

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ

Основные понятия и определения
графа и его элементов.

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик Денни Кёниг. Но первая работа по теории графов принадлежала перу великого Леонарда Эйлера и была написана еще в 1736 г.

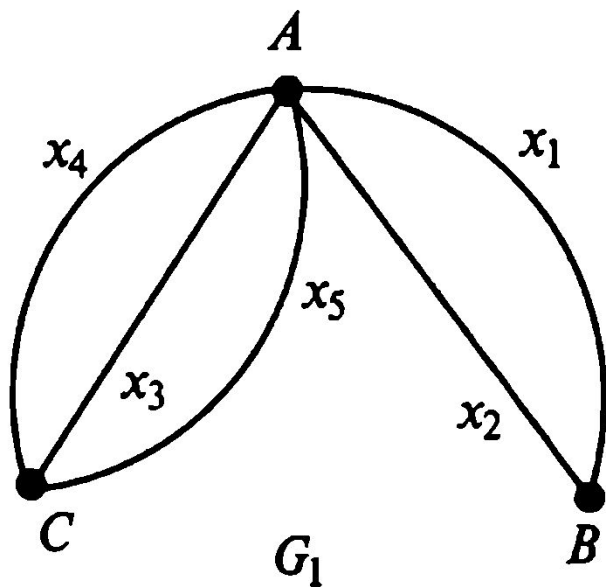
С помощью графов изображаются схемы различных дорог, линии воздушных сообщений, газопроводов, теплотрасс, электросетей, а также микросхемы, дискретные многошаговые процессы, системы различных бинарных отношений, химические структурные формулы и другие диаграммы и схемы.

Без графов сложно анализировать классификации в различных науках.

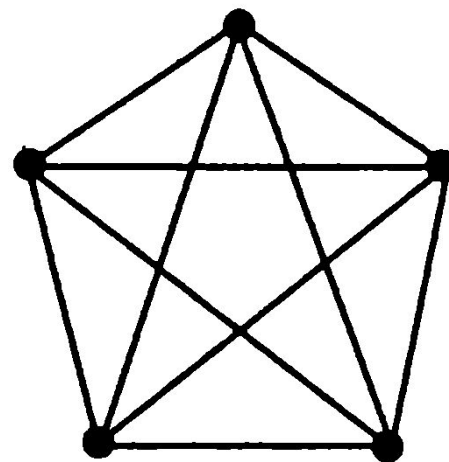
Графом $G = (V, X)$ называется пара двух конечных множеств: множество точек и множество линий, соединяющих некоторые пары точек

Точки называются *вершинами*, или *узлами*, графа, линии — *ребрами графа*.

Примеры графов:

