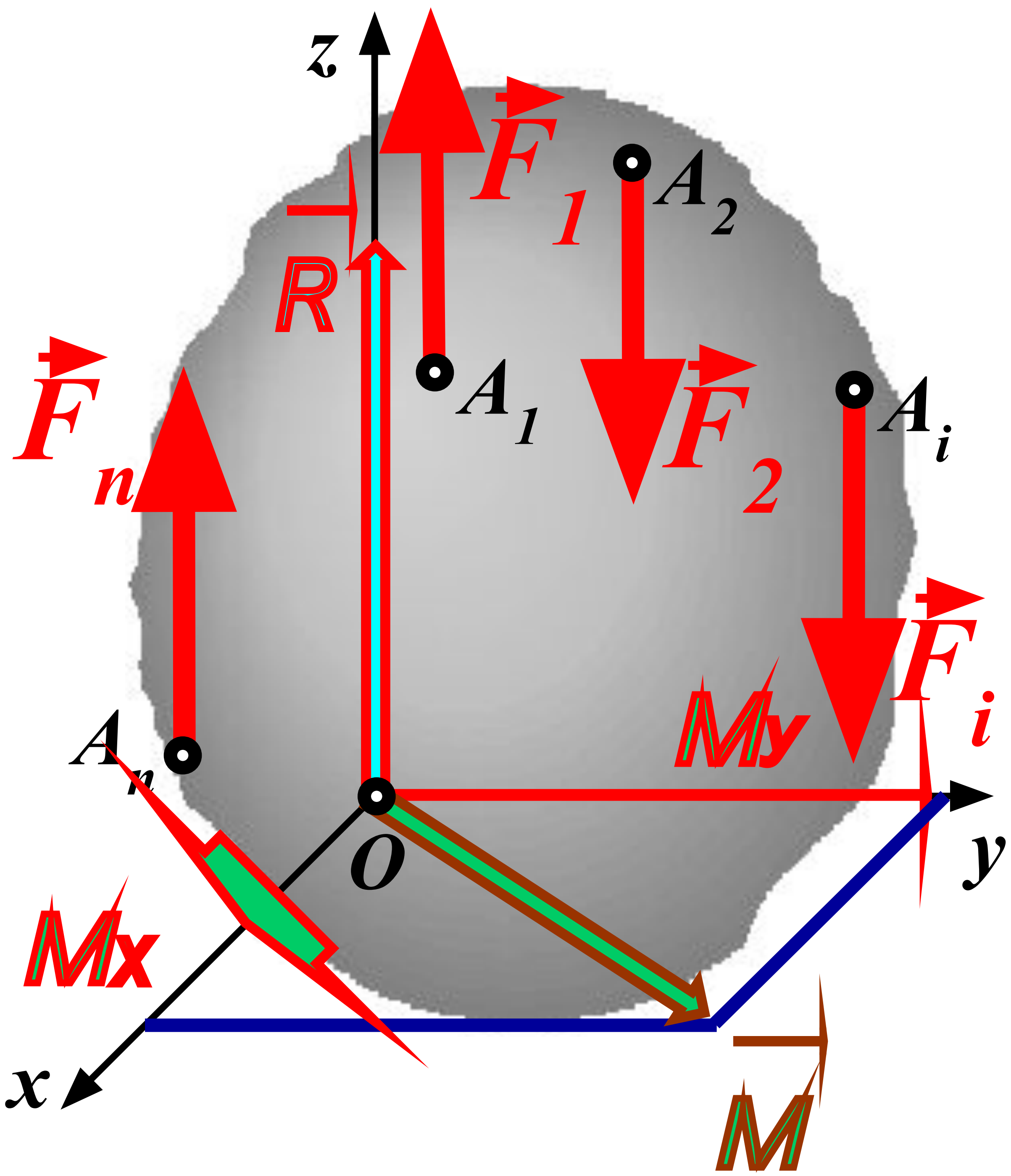
Центр тяжести

1. Пространственная система параллельных сил

1.1. Приведение к простейшей. Условия равновесия



Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно равенства нулю проекций всех сил на ось, параллельную силам и равенства нулю алгебраических сумм моментов относительно координатных осей, непараллельных силам системы

