



Интегралы

Введение в математический анализ

План вебинара

1) Разбор ДЗ

2) Интегралы:

- неопределённые интегралы
- определённые интегралы

3) Дифференциальные уравнения

Разбор ДЗ (ФНП). Часть 1.

1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1-x^3} + \ln(y^2-1)$$

$$\begin{cases} 1-x^3 \geq 0 \\ y^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 1 \\ (y-1)(y+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ [y < -1 \\ y > 1] \end{cases}$$

2. Найти частные производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_x = 3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{3}{x \cdot \ln y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$$

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_y = \underbrace{3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \ln x}_{A} \cdot \left(\frac{1}{\ln y}\right)'_y = A \cdot \left((\ln y)^{-1}\right)'_y =$$

$$= A \cdot \frac{-1}{\ln^2 y} \cdot \frac{1}{y} = - \frac{3 \ln x}{y \cdot \ln^2 y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}$$

$$\begin{aligned} dz &= z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy \\ z &= \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}} = (2xy + \cos \frac{x}{y})^{1/2} \\ z'_x &= \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} \cdot (2xy + \cos \frac{x}{y})'_x = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} \cdot (2y - (\sin \frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z'_y &= \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} (2xy + \cos\frac{x}{y})'_y = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} \cdot (2x - (\sin\frac{x}{y}) \cdot x(-\frac{1}{y^2})) = \\
 &= \frac{x \cdot (2 + \frac{\sin\frac{x}{y}}{y^2})}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}}
 \end{aligned}$$

$$z'_x(1;1) = \frac{1}{2\sqrt{2+\cos 1}} (2 - \sin 1)$$

$$z'_y(1;1) = \frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}$$

$$dz = \frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}} dx + \frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}} dy$$

$$\sin 1 \approx 0,841$$

$$\cos 1 \approx 0,540$$

$$\frac{1,159}{3,187} dx + \frac{2,841}{3,187} dy =$$

$$dz(1;1) = 0,364 dx + 0,891 dy$$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Решение:

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=extrema+calculator&assumption=%7B%22F%22%2C+%22GlobalExtremaCalculator%22%2C+%22curvefunction%22%7D+-%3E%22x%5E2%2Bxy%2By%5E2-6x-9y%22>

Input interpretation:

extrema

$$x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Global maxima:

(no global maxima found)

Global minimum:

$$\min\{x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y\} = -21 \text{ at } (x, y) = (1, 4)$$

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y \rightarrow \text{ext.}$$

H. y. i.

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 6 = 0 \\ z'_y = x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases} (1; 4)$$

