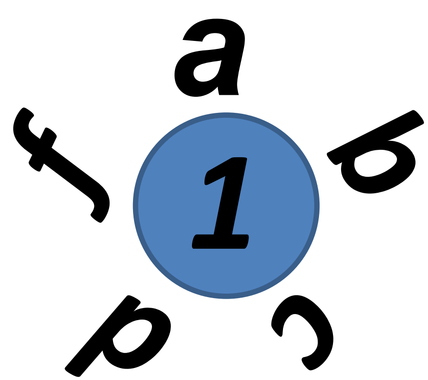
Тайное знание теории групп:

При записи соотношения *слова пишутся по кругу*

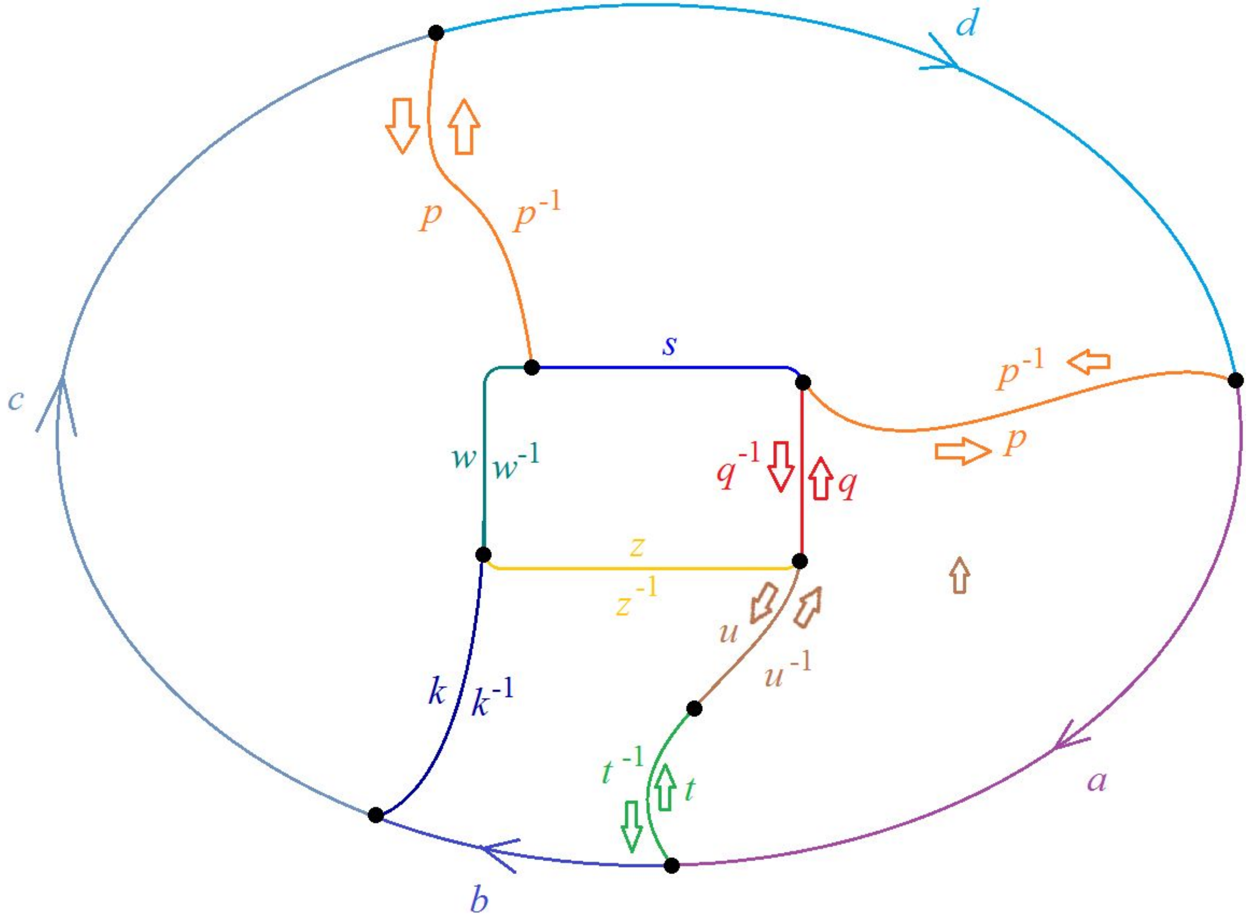
$$abcdf = 1$$



$$ab = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ba = 1$$

Если круг разрезать в любом другом месте, получится равносильное соотношение

Процедура вывода из соотношений !– это выкладывание мозаики



Соотношение сформированное на границе есть следствие внутренних соотношений

Это просто

Если некоторое соотношение $w = 1$ является следствием соотношений $w_i = 1$, то существует диаграмма в которой w написано на границе, а w_i .на клетках

Это сложнее

.Напоминалка

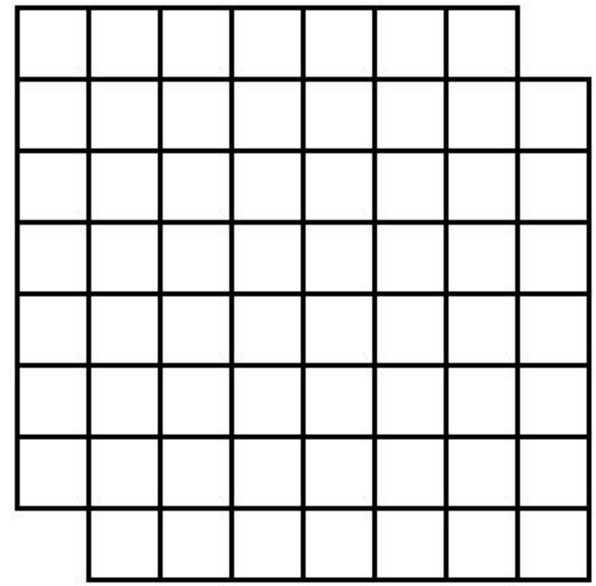
Группой будем называть множество элементов с заданной на нем операцией произведения $*$, удовлетворяющей следующим свойствам:

1. **Ассоциативность.** Для всех a, b, c выполнено $a * (b * c) = (a * b) * c$.
2. **Существование единицы.** Существует элемент e такой, что $ae = ea = a$ выполнено для всех a.
3. **Существование обратного элемента.** Для любого a существует элемент a^{-1}, такой что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Примеры. Множество целых чисел образует группу относительно сложения, обратным элементом является противоположный по знаку. Множество рациональных чисел (но без нуля) образует группу относительно умножения.

