотонное поведение (рис. 1.2, 1.3). Это свидетельствует о дифракционном характере рассеяния и является проявлением волновых свойств электронов, подтверждая их корпускулярно-волновой дуализм.

Длина волны де Бройля релятивистского электрона с энергией  $E \gg m_e c^2$  равна

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E}, \quad (1.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света,  $m_e$  – масса электрона,  $p$  – импульс электрона, связанный с его энергией соотношением

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \quad (1.2)$$

и

$$E \approx pc, \quad p \approx \frac{E}{c} \text{ при } E \gg m_e c^2. \quad (1.3)$$

Для вычисления значения  $\lambda$  (в фм) по значению  $E$  (в МэВ) можно использовать приближенную формулу

$$\lambda(\text{фм}) = \frac{1241}{E(\text{МэВ})}. \quad (1.4)$$

Зависимости от угла дифференциальных сечений рассеяния электронов на ядрах золота и индия показаны на рис. 1.2, на ядрах кислорода и кальция – на рис. 1.3.

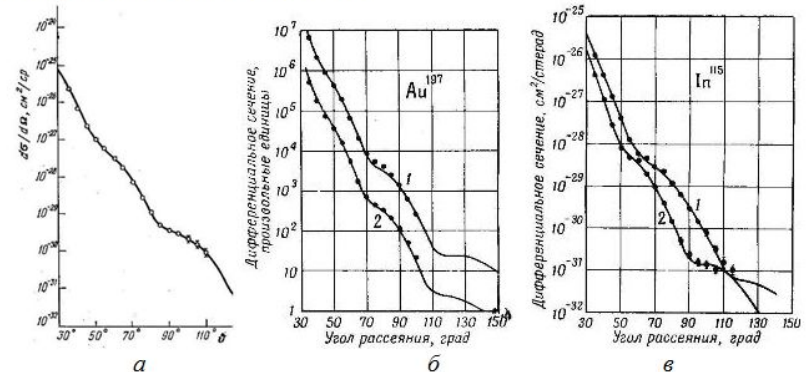


Рис. 1.2. Зависимости от угла дифференциальных сечений рассеяния электронов на ядрах золота  $^{197}\text{Au}^*$  с энергиями 153 МэВ (а) и 183 МэВ (б) и на ядрах индия  $^{115}\text{In}$  (в) с энергиями 153 МэВ (кривая 1) и 183 МэВ (кривая 2)

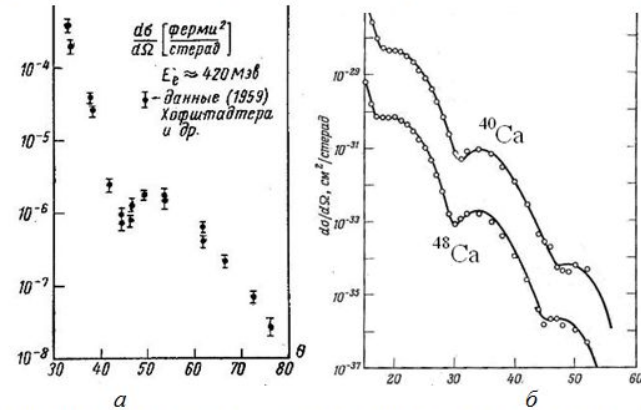


Рис. 1.3. Зависимости от угла дифференциальных сечений рассеяния электронов с энергией 420 МэВ на ядрах кислорода (а) и с энергией 750 МэВ на ядрах кальция (б). Значения сечений рассеяния на ядрах  $^{40}\text{Ca}$  увеличены в 10 раз, а на ядрах  $^{48}\text{Ca}$  уменьшены в 10 раз.

# Упругое рассеяние электронов. Формула Мотта.

Квантовое описание упругого рассеяния релятивистских электронов требует применения сложных математических и компьютерных расчетов. Однако для рассеяния быстрых электронов на легких ядрах (с зарядом  $Z \ll 137$ ) применимо борновское приближение (на основе метода М.Борна). Если считать распределение заряда в ядре сферически симметричным, формулу для дифференциального сечения можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M |F(k)|^2. \quad (1.5)$$

Дифференциальное сечение упругого (с сохранением энергии) рассеяния релятивистских электронов на точечном заряде (формула Момма)

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = 4(Ze^2)^2 \frac{E^2}{(qc)^4} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (1.6)$$

где  $Ze$  – заряд ядра,  $v$  – скорость налетающего электрона,  $q$  – изменение импульса электрона при рассеянии (передаваемый ядру импульс, см. рис. 1.4)

$$q = \hbar k = 2p \sin(\theta/2). \quad \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Момма}} = |F(k)|^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2}.$$

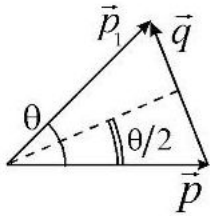


Рис. 1.4. Начальный импульс электрона  $\vec{p}$ , его изменение  $\vec{q}$  и конечный импульс электрона  $\vec{p}_1$  при упругом рассеянии на угол  $\theta$

Величина  $F(k)$  носит название формфактора. В борновском приближении квантовой теории рассеяния формфактор оказывается равным Фурье-образу плотности вероятности  $\rho(\vec{r})$  распределения протонов в ядре (протонного “облака”):

$$F(k) = \frac{1}{Z} \int \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{r}, \quad (1.8)$$

где полный заряд ядра

$$Z = \int \rho(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (1.9)$$

Для сферически симметричного распределения заряда  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$  интеграл по объему сводится к однократному интегралу

$$F(k) = \frac{4\pi}{kZ} \int_0^\infty \rho(r) \sin(kr) r dr \quad (1.10)$$

Таким образом, формулы (1.5)-(1.10) устанавливают взаимосвязь угловых распределений рассеянных электронов  $d\sigma/d\Omega$  с распределением заряда внутри ядра  $\rho(\vec{r})$ . Они дают возможность определения функции  $\rho(r)$  косвенным образом – путем подбора такой пробной функции  $\rho(r)$ , которая обеспечивает наилучшее согласие теоретического и экспериментального формфакторов  $F(k)$ .