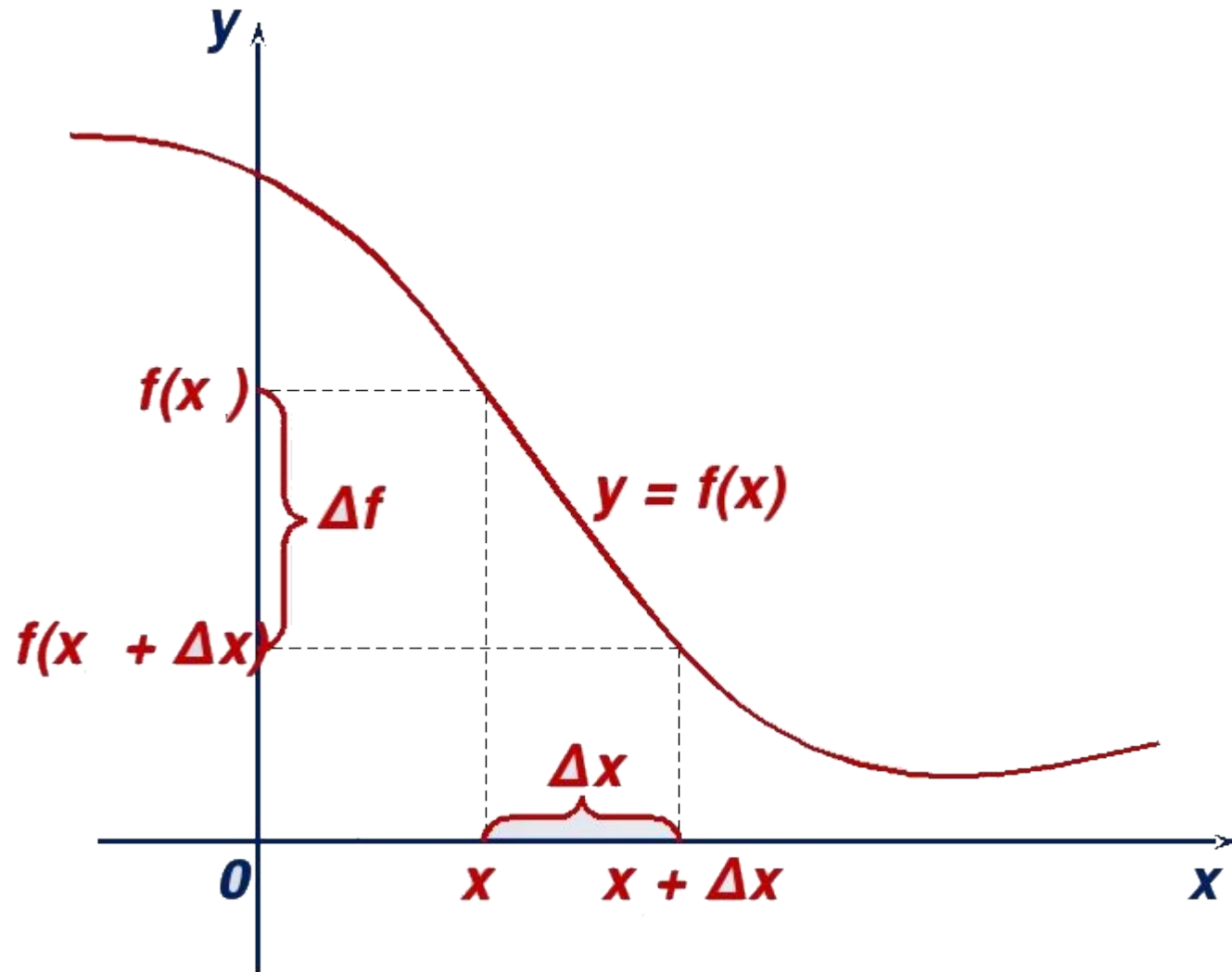
D. y. o.

$$\begin{cases} z''_{xx} = 2 \\ z''_{xy} = z''_{yx} = 1 \\ z''_{yy} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0 \Rightarrow \text{min б.т. } (1; 4)$$

$$z(1; 4) = 1^2 + 1 \cdot 4 + 4^2 - 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 = -21$$

Приращение функции и приращение аргумента



Дифференциал

$$y = f(x)$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy = y' dx$$

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = 2x \cdot dx$$

$$y = 3x^2 - 4x + 10 \quad \Rightarrow \quad dy = (6x - 4) \cdot dx$$

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad dy = \cos x \cdot dx$$

$$y = \sin(x^2) \quad \Rightarrow \quad dy = \cos(x^2) \cdot d(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x \cdot dx$$

$$y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Интегрирование

по сути, это противоположное
дифференцированию.

Знак интегрирования:

SQUARE \rightarrow S \rightarrow \int

Интегрирование

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \sin x dx = \int d(-\cos x) = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \int d(\sin x) = \sin x + C$$

При интегрировании проверить себя довольно просто: достаточно взять производную от ответа - должна получиться функция под интегралом.

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \int d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \sin x dx = \int d(-\cos x) = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \int d(\sin x) = \sin x + C$$

$$(x + C)' = 1$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$$

$$(-\cos x + C)' = \sin x$$

$$(\sin x + C)' = \cos x$$

Основные правила интегрирования

$$\int (u \pm v \pm w) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int w dx$$

$$\int cu dx = c \int u dx$$

Таблица интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad 2. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$$

$$3. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases} \quad 4. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad 6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

Таблица интегралов

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Весь процесс интегрирования сводится к тому, что необходимо привести подынтегральную функцию к табличному виду.

