Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ

Основные понятия и определения графа и его элементов.

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик Денни Кёниг. Но первая работа по теории графов принадлежала перу великого Леонарда Эйлера и была написана еще в 1736 г.

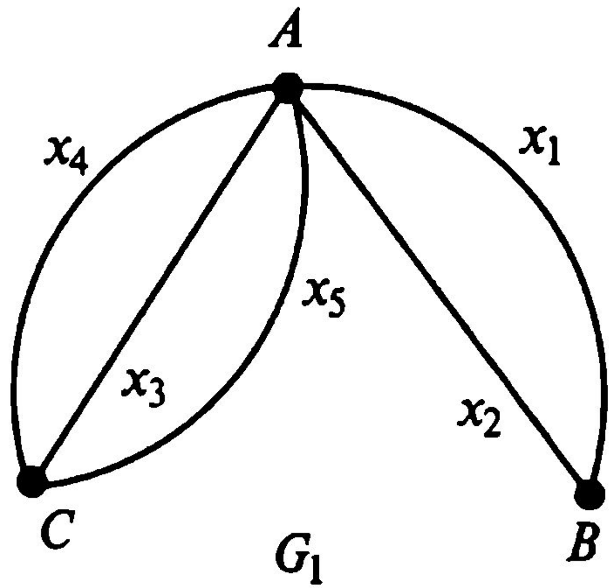
С помощью графов изображаются схемы различных дорог, линии воздушных сообщений, газопроводов, теплотрасс, электросетей, а также микросхемы, дискретные многошаговые процессы, системы различных бинарных отношений, химические структурные формулы и другие диаграммы и схемы.

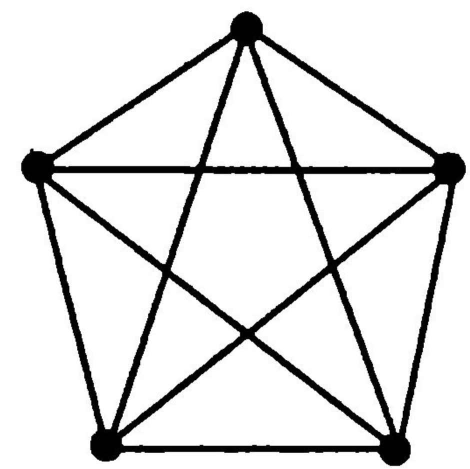
Без графов сложно анализировать классификации в различных науках.

Графом G = (V, X) называется пара двух конечных множеств: множество точек и множество линий, соединяющих некоторые пары точек

Точки называются *вершинами*, или *узлами*, графа, линии — *ребрами графа*.