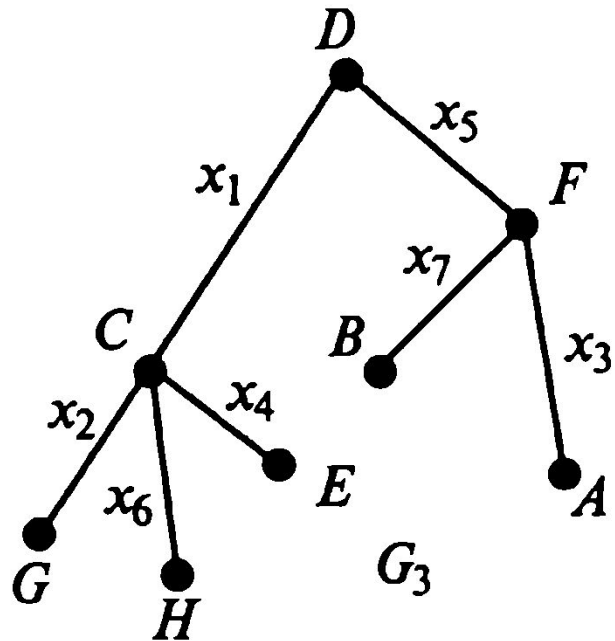


со смежными вершинами

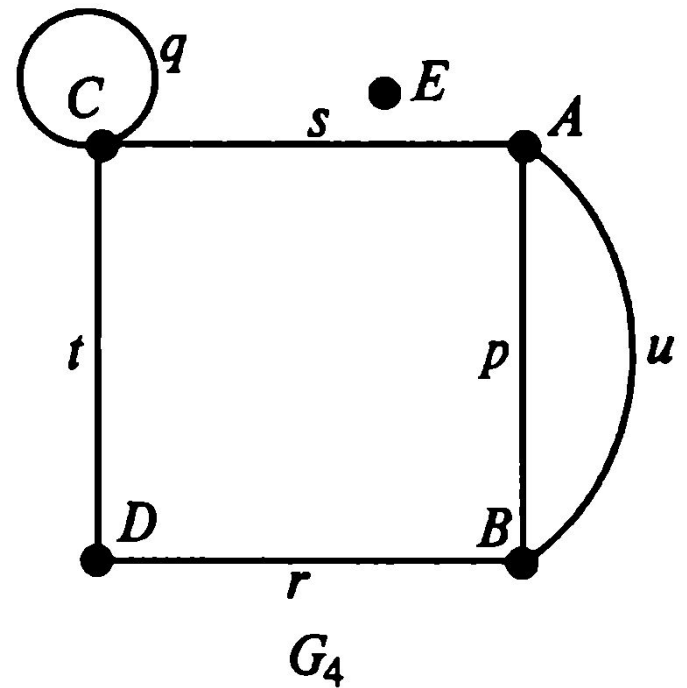


ПОЛНЫЙ

Примеры графов:



со смежными ребрами



с петлей

Пусть дан граф $G = (V, X)$, где $V = \{V, W, \dots\}$ — конечное непустое множество его вершин, $X(V, W)$ — его ребра.

Если ребро графа G соединяет две его вершины V и W (т.е. $(V, W) \in X$), то говорят, что это ребро им *инцидентно*.

Две вершины графа называются *смежными*, если существует инцидентное им ребро.

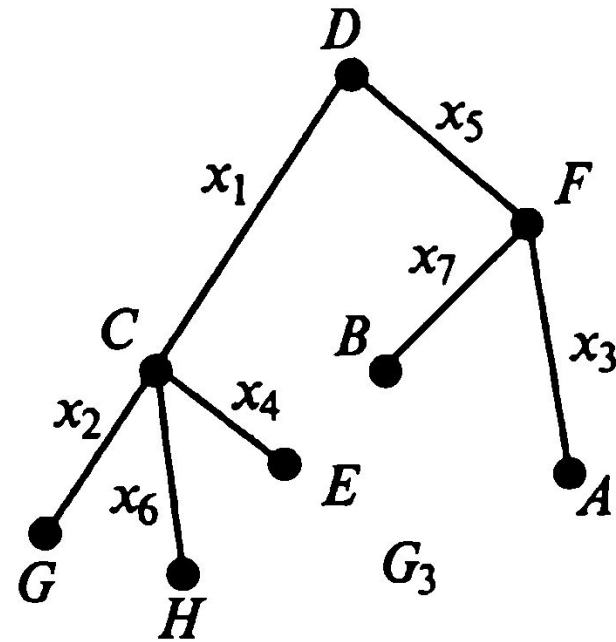
Если граф G имеет ребро $X(V, K)$, у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется *петлей*.

Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Записать:

смежные вершины:

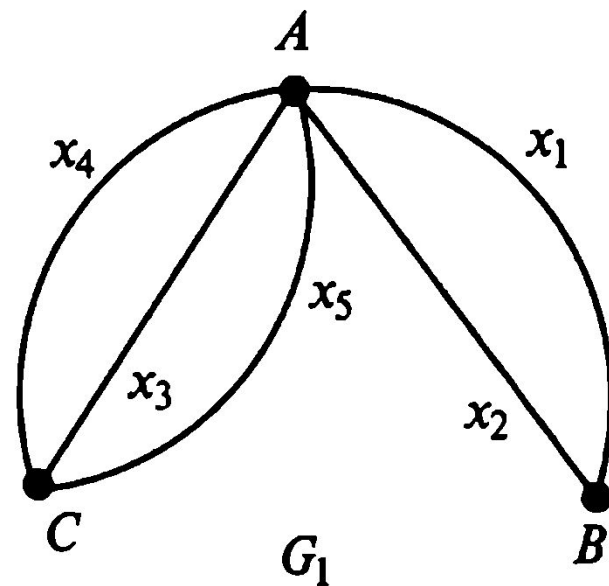
смежные ребра:



Граф $G (V, X)$ может иметь ребра с одинаковыми парами вида $X(V, W)$. Такие ребра называются *кратными*, или *параллельными*.

На рис. кратными являются , $x_1(A, B)$ и $x_2(A, B)$.

Вершинам A и B инцидентны ребра x_1, x_2 . Количество одинаковых пар вида $x(V, W)$ называется *кратностью* реб



На рис. ребро AC имеет кратность, равную 3, а ребро AB — кратность, равную 2.

Число ребер, инцидентных вершине A , называется **степенью** этой вершины и обозначается $\deg(A)$ (от англ. degree — степень).

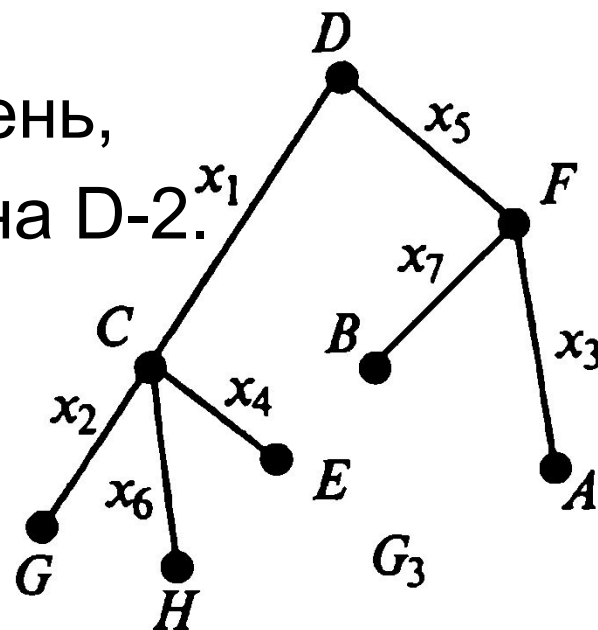
Если вершине инцидентна петля, она дает вклад в степень, равный двум, так как оба конца приходят в эту вершину.

На рис. вершина A имеет степень, равную 1, вершина C — 4, вершина D — 2.

Записывается это в виде:

$$\deg(A) = 1, \deg(C) = 4,$$

$$\deg(D) = 2.$$



Граф G_4 содержит четыре вершины:

$V = (A, B, C, D)$

и шесть ребер $X = \{p, q, r, s, t, u\}$.

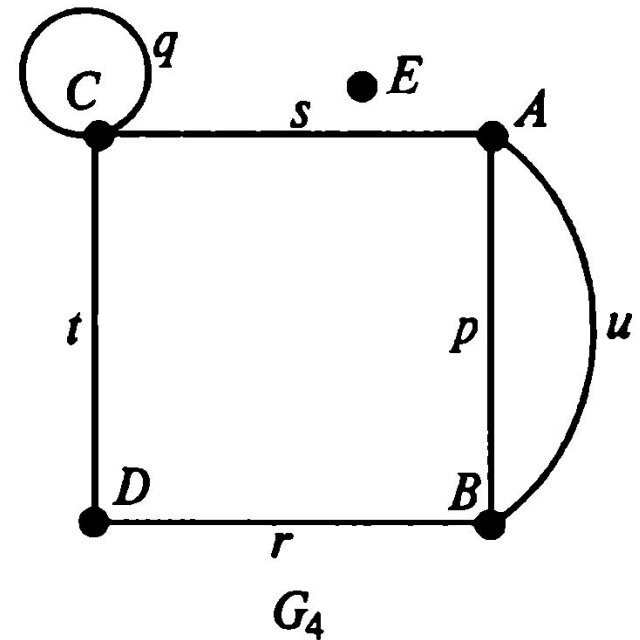
Записать, чему равна
степень вершин:

$\deg(A) =$

$\deg(B) =$

$\deg(C) =$

$\deg(D) =$



Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется *изолированной*.