Неопределенные интегралы. Метод внесения под дифференциал

$$\int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) d(2x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$$

$$z = 2x$$

$$dz = d(2x) = 2dx$$

Неопределенные интегралы. Метод внесения под дифференциал

$$\int x(x^2 + 1)^{50} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{50} d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{50} d(x^2 + 1) = \frac{(x^2 + 1)^{51}}{2 \cdot 51} + C$$

$$dz = d(x^2 + 1) = 2x dx$$

Метод замены переменной

(по сути, он идентичен внесению под знак дифференциала)

$$\int \frac{1}{2x - 5} dx$$

$$2x - 5 = t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$$

$$\int \frac{1}{2x - 5} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C$$

$$\int \frac{1}{2x - 5} dx$$

$$2x - 5 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

$$\int \frac{1}{2x - 5} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C$$

В этом методе важно вернуться к исходной переменной:

$$\int \frac{1}{2x - 5} dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 5| + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$$

$$x^3 + 1 = t \quad \Rightarrow \quad x = (t - 1)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}(t - 1)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx &= \int \frac{(t - 1)^{\frac{2}{3}}}{t} \cdot \frac{1}{3}(t - 1)^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| + C = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C \end{aligned}$$

Неопределенные интегралы. Интегрирование по частям

$$U \cdot V = \int U dV + \int V dU$$

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU$$

Источник:

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$d(U \cdot V) = U dV + V dU$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$d(U \cdot V) = U dV + V dU$$

Интегрируем правую и левую части

$$\int d(U \cdot V) = \int V \cdot dU + \int U \cdot dV$$

$$U \cdot V = \int V \cdot dU + \int U \cdot dV$$

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$$

Неопределенные интегралы. Интегрирование по частям

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx =$$

$$\begin{aligned} U = \operatorname{arctg} x & \Rightarrow dU = \frac{dx}{x^2 + 1} \\ dV = dx & \Rightarrow V = x \end{aligned}$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\int x \sin x \, dx$$

$$U = x \quad \Rightarrow \quad dU = dx$$

$$dV = \sin x \, dx \quad \Rightarrow \quad V = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Неопределенные интегралы. Интегрирование по частям

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$\begin{array}{lll} U = e^x & \Rightarrow & dU = e^x dx \\ dV = \sin x dx & \Rightarrow & V = -\cos x \end{array}$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\begin{array}{lll} U = e^x & \Rightarrow & dU = e^x dx \\ dV = \cos x dx & \Rightarrow & V = \sin x \end{array}$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$$

Какие интегралы берутся по частям

$$1) \int \ln x dx, \int (x^2 + 3) \ln x dx, \int x \ln^2 x dx$$

$$2) \int x e^x dx, \int (x^2 - 2x + 5) e^{-2x} dx$$

$$3) \int x \cos 6x dx, \int (x^2 + 3x) \sin 2x dx, \int x \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$4) \int \arcsin x dx, \int x^2 \operatorname{arctg} x dx$$

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU$$

Дробь правильная
(старшая степень выражения в
знаменателе выше степени выражения в
числителе)

Неопределенные интегралы. Метод неопределенных коэффициентов

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 8}{x^4 - 1} dx &= \int \frac{4x^2 + 8}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} dx = \\ &= \int \left(\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int \frac{x^3(A + B + C) + x^2(A - B + D) + x(A + B - C) + (A - B - D)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} dx\end{aligned}$$

Неопределенные интегралы. Метод неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 4 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = 0 \\ D = -2 \end{cases}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+1| - 2 \operatorname{arctg} x + C$$

Неопределенные интегралы. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

Неопределенные интегралы. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Неопределенные интегралы. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} = \\ &= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = - \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \\ &= - \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C\end{aligned}$$

На python интегралы так же можно находить аналитически с помощью библиотеки **sympy**.

```
[ ] from sympy import *  
    init_printing()
```

```
[ ] x=Symbol('x')  
    f=1/x  
    f
```

$$\frac{1}{x}$$

```
[ ] integrate(f,x)## в данном случае имеется в виду натуральных логарифм. Так же не учитывается константа.  
log(x)
```

Найдем интеграл от рациональной дроби

```
[ ] x=Symbol('x')  
f=(4*x**2+8)/(x**4-1)  
f
```

$$\frac{4x^2 + 8}{x^4 - 1}$$

```
[ ] integrate(f,x)
```

$$3 \log(x - 1) - 3 \log(x + 1) - 2 \operatorname{atan}(x)$$

Определенные интегралы.

› Интеграл Римана.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

› Интеграл Лебега

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \int_X f(x) d\mu = \mu(A)$$

Для интеграла Римана функция должна быть непрерывна и дифференцируема во всех точках заданного отрезка $[a,b]$. Для интеграла Лебега таких ограничений нет.