<u>**Примеры графов:**</u>

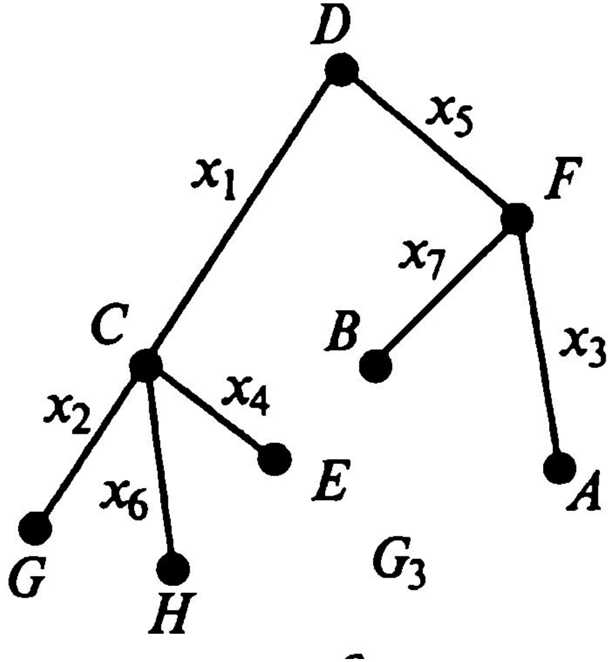


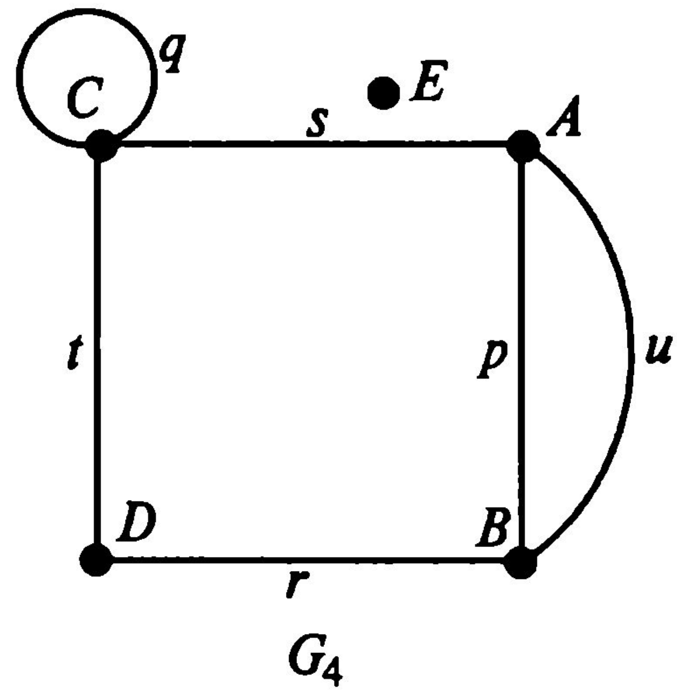


со смежными вершинами

полный

Примеры графов:





со смежными ребрами

с петлей

Пусть дан граф G = (V, X), где V = {V, W, ...} — конечное непустое множество его вершин, X(V, W) — его ребра.

Если ребро графа G соединяет две его вершины V и W (т.е. (V, W) $\in$ X), то говорят, что это ребро им *инцидентно*.

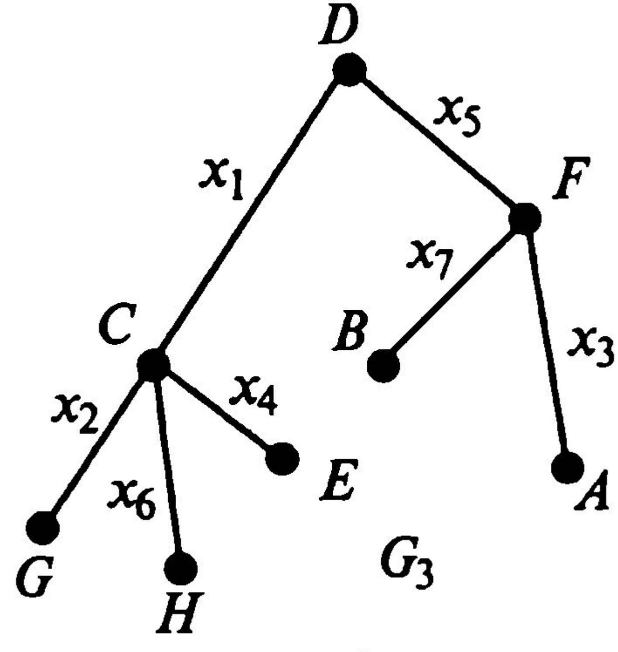
Две вершины графа называются *смежными*, если существует инцидентное им ребро.

Если граф G имеет ребро X(V, К), у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется *петлей*.

Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Записать:

смежные вершины:

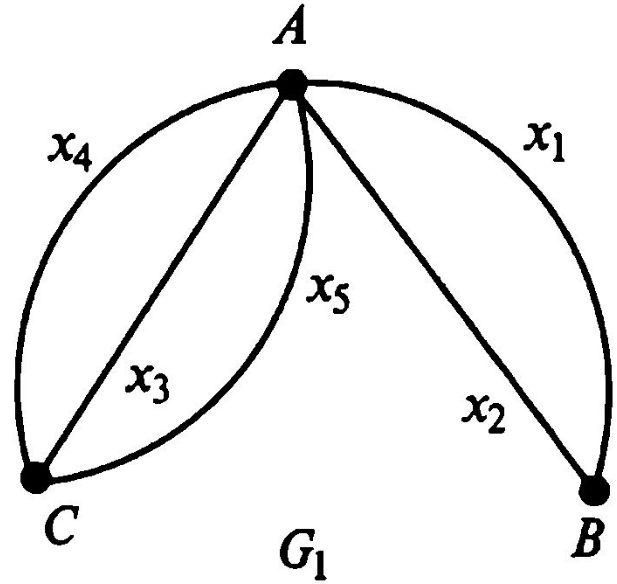


смежные ребра:

Граф G (V, X) может иметь ребра с одинаковыми парами вида X(V, W). Такие ребра называются *кратными*, или *параллельными*.

На рис. кратными являются , x_1(A,B) и x_2(A,B).

Вершинам A и B инцидентны ребра x_1, x_2. Количество одинаковых пар вида x(V,W) называется *кратностью* реб



На рис. ребро AC имеет кратность, равную 3, а ребро AB — кратность, равную 2.

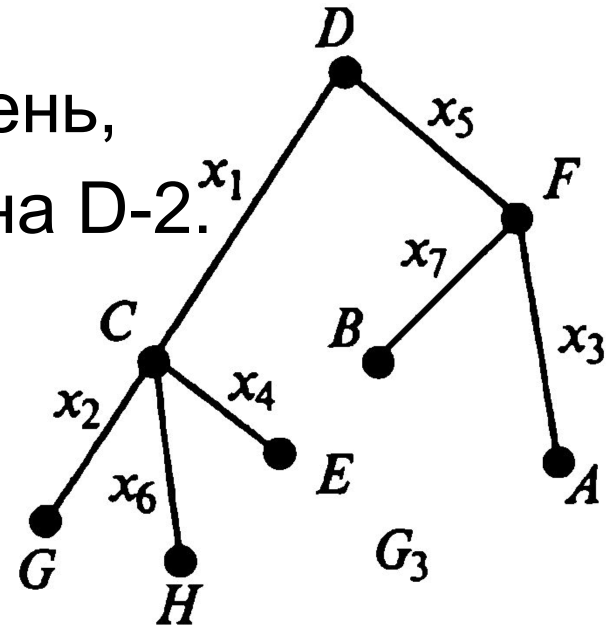
Число ребер, инцидентных вершине А, называется *степенью* этой вершины и обозначается deg(A) (от англ. degree — степень).

Если вершине инцидентна петля, она дает вклад в степень, равный двум, так как оба конца приходят в эту вершину.

На рис. вершина А имеет степень, равную 1, вершина С-4,вершина D-2. Записывается это в виде:

deg (A) = 1, deg (C) = 4,

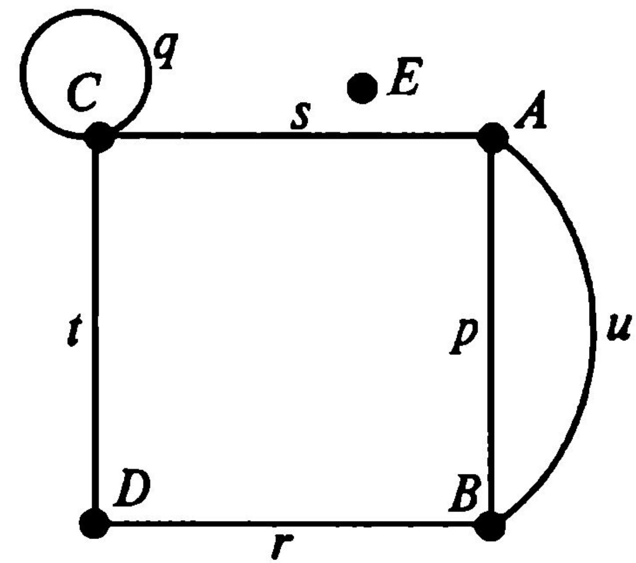
deg (D) = 2.