Граф, состоящий из изолированных вершин, называется *нуль-графом*. Для нуль-графа $X = 0$.

Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется *висячей*.

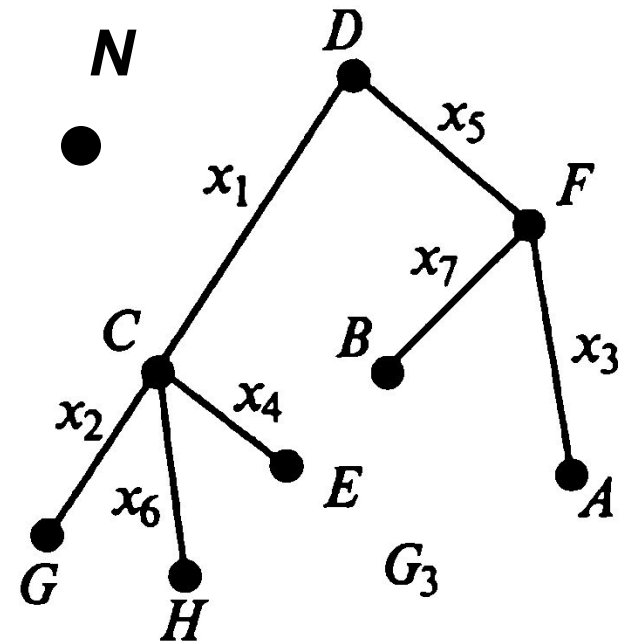
На рисунке:

вершины A, B, E, G, H

— висячие,

вершина N — изолированная

$\deg(N) = 0$



Теорема 2.1.

В графе $G(V, X)$ сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа:

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2m,$$

где $n = |V|$ — число вершин; $m = |X|$ — число ребер графа.

Вершина называется *четной (нечетной)*, если ее степень — *четное (нечетное)* число.

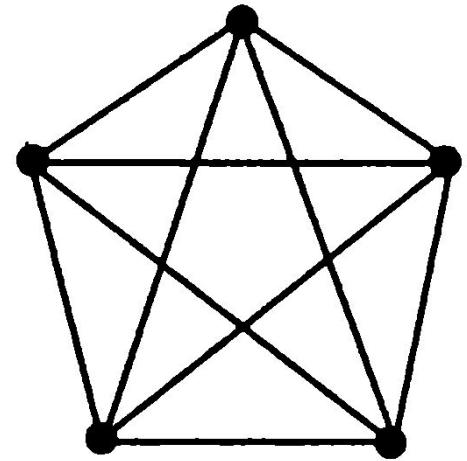
Теорема 2.2. Число нечетных вершин любого графа — четно.

Следствие. Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

Граф G называется *полным*, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром.

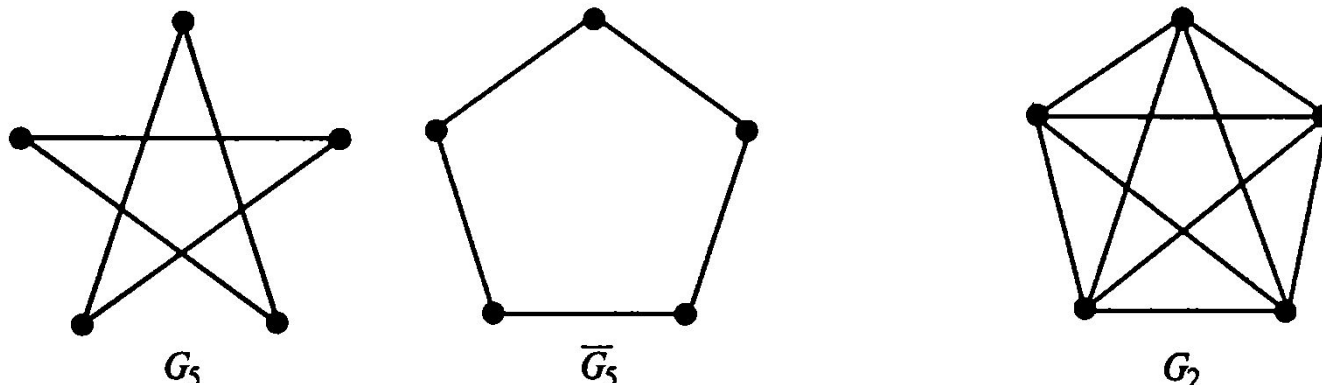
Таким образом, полный граф определяется только своими вершинами.