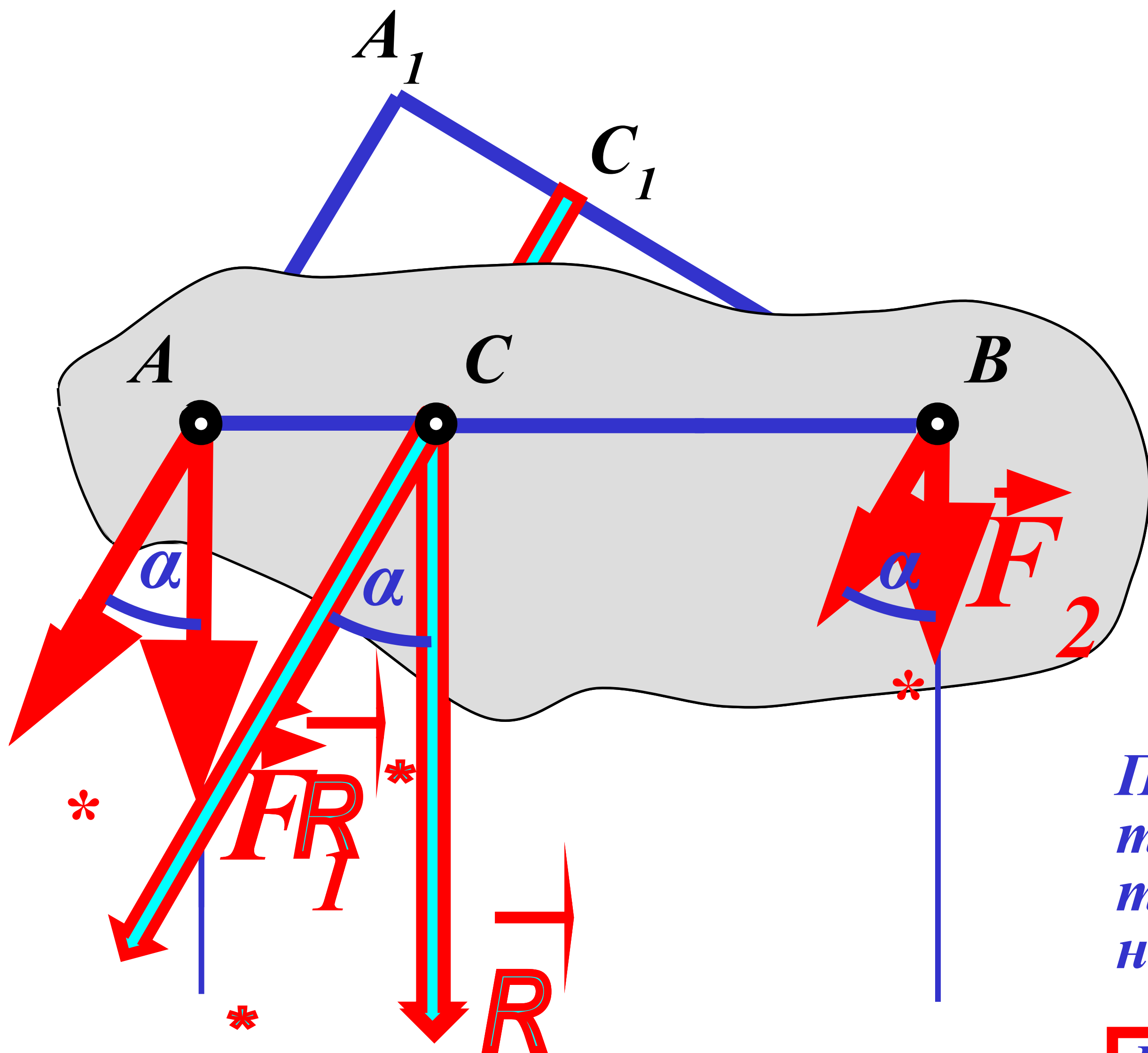
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \equiv 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \equiv 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) \equiv 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0;$$

Центр тяжести

1. Пространственная система параллельных сил

1.2. Центр системы параллельных сил



$$\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\right\} \in \left\{\vec{R}\right\}; \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$R = F_1 + F_2; \quad AC/BC = F_2/F_1;$$

$$\left\{\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*\right\} \in \left\{\vec{R}^*\right\}; \quad \vec{R}^* = \vec{F}_1^* + \vec{F}_2^*;$$