Граф G4 содержит четыре вершины:

V= (A,B, C, D)

и шесть ребер X= {p, q, r, s, t, и}.



G_4

Записать, чему равна

степень вершин:

deg (A) =

deg (B) =

deg (C) =

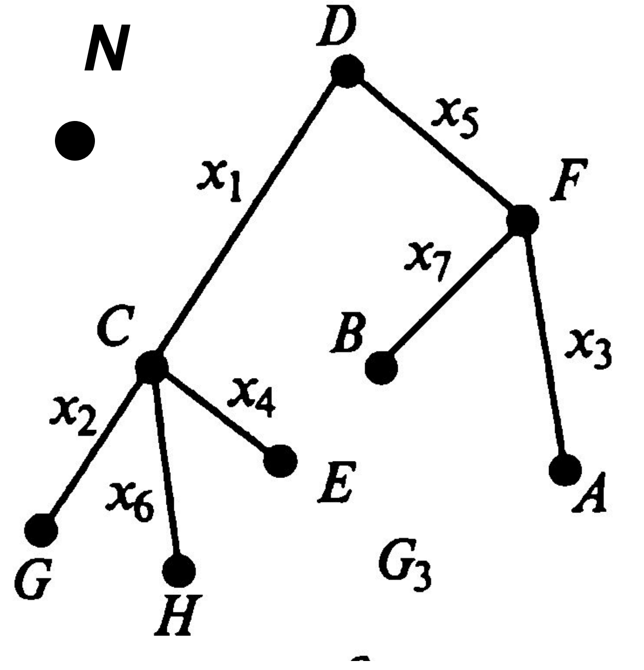
deg (D) =

Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется *изолированной*.

Граф, состоящий из изолированных вершин, называется *нуль-графом*. Для нуль-графа X= 0.

Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется *висячей*.

На рисунке:
вершины A, B, E, G, H
— висячие,
вершина N – изолированна
deg (N) = 0



Теорема 2.1.

В графе G(V,X) сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m,$$

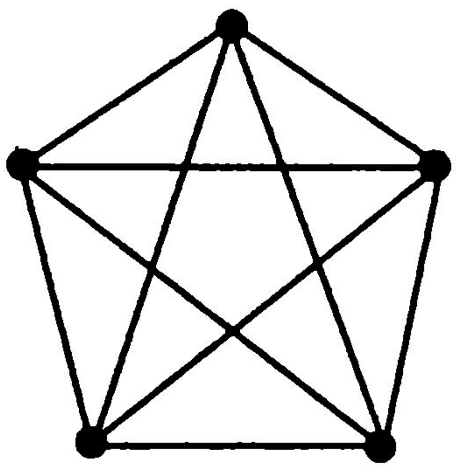
где n = |V| — число вершин; m = |X| — число ребер графа.

Вершина называется *четной (нечетной)*, если ее степень – *четное (нечетное)* число.

Теорема 2.2. Число нечетных вершин любого графа — четно.

Следствие. Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

Граф G называется *полным*, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром.

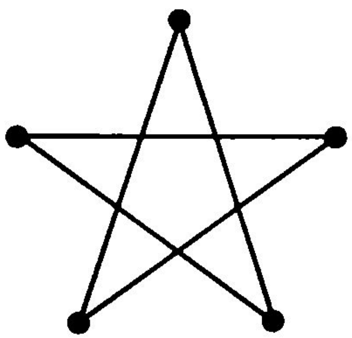


Таким образом, полный граф определяется только своими вершинами.