Пусть число вершин полного графа n . Тогда степень любой вершины, очевидно, равна $\deg(V) = n - 1$, а число ребер равно числу сочетаний из n по 2, т.е. $m = C_n^2$.



Дополнением графа $G(V, X)$ называется граф $\bar{G}(V, X')$ с теми же вершинами V , что и граф G , и имеющий те и только те ребра X' , которые необходимо добавить к графу G , чтобы он стал полным.

Очевидно, что граф с кратными ребрами не имеет дополнения. Например:

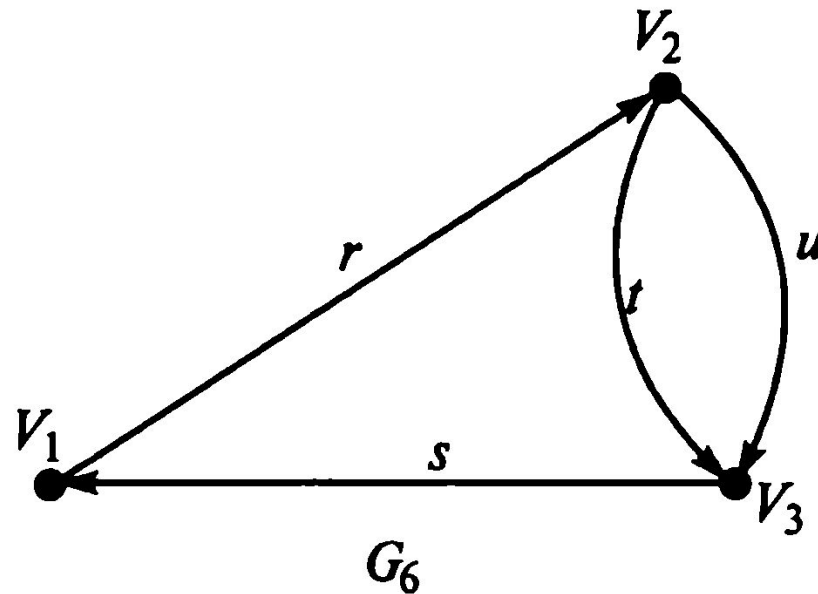


Дополнение \bar{G}_5 графа G_5 до графа G_2 ,

Очевидно, что дополнением полного графа будет нуль-граф, и наоборот.

Если все пары (V_i, V_j) во множестве X являются упорядоченными, т.е. кортежами длины 2, то граф называется **ориентированным, орграфом**, или **направленным**.

В таком случае ребра принято изображать стрелками.