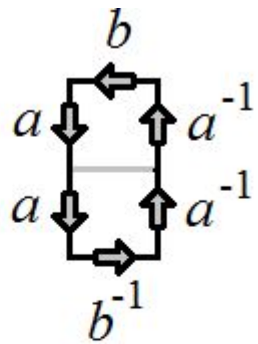
Группа подстановок. Три элемента можно расположить друг за другом шестью различными способами: 213, 321, 132, 312, 231, 123. Фактически, речь идет о преобразованиях трех элементов: можно поменять местами два из них (получится 213, 321 или 132), а можно сместить все три по циклу (получится 312 или 231). Можно также ничего не делать, тогда останется 123. То есть, у нас получается как бы шесть различных «действий». Если применить сначала одно такое действие, а потом — другое, результатом опять будет какое-то действие из этих шести. Например, если сначала поменять местами первые два элемента, а потом сместить все по кругу вправо на одну позицию, то получится $123 \to 213 \to 321$. То есть, все равно, что поменять местами первый и третий элементы. Эти «действия» называются *подстановками*. Они образуют группу относительно операции последовательного применения. В этой группе шесть элементов, единицей является тождественное преобразование 123. Это минимальная группа, где есть элементы a и b, такие что $ab \neq ba$. Можно рассматривать группы подстановок S_n для разных натуральных n.