$$R^* = F_1^* + F_2^* = F_1 + F_2 = R;$$

$$A_1C_1/BC_1 = F_2^*/F_1^* = F_2/F_1;$$

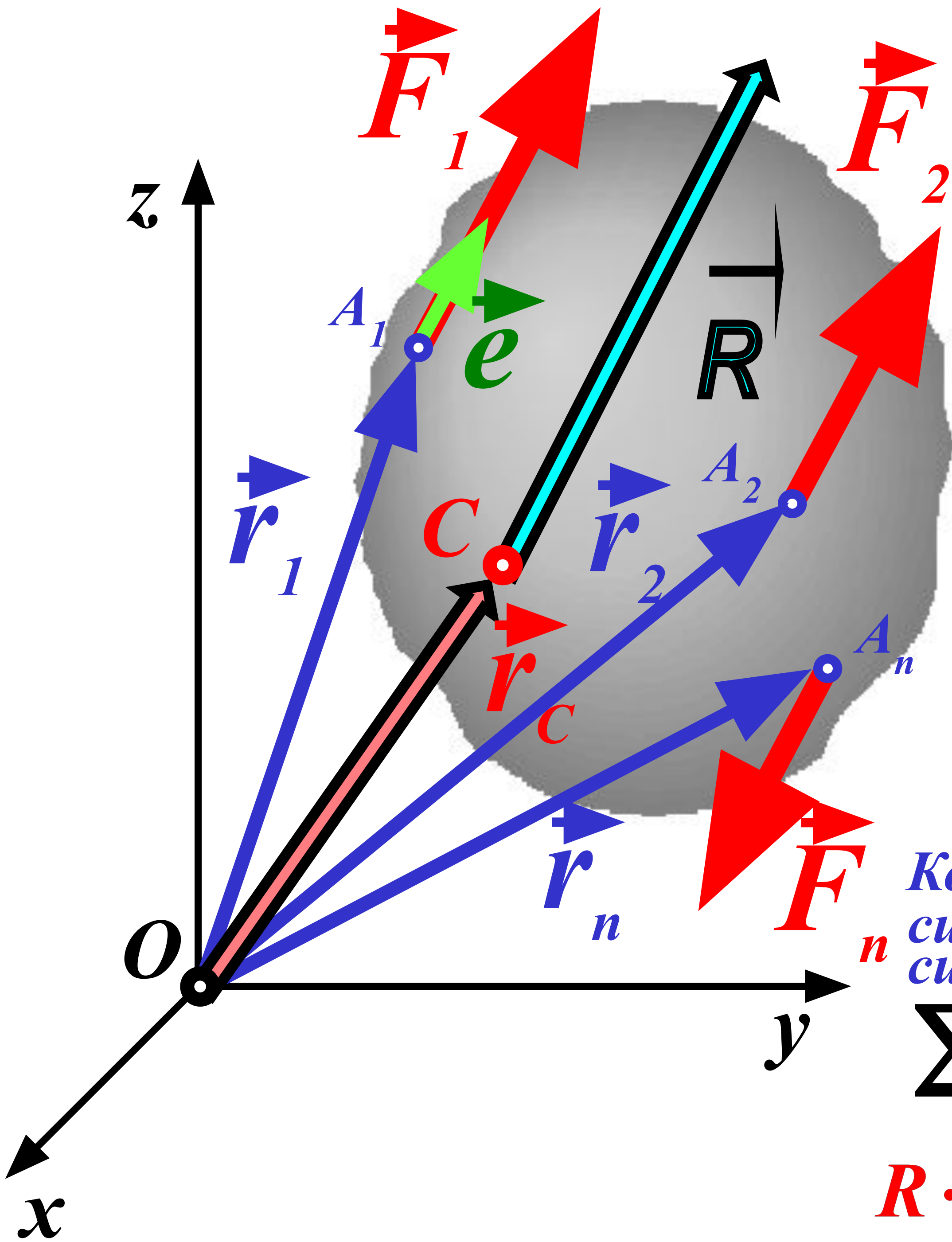
При повороте любой системы параллельных сил вокруг их точек приложения на одинаковый угол равнодействующая так же поворачивается вокруг своей точки приложения на тот же угол.

На линии действия равнодействующей имеется точка, вокруг которой она поворачивается при повороте системы параллельных сил. Эта точка называется – **центр системы параллельных сил.**

Центр тяжести

1. Пространственная система параллельных сил

1.2. Центр системы параллельных сил



Определение координат центра системы параллельных сил:

$$\{\vec F_1,\dots,\vec F_n\}\in\{\vec R\};\quad \vec F_1=F_1\cdot\vec e\quad,\dots,\quad \vec F_n=F_n\cdot\vec e;\quad \vec R=\sum F_i\cdot\vec e.$$