Т.е. интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана там, где интеграл Римана существует. При этом интеграл Лебега можно брать и от не дифференцируемых в точке функций. Например, от функции Дирихле.

› Интеграл Римана.

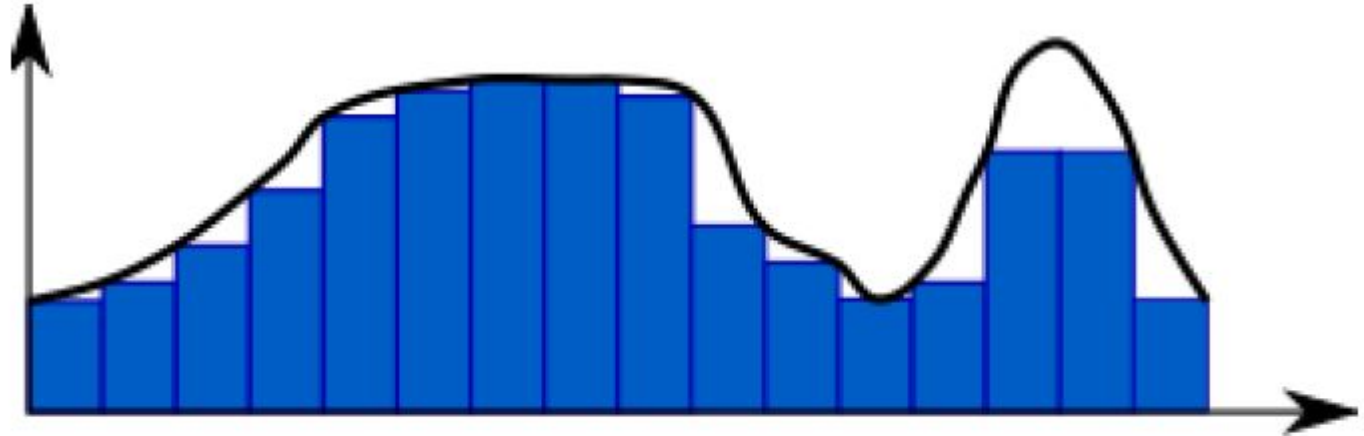
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

› Интеграл Лебега

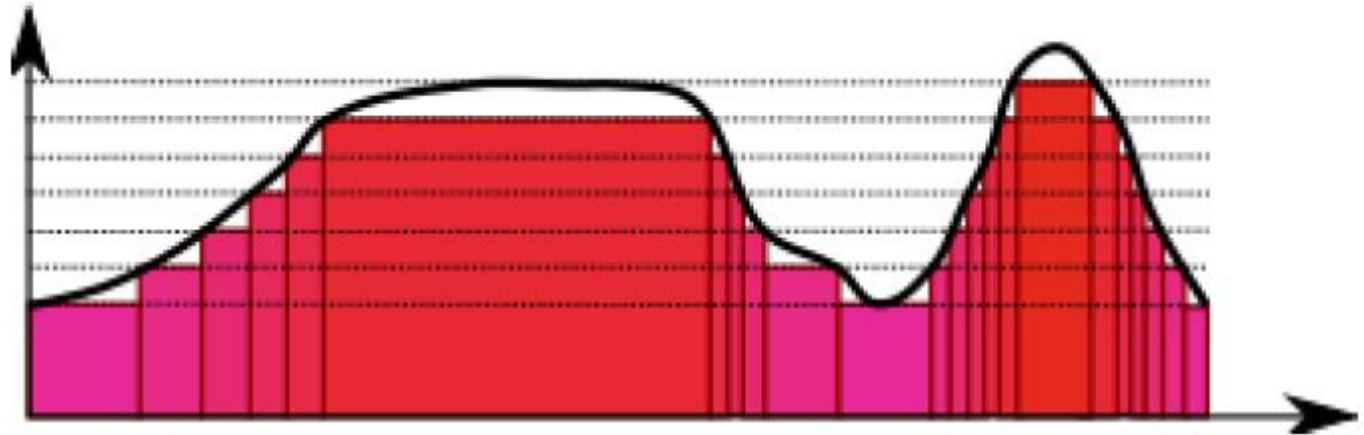
$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)d\mu = \mu(A)$$

Определенные интегралы.