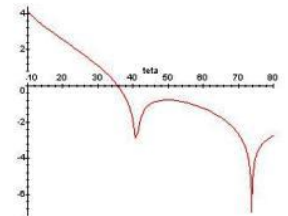
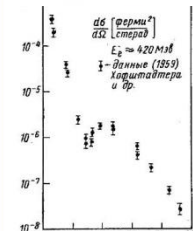
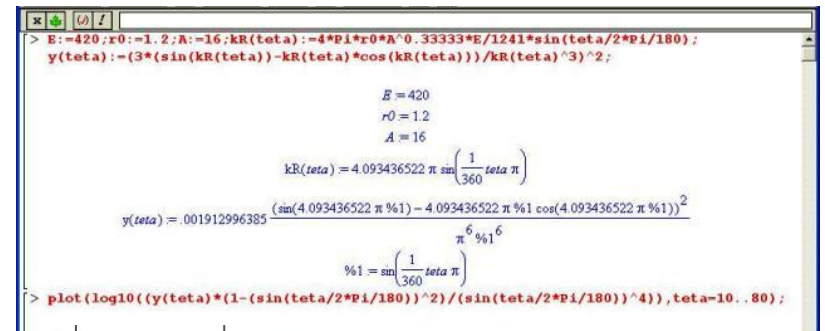
Ступенчатая функция  $\rho(r)$  для однородно заряженного шара радиуса  $R_x$ , который принято записывать в виде

$$R_x = R_0 r_0 A^{1/3}, \quad (1.11)$$

где  $R_0 = 1$  фм, а  $A$  – массовое число, и соответствующий ему формфактор  $F(k)$  приведены в табл. 1.1. Построение с этим и другими подобными формфакторами графиков дифференциальных сечений позволяет подобрать оптимальные значения параметров (в данном случае  $r_0$ ), характеризующих распределение заряда и размер ядра.

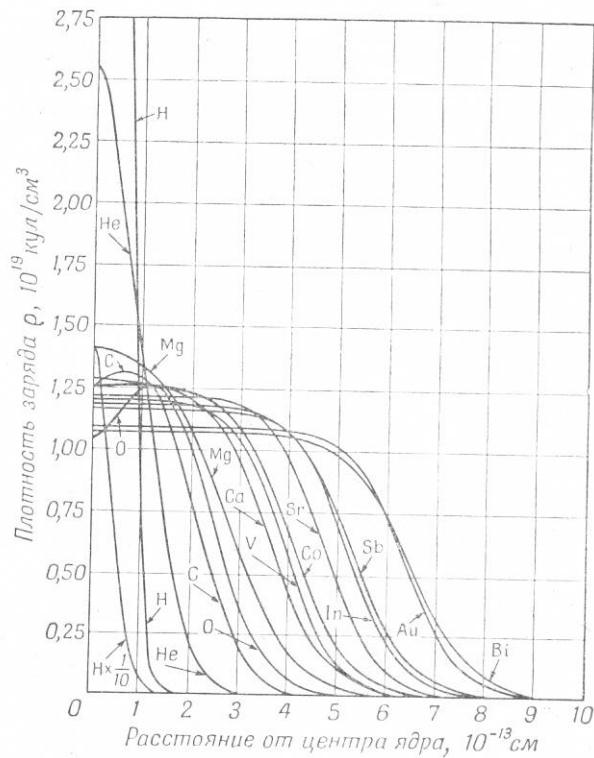
Таблица 1.1

№	Плотность заряда $\rho(r)$	Формфактор $F(k)$
1	Точечный заряд	1
2	$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{при } r \leq R_x \\ 0 & \text{при } r > R_x \end{cases}$	$3 \frac{\sin(kR_x) - kR_x \cos(kR_x)}{(kR_x)^3}$

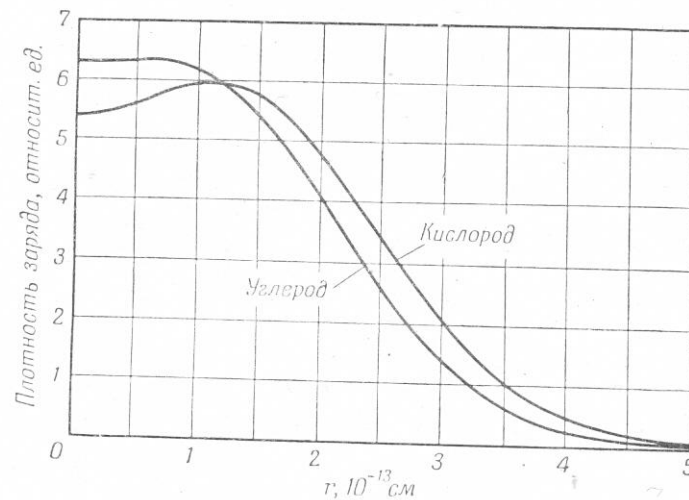


Построение графика относительного дифференциального сечения рассеяния

# Распределение заряда в ядрах



Ф и г. 16. Сводный график кривых распределения заряда в различных ядрах, полученных методом рассеяния электронов [98].



Ф и г. 15. Распределение заряда для ядер  $C^{12}$  и  $O^{16}$ , которое находится в хорошем согласии с экспериментальными данными по упругому рассеянию [103].