По теореме Вариньона:

$$\vec M_O(\vec R)=\sum\vec M_O(\vec F_i)\ \Rightarrow\ \vec r_C\times\vec R=\sum(\vec r_i\times\vec F_i).$$

$$\vec r_C\times\sum F_i\vec e=\sum(\vec r_i\times F_i\vec e),\qquad \sum F_i\vec r_C\times\vec e=\sum(F_i\vec r_i\times\vec e);$$

$$\left(\sum F_i\vec r_C-\sum F_i\vec r_i\right)\times\vec e=0,\ \Rightarrow\ \sum F_i\vec r_C-\sum F_i\vec r_i=0;$$

$$\boxed{\vec r_C=\frac{\sum F_i\vec r_i}{\sum F_i}}$$

Координаты центра системы параллельных сил:

$$x_C=\frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i};\ y_C=\frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i};\ z_C=\frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}.$$

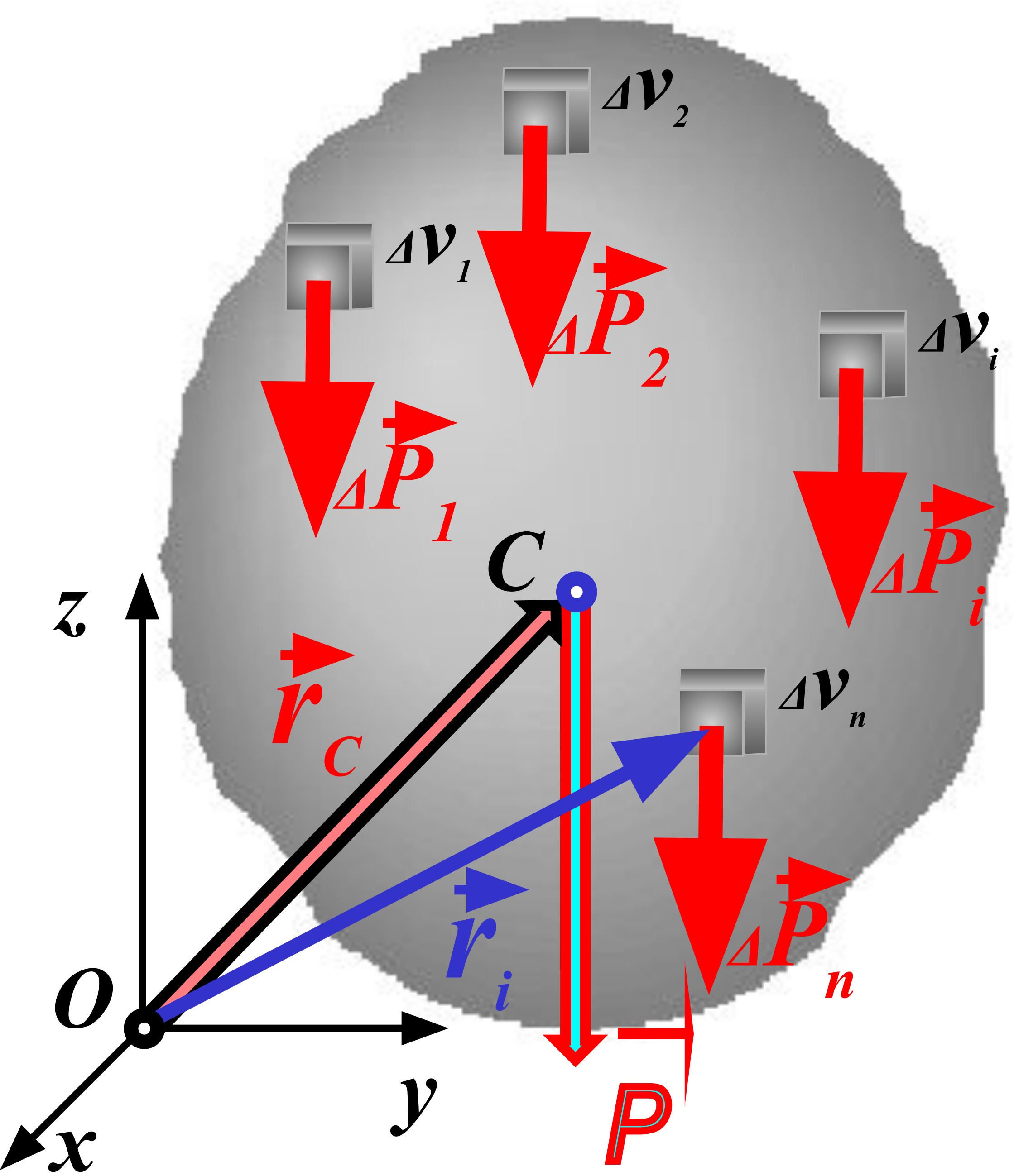
$\sum F_i x_i,\sum F_i y_i,\sum F_i z_i$ – *статические моменты системы относительно плоскостей yOz, xOz и xOy.*

$$R\cdot x_C=\sum F_i x_i,\quad R\cdot y_C=\sum F_i y_i,\quad R\cdot z_C=\sum F_i z_i$$

Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.1. Определение центра тяжести тел



Центром тяжести тела называют точку, являющуюся центром параллельных сил тяжести, действующих на элементы тела.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \Delta P_i \vec{r}_i}{\sum \Delta P_i}; \; x_C = \frac{\sum \Delta P_i x_i}{\sum \Delta P_i}; \; y_C = \frac{\sum \Delta P_i y_i}{\sum \Delta P_i}; \; z_C = \frac{\sum \Delta P_i z_i}{\sum \Delta P_i}.$$

$$\Delta P_i = \Delta m_i g; \; \Delta m_i = \rho \cdot \Delta v_i$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \Delta v_i \vec{r}_i}{V}; \; x_C = \frac{\sum \Delta v_i x_i}{V}; \; y_C = \frac{\sum \Delta v_i y_i}{V}; \; z_C = \frac{\sum \Delta v_i z_i}{V}.$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{V}\oiiint_V \vec{r}\,dv; \; x_C = \frac{1}{V}\oiiint_V x\,dv; \; y_C = \frac{1}{V}\oiiint_V y\,dv; \; z_C = \frac{1}{V}\oiiint_V z\,dv.$$

Для определения центра тяжести однородной поверхности:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{S}\oiint_S \vec{r}\,ds; \; x_C = \frac{1}{S}\oiint_S x\,ds; \; y_C = \frac{1}{S}\oiint_S y\,ds; \; z_C = \frac{1}{S}\oiint_S z\,ds.$$

Для определения центра тяжести однородной линии:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{L}\int_l \vec{r}\,dl; \; x_C = \frac{1}{L}\int_l x\,dl; \; y_C = \frac{1}{L}\int_l y\,dl; \; z_C = \frac{1}{L}\int_l z\,dl.$$