Интегрирование
по Риману



Интегрирование
по Лебегу



Статьи по интегралам Лебега

- **Интеграл Лебега:**

<https://mathworld.wolfram.com/LebesgueIntegral.html>

- **Мера Лебега:**

<https://mathworld.wolfram.com/Measure.html>

- **Пример вычисления интеграла Лебега:**

<https://demonstrations.wolfram.com/LebesgueIntegration/>


Определенные интегралы.

$$y = x$$

$$\int_0^1 x dx = \int_0^1 d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^1 x dx = \int_{-1}^1 d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$$

integrate $x dx$ from $x=0$ to 1

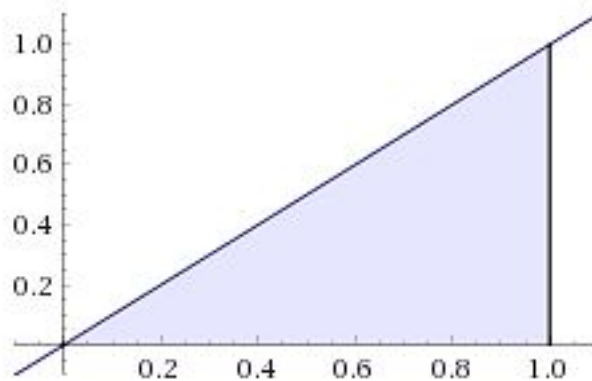
 Extended Keyboard

 Upload

Definite integral:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = 0.5$$

Visual representation of the integral:



$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx$$

$$v = -e^{-x}$$

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx$$



$$v = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-x} dx &= -xe^{-x} - \int x(-e^{-x}) dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = \\ &= -xe^{-x} - \int e^{-x} d(-x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx &= F(\ln 2) - F(0) = -(\ln 2)e^{-\ln 2} - e^{-\ln 2} - (-0e^{-0} - e^0) = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

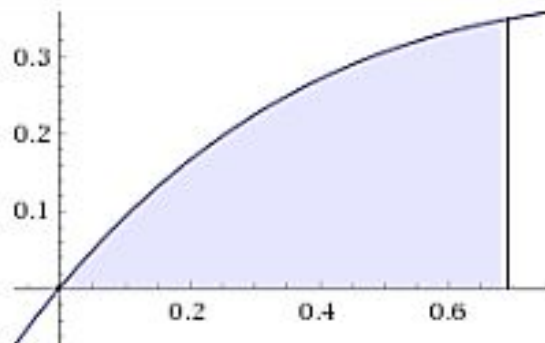
integrate $x e^{-x}$ dx from $x=0$ to $\ln 2$

 Extended Keyboard  Upload

Definite integral:

$$\int_0^{\log(2)} x e^{-x} dx = \frac{1}{2} (1 - \log(2)) \approx 0.15343$$

Visual representation of the integral:



Indefinite integral:

$$\int x e^{-x} dx = e^{-x} (-x - 1) + \text{constant}$$

Несобственные интегралы

определённые интегралы с особенностями на границах.

Одна из границ
--
бесконечность

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

Особенность на
одной из границ
интегрирования

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon)$$

Примеры вычисления несобственных интегралов

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin(-1+\varepsilon) \right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения: где применяются.

DSP (Цифровая обработка сигналов)

Computer vision

«Анализ любых экспериментальных данных (зависимости величин) - только диффуры! А это - весь мир». (с, @xmoonlight, <https://qna.habr.com/q/149841>)

Решение дифференциальных уравнений

- › ДУ с разделяющимися переменными;
- › однородные ДУ;
- › линейные ДУ первого порядка (Бернулли, Риккати);
- › уравнение в полных дифференциалах;
- › линейные ДУ с постоянными коэффициентами;
- › линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами;
- › устойчивость.

А.Ф. Филиппов. «Сборник задач по ДУ»

ДУ с разделяющимися переменными

$$N(x)dx + M(y)dy = 0$$

$$xydx + (x + 1)dy = 0$$

$$\frac{xdx}{x + 1} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x + 1} \right) dx + \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$x - \ln|x + 1| + \ln|y| = C$$