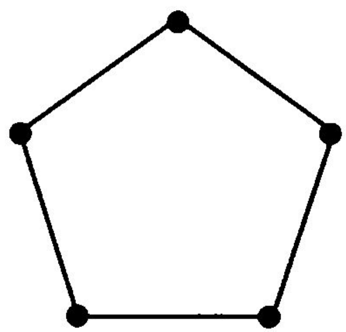
Пусть число вершин полного графа n. Тогда степень любой вершины, очевидно, равна deg(V) = n - 1, а число ребер равно числу сочетаний из n по 2, т.е. $m = C_n^2$.

Дополнением графа G(V, X) называется граф $\overline{G}(V, X')$ с теми же вершинами V, что и граф G, и имеющий те и только те ребра X’, которые необходимо добавить к графу G, чтобы он стал полным.

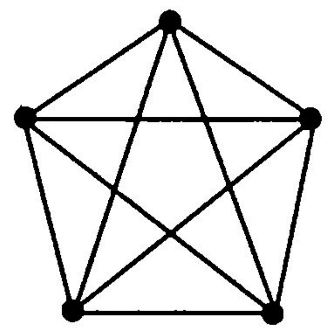
Очевидно, что граф с кратными ребрами не имеет дополнения. Например:



G_5



$\overline{G}_5$



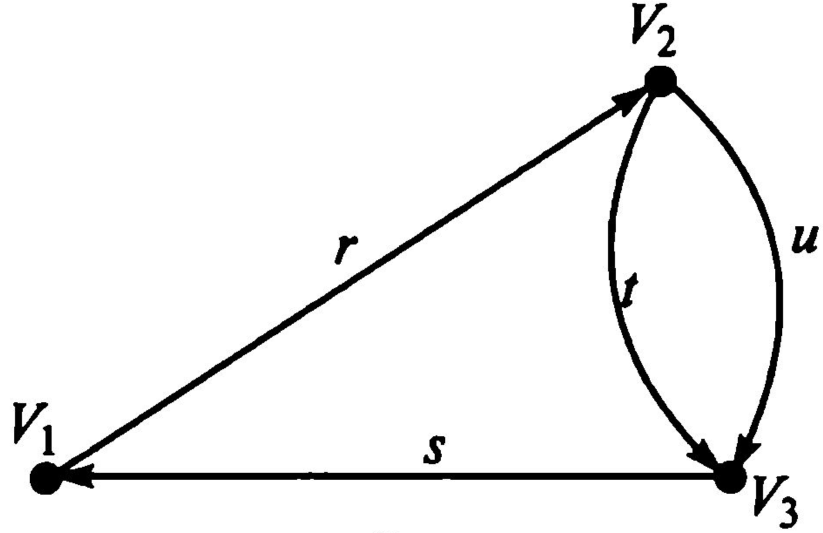
G_2

Дополнение $\overline{G}_5$ графа G_5 до графа G_2,

Очевидно, что дополнением полного графа будет нуль-граф, и наоборот.

Если все пары (V_i ,V_j) во множестве X являются упорядоченными, т.е. кортежами длины 2, то граф называется *ориентированным*, *орграфом*, или *направленным*.

В таком случае ребра принято изображать стрелками.