Центр тяжести

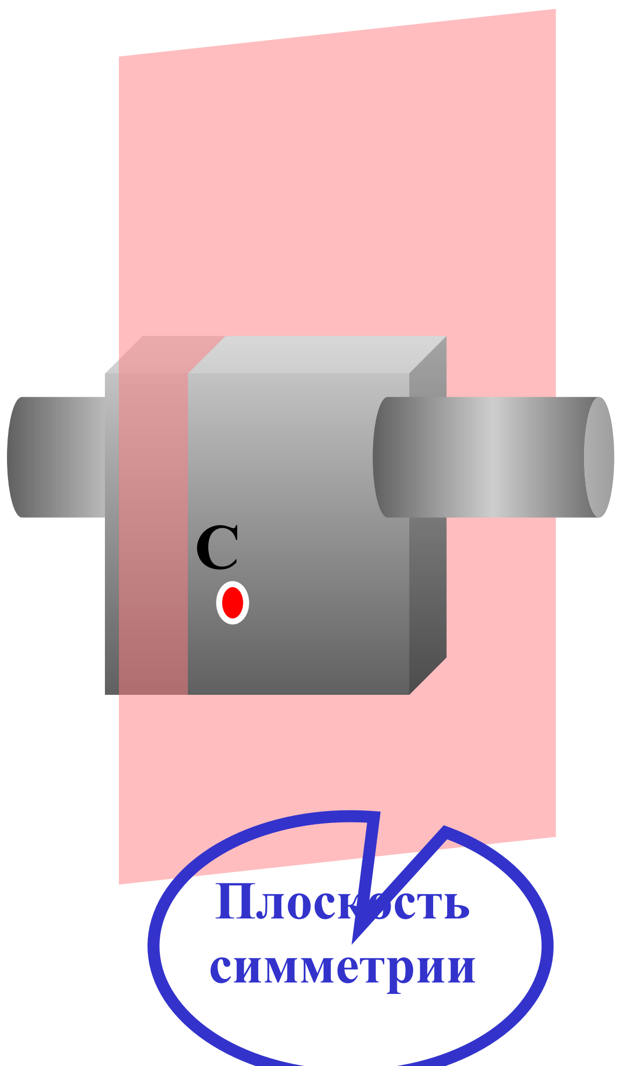
2. Центр тяжести тел

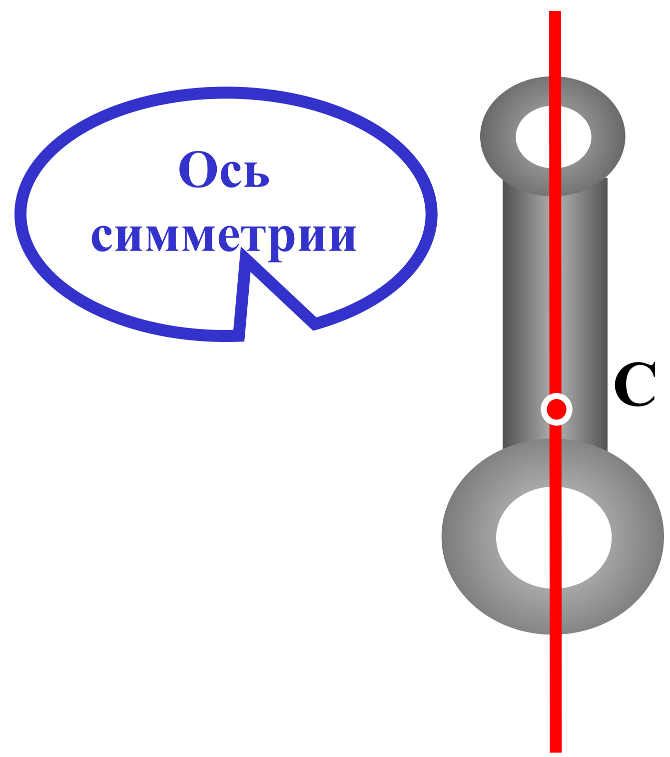
2.2. Центр тяжести симметричных тел

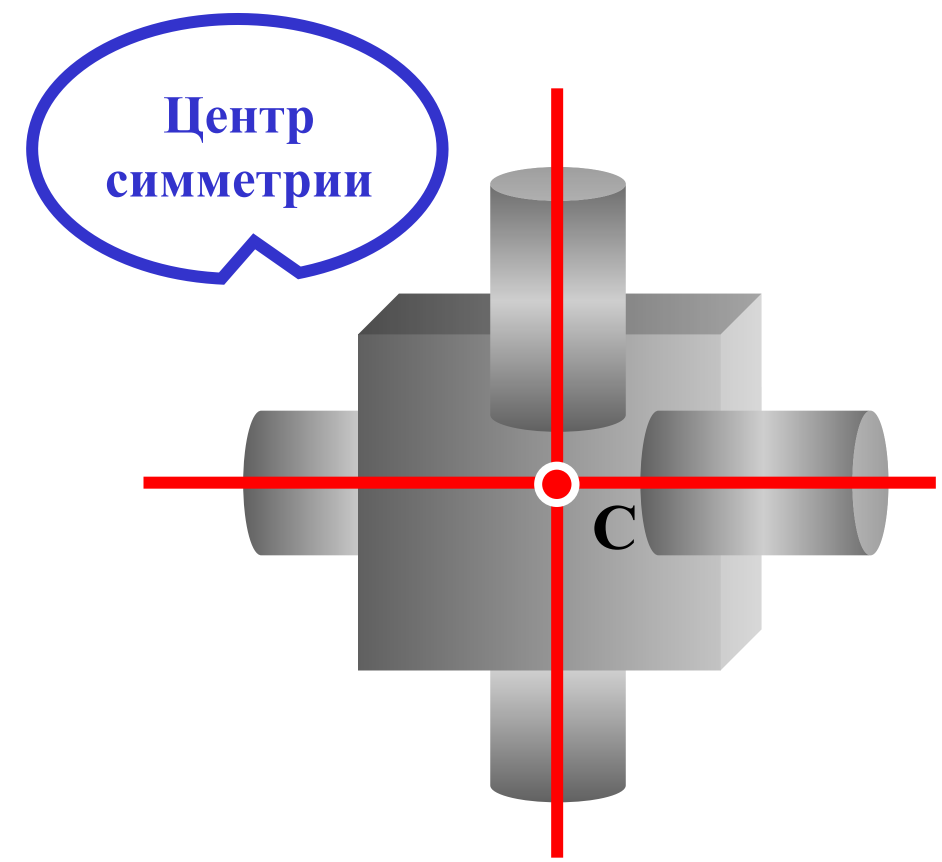
Если однородное тело имеет плоскость геометрической симметрии, то центр тяжести тела находится в этой плоскости.

Если однородное тело имеет ось геометрической симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Если однородное тело имеет точку геометрической симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.