Задача Коши

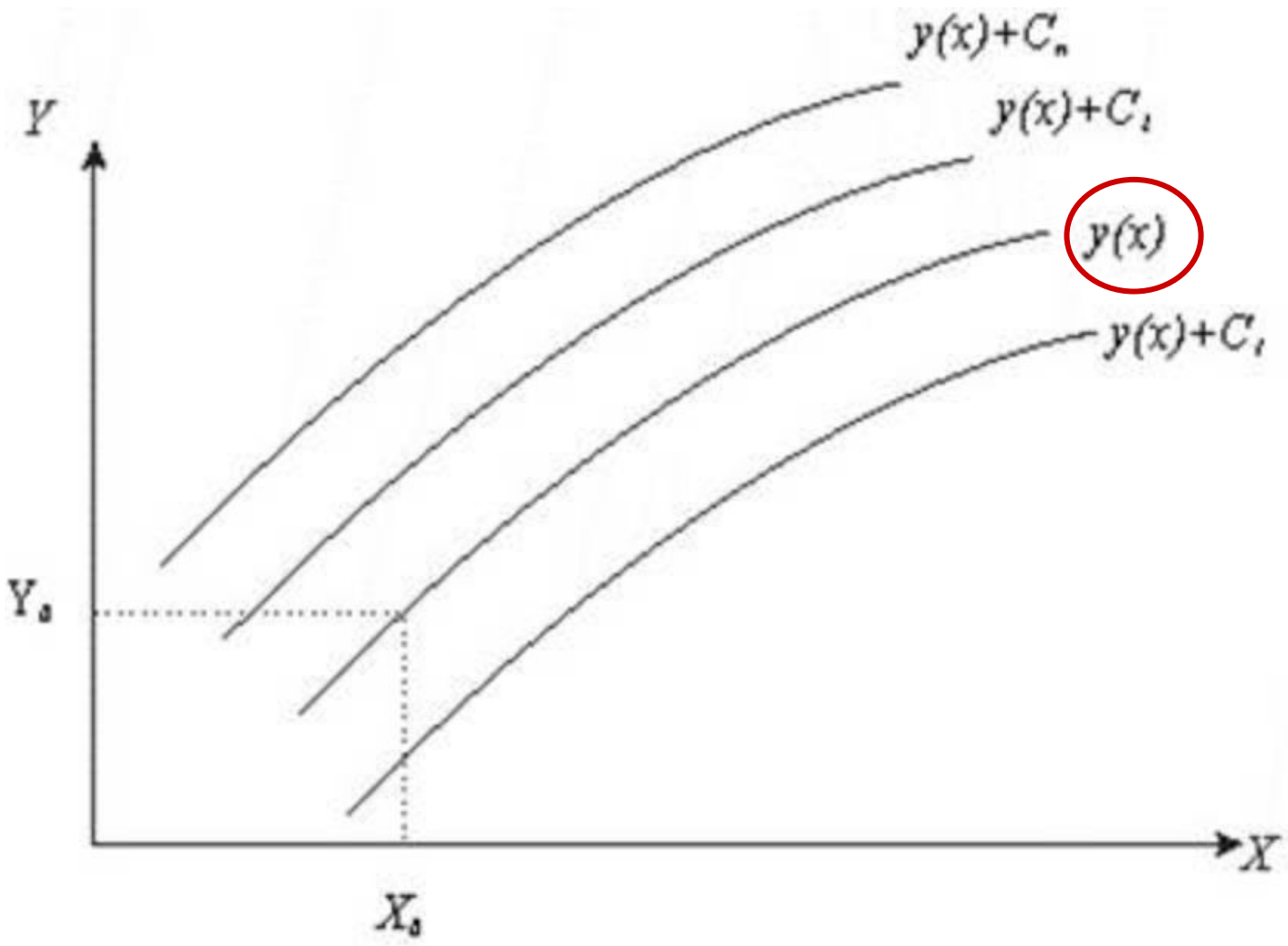
$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$$

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2 - 1} = 0$$

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C \Rightarrow C = -1$$

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2 - 1| + 1$$



$$y' = 1 + \frac{2y}{x}$$

Однородные ДУ

$$(x + 2y)dx - xdy = 0$$

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$$

$$y(x) = x \cdot t(x) \quad \Rightarrow \quad dy = xdt + tdx$$

Как определить, что ДУ однородное и использовать

ЭТОМУ ВИДУ

$$y(x) = x \cdot t(x) \Rightarrow dy = xdt + tdx$$

СМОТРИМ ТУТ

http://mathprofi.ru/odnorodnye_diffury_pervogo_poryadka.html



**Alcohol and calculus
don't mix.
*Never drink and derive.***

©2009 Instant Attitudes

Спасибо!