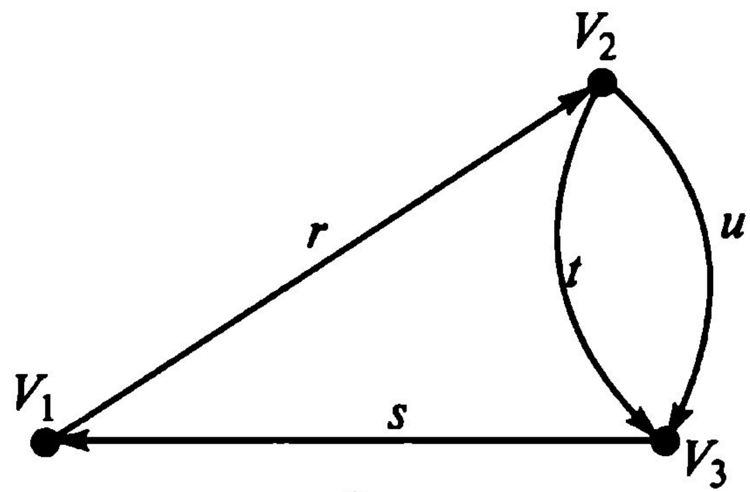
G_6

Началом ребра называется вершина, указанная в кортеже первой, *концом* — вторая вершина этой пары (графически она указана стрелкой).

Ребра ориентированного графа имеют определенные фиксированные начало и конец и называются *дугами*.

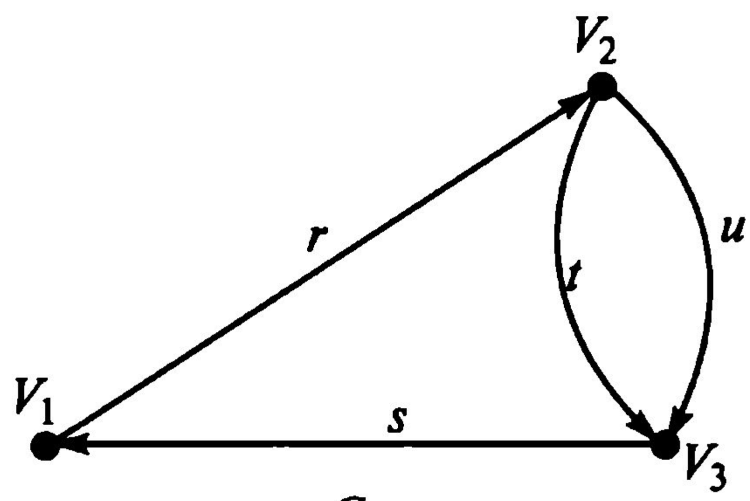
Степенью $\dfrac{\textbf{входа}}{\textbf{выхода}}$ вершины ориентированного графа называется число ребер, для которых эта вершина является $\dfrac{\text{концом}}{\text{началом}}$.

Степень входа вершины V будем обозначать $\deg_+(V)$, а степень выхода — $\deg_-(V)$. На рис. 2.3 $\deg_+(V_1) = 1$, $\deg_+(V_2) = 1$, $\deg_+(V_3) = 2$, $\deg_-(V_1) = 1$, $\deg_-(V_2) = 2$, $\deg_-(V_3) = 1$.



G_6

Дуги орграфа называются *кратными*, если они имеют одинаковые начальные и конечные вершины, т.е. одинаковые направления. Например, кратны дуги $u(V_2, V_3)$ и $t(V_2, V_3)$



G_6

Последовательность попарно инцидентных вершин V_{i1} ,V_{i2}, ..., V_{ik} неориентированного графа, т.е. последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется *маршрутом*.

Число ребер маршрута называется *длиной маршрута.*

Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется *замкнутым* или *циклом*.

Расстоянием между двумя вершинами называется минимальная длина из всех возможных маршрутов между этими вершинами при условии, что существует хотя бы один такой м

Обозначается как d(V_1V_2) (от лат. distantio — расстояние) d(V_1V_2) = min| V_1…..V_2 |.

В маршруте одно и то же ребро может встретиться несколько раз. Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется *цепью*.

В орграфе маршрут является ориентированным и называется *путем*. На путь сразу налагаются важные требования, являющиеся частью определения:

• направление каждой дуги должно совпадать с направлением пути;

• ни одно ребро пути не должно встречаться дважды.

Другими словами, *путь* — упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.