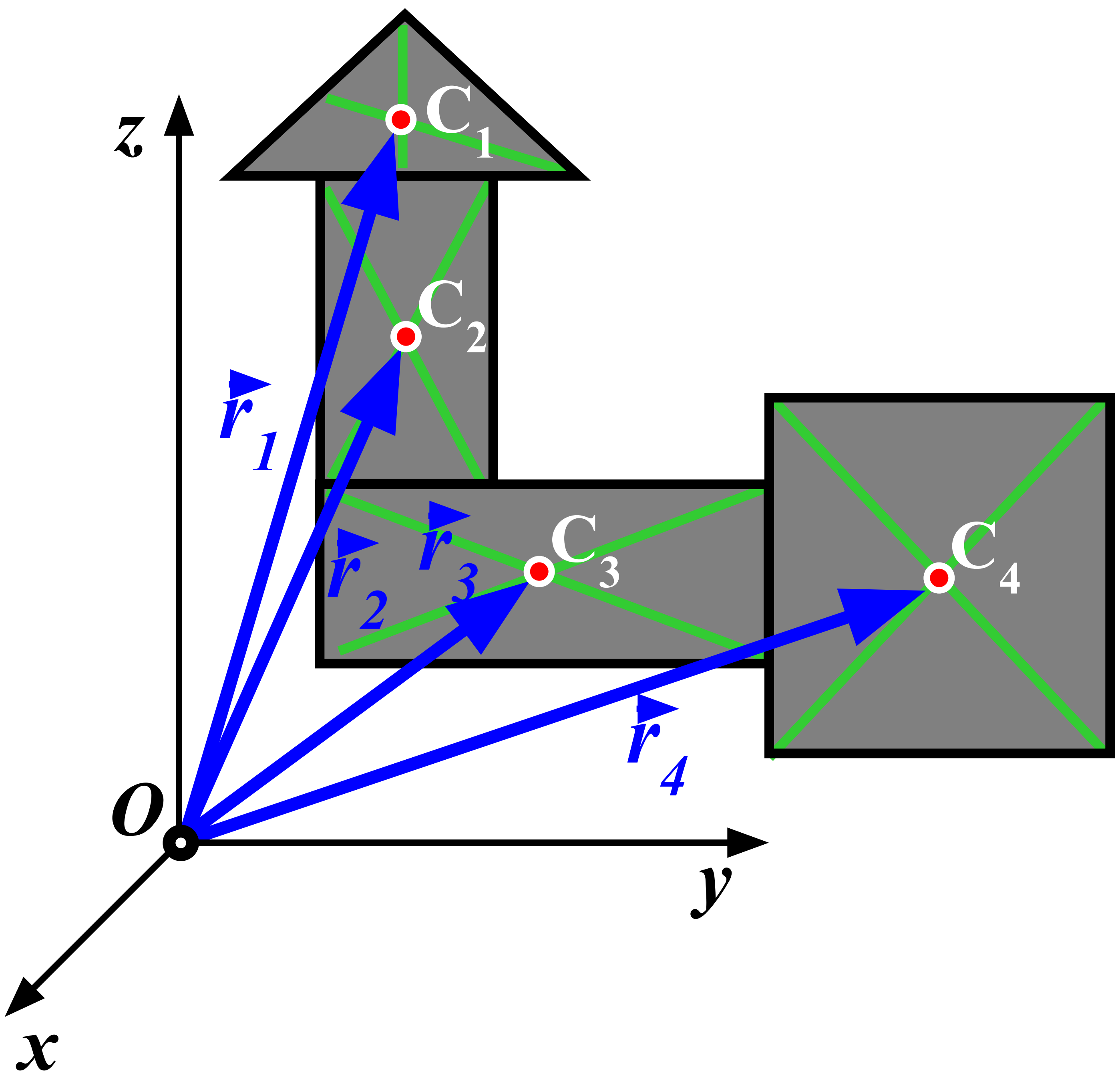


Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.3. Метод разбиения тела на части

Положение центра тяжести можно определить, если разбить тело на части, координаты центров тяжести которых заранее известны.