Вернёмся к богоугодной олимпиадной подготовке



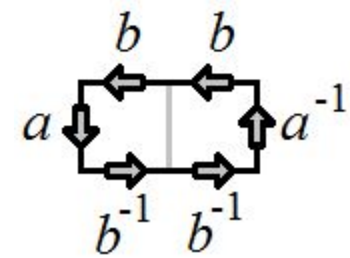
Задача. Из шахматной доски 8×8 удалили два противоположных уголка. Доказать что её не разбить на .доминошки

.Решение



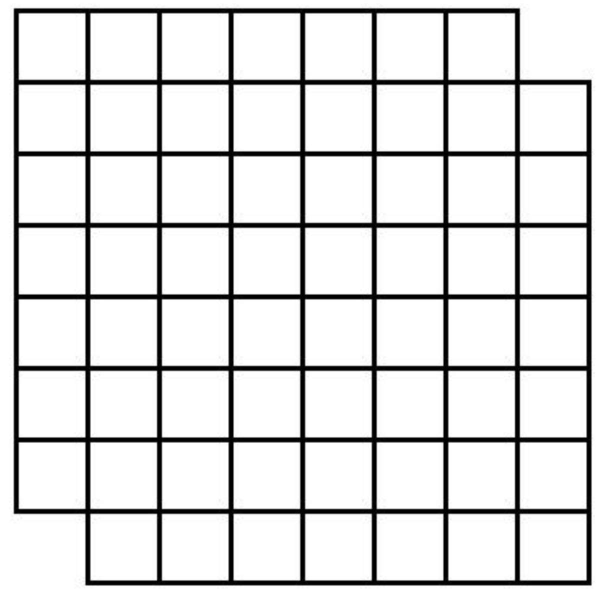
$$\left[a^2, b\right] = 1$$

$$\left[b^2, a\right] = 1$$



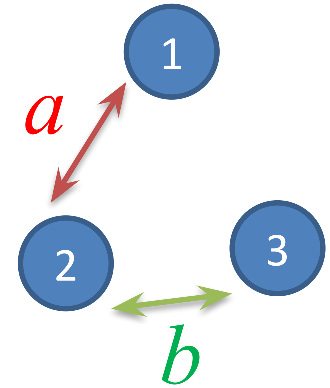
Можно ли вывести из этих соотношений соотношение ?ободка

$$a^7 b^7 a^{-1} b a^{-7} b^{-7} a b^{-1} = 1$$



Если гипотетическое разбиение на доминошки есть, то соотношение !выводится

Однако …



Пусть a транспозиция (1 2)

Пусть b транспозиция (2 3)

аТогд $a^2 = b^2 = 1 = \left[a^2, b\right] = \left[b^2, a\right]$

С другой стороны

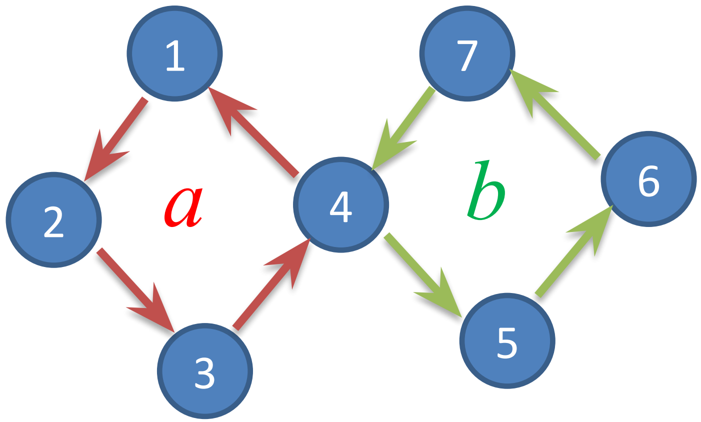
$$a^7 b^7 a^{-1} b a^{-7} b^{-7} a b^{-1} = (ab)^4 = ab \neq 1$$

!А это цикл длины 3

Можно ли разбить квадрат ?10×10 на прямоугольники 1×4

$$\left[b^4, a\right] = 1$$

$$\left[a^4, b\right] = 1$$



$$a^4 = b^4 = 1$$

На ободке 10×10

$$a^{10}b^{10}a^{-10}b^{-10} = a^2b^2a^{-2}b^{-2} \neq 1$$

Упражнение 1. Прямоугольник $m \times k$ замощается прямоугольниками $1 \times n$ $\Leftrightarrow$ m или k делится на n.