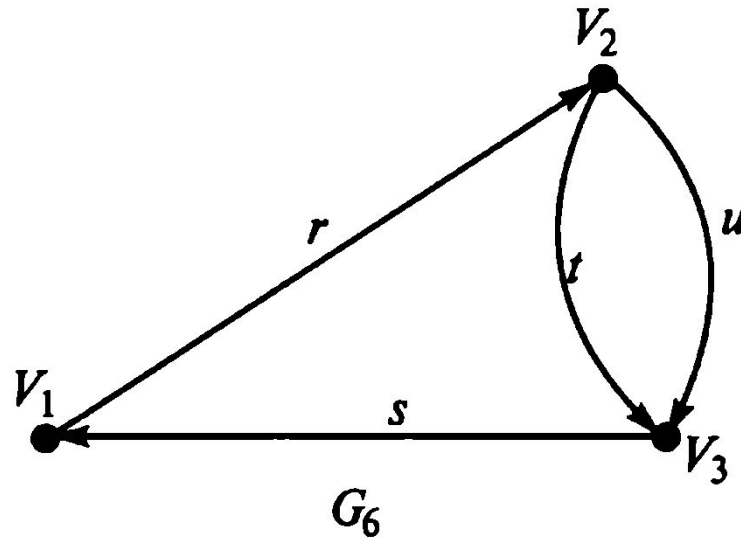


Началом ребра называется вершина, указанная в кортеже первой, *КОНЦОМ* — вторая вершина этой пары (графически она указана стрелкой).

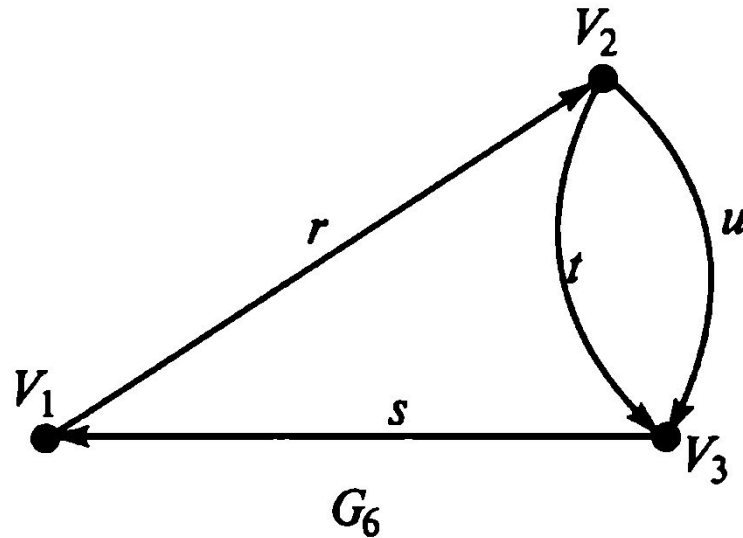
Ребра ориентированного графа имеют определенные фиксированные начало и конец и называются *дугами*.

Степенью $\frac{\text{входа}}{\text{выхода}}$ вершины ориентированного графа называется число ребер, для которых эта вершина является $\frac{\text{концом}}{\text{началом}}$.

Степень входа вершины V будем обозначать $\text{deg}_+(V)$, а степень выхода — $\text{deg}_-(V)$. На рис. 2.3 $\text{deg}_+(V_1) = 1$, $\text{deg}_+(V_2) = 1$, $\text{deg}_+(V_3) = 2$, $\text{deg}_-(V_1) = 1$, $\text{deg}_-(V_2) = 2$, $\text{deg}_-(V_3) = 1$.



Дуги орграфа называются *кратными*, если они имеют одинаковые начальные и конечные вершины, т.е. одинаковые направления. Например, кратны дуги $u(V_2, V_3)$ и $t(V_2, V_3)$



Последовательность попарно инцидентных вершин $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_k}$ неориентированного графа, т.е. последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется *маршрутом*.

Число ребер маршрута называется *длиной маршрута*.

Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется *замкнутым* или *циклом*.

Расстоянием между двумя вершинами называется минимальная длина из всех возможных маршрутов между этими вершинами при условии, что существует хотя бы один такой маршрут

Обозначается как $d(V_1, V_2)$ (от лат. distantio — расстояние) $d(V_1, V_2) = \min |V_1 \dots V_2|$.

В маршруте одно и то же ребро может встретиться несколько раз. Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется *цепью*.

В орграфе маршрут является ориентированным и называется *путем*. На путь сразу налагаются важные требования, являющиеся частью определения:

- направление каждой дуги должно совпадать с направлением пути;
- ни одно ребро пути не должно встречаться дважды.

Другими словами, *путь* — упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.