Упражнение 2. Квадрат 6×6 нельзя разбить на прямоугольники 1×3 и уголок из трёх клеток.

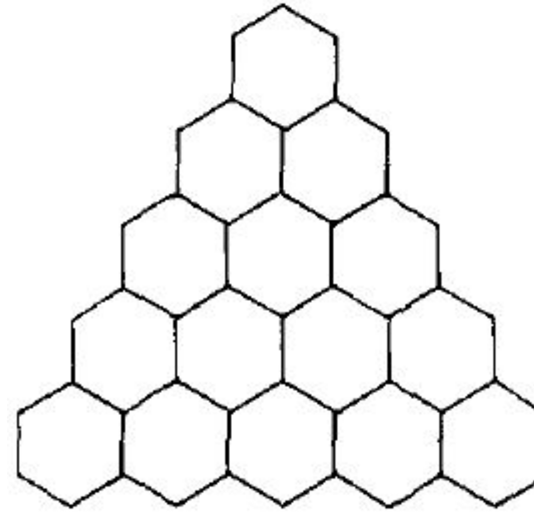
Возражение: это стрельба из !пушки по воробьям

!стрельбы Ответ: у нас учебные

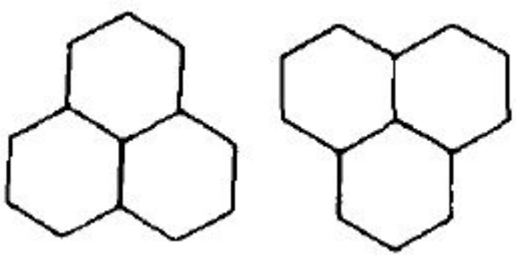
Утверждение. Всё, что решается раскрасками, решается и группами. Но не .наоборот

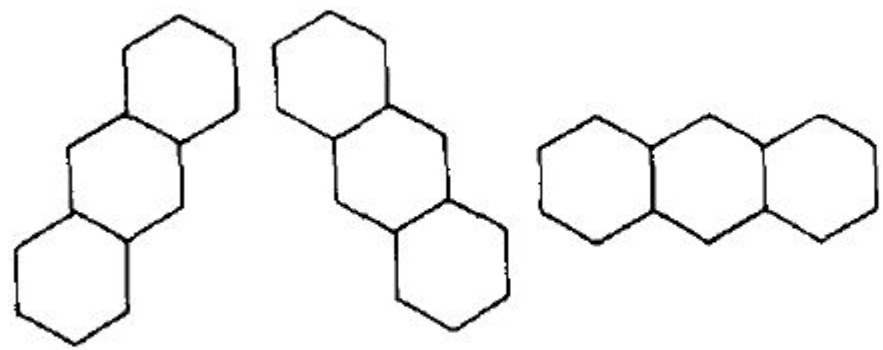
Задача. Решите вашу любимую «раскрасочную» задачу о невозможности замощения через .группы

Треугольник T_5



Можно попробовать замостить T_n





треугольничками   или палочками

Подсказка: рассмотрите группу
с образующими A, B
и соотношениями $A^3 = B^3 = \left(B^{-1}A\right)^3 = 1$

Задача 1. T_n замощается T_2 $\Leftrightarrow$ $n = 1,2,9,11 \; mod \; 12$

.**Задача 2.** T_n не замощается палочками

Допустим, что мы можем класть плитки из

в вещества или антивещества. Можно ли замостить

этом случае так, чтобы после аннигиляции каждая

клетка была покрыта ровно по разу?

Задача 1′. T_n замощается T_2 (с возможным

использованием антивещества) $\Leftrightarrow$ $n \neq 1 \; mod \; 3$.

возможным **Задача 2′.** T_n замощается палочками (с

использованием антивещества) $\Leftrightarrow$ $n = 0$ или $8 \; mod$

$.9$

Вывод. Не всё что делается некоммутативными группами, сделается !раскраской

Задача 3. Фигуру F нельзя покрыть плитками P и их антиплитками тогда и только тогда когда в клетках F можно расставить числа так, чтобы сумма чисел под каждой плиткой была бы нулевой, а глобальная сумма – нет.

Задача 4. Докажите, что прямоугольник 5×7 нельзя покрыть уголками из трёх клеток так чтобы каждая клетка была бы покрыта в одинаковое число слоёв.

Задача 5. Докажите, что прямоугольник $m \times n$ нельзя покрыть плитками P так, чтобы каждая клетка была
покрыта в одинаковое число слоёв, тогда и только тогда, когда можно расставить числа в клетках так, чтобы глобальная сумма была бы положительна, а сумма чисел под каждой плиткой – отрицательна.

Задача 6. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если 2 хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

Докажите, что для проверки возможности перехода достаточно совпадения попарных разностей количеств хамелеонов разных цветов по модулю 3.

Задача 7. По кругу стоят 44 дерева, на каждом - по чижу. За каждую секунду один чиж смещается по часовой стрелке на 1, а другой - против.

Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

Когда из одного расположения чижей можно перейти к другому?

Задача 8. В клетках квадратной таблицы $m \times m$ расставлены плюсы и минусы. Известно, что в каждом подквадратике 2 на 2 стоит четное число плюсов. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что все знаки можно сделать плюсами.

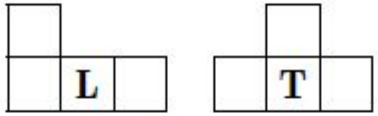
Задача 9. На табло стоят лампочки, каждая кнопка соединена с некоторыми из них. Нажатие кнопки меняет состояние соединенных с ней лампочек на противоположные. Известно, что для каждого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из данного набора.
Докажите, что все лампочки можно погасить.

Задача 10. На табло стоят лампочки, каждая кнопка соединена с некоторыми из них. Нажатие кнопки меняет состояние соединенных с ней лампочек на противоположные. Назовем **инвариантом** такой набор лампочек, что каждая кнопка, соединена с четным числом лампочек из данного набора.
Докажите, что если изначально в каждом инварианте горит четное число лампочек, то все лампочки можно погасить.

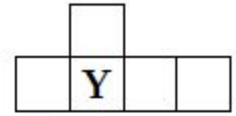
Задача 11. (а) Можно ли круг разрезать на несколько частей и сложить квадрат?
(Разрезы – это прямые и дуги окружностей) .

(б) Когда одну фигуру можно перекроить в другую?
(Разрезы и участки границы – это прямые и дуги окружностей) .

Задача 12. Когда один многоугольник можно **параллельно перекроить** в другой?
(Кусочки можно параллельно переносить, но НЕ ПОВОРАЧИВАТЬ)



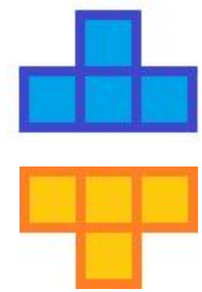
L- и T-тетрамино



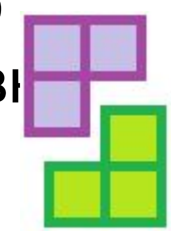
и Y-пентамино.

Задача 13. При каких m и n прямоугольник m×n можно разбить на
(а) L-тетрамино,
(б) T-тетрамино,
(в) Y-пентамино?

Задача 14. Прямоугольник разбит на T-тетрамино. Докажите что количество смотрящих вверх равно количеству смотрящих вниз?



Задача 15. Квадрат 6×6 разбит на тримино: палочки и уголки из трёх клеток. Докажите что количество уголков в любом направлении равн количеству уголком в противоположном направлении.



Для дальнейшего чтения:

https://www.turgor.ru/lktg/1996/lktg1996.pdf страницы 48-50

https://www.turgor.ru/lktg/2009/4/index.php

https://www.turgor.ru/lktg/2006/2/index.htm

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316590900574 (Конвей, Лагариас)

http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=7278