$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i v_i}{V} = \frac{\vec{r}_1 V_1 + \vec{r}_2 V_2 + \vec{r}_3 V_3 + \vec{r}_4 V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4};$$

$$x_C = \frac{x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 + x_4 V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4};$$

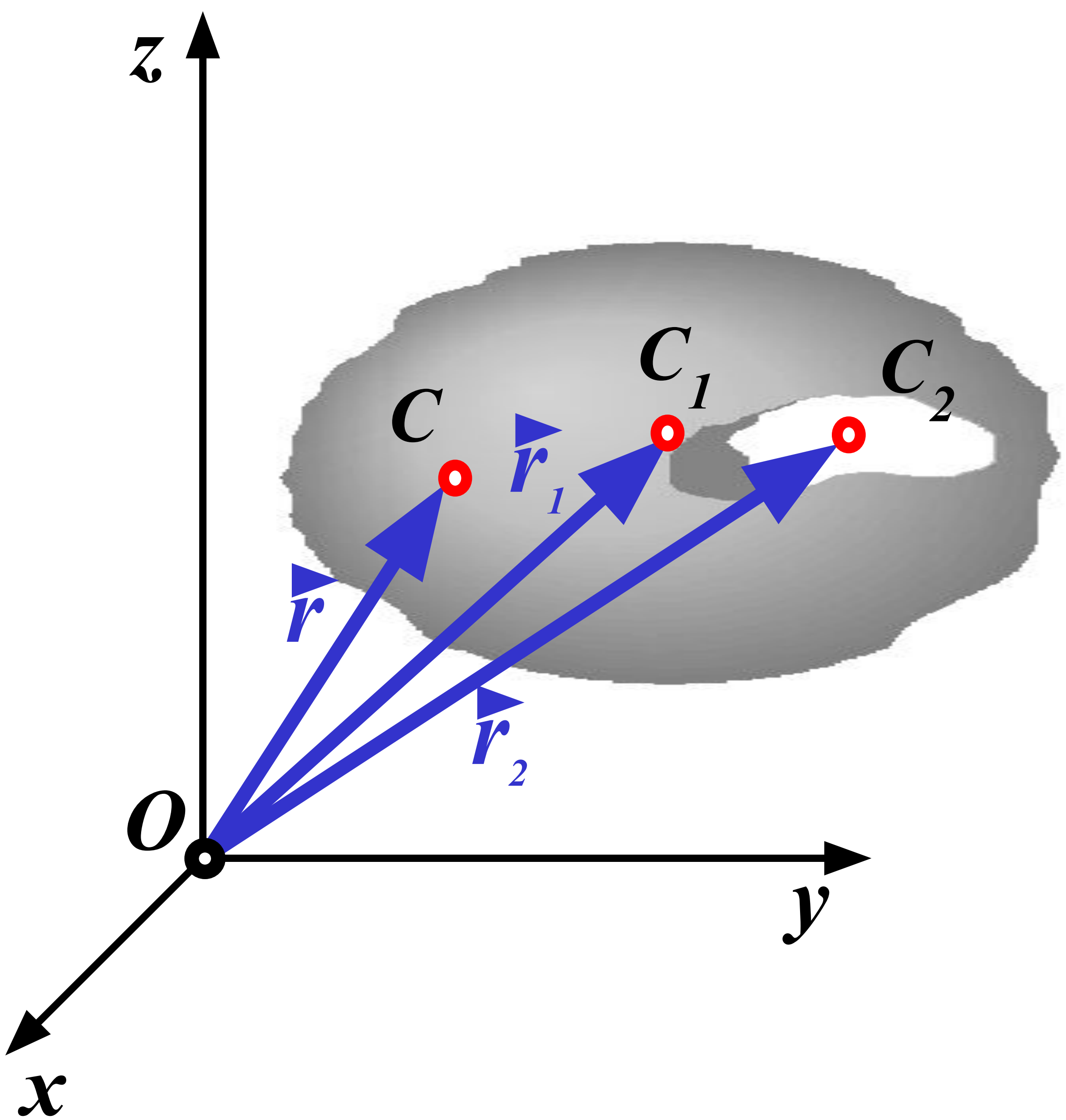
$$y_C = \frac{y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 + y_4 V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4};$$

$$z_C = \frac{z_1 V_1 + z_2 V_2 + z_3 V_3 + z_4 V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}.$$

Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.4. Метод отрицательных масс



Рассмотрим тело, имеющее пустые полости.

*Центр тяжести **массы, которая могла бы занимать полость** обозначим как C_2, ее объем – V_2.*

*Центр тяжести **полностью заполненного тела** (без полости) обозначим как C_1, его объем – V_1.*

*Центр тяжести **тела с полостью** (исходного) обозначим как C, его объем – V.*

$$V_1 = V + V_2;$$

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}V + \vec{r}_2 V_2}{V_1}; \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}_1 V_1 - \vec{r}_2 V_2}{V_1 - V_2}.$$

$$x_C = (x_1 V_1 - x_2 V_2)/(V_1 - V_2);$$

$$y_C = (y_1 V_1 - y_2 V_2)/(V_1 - V_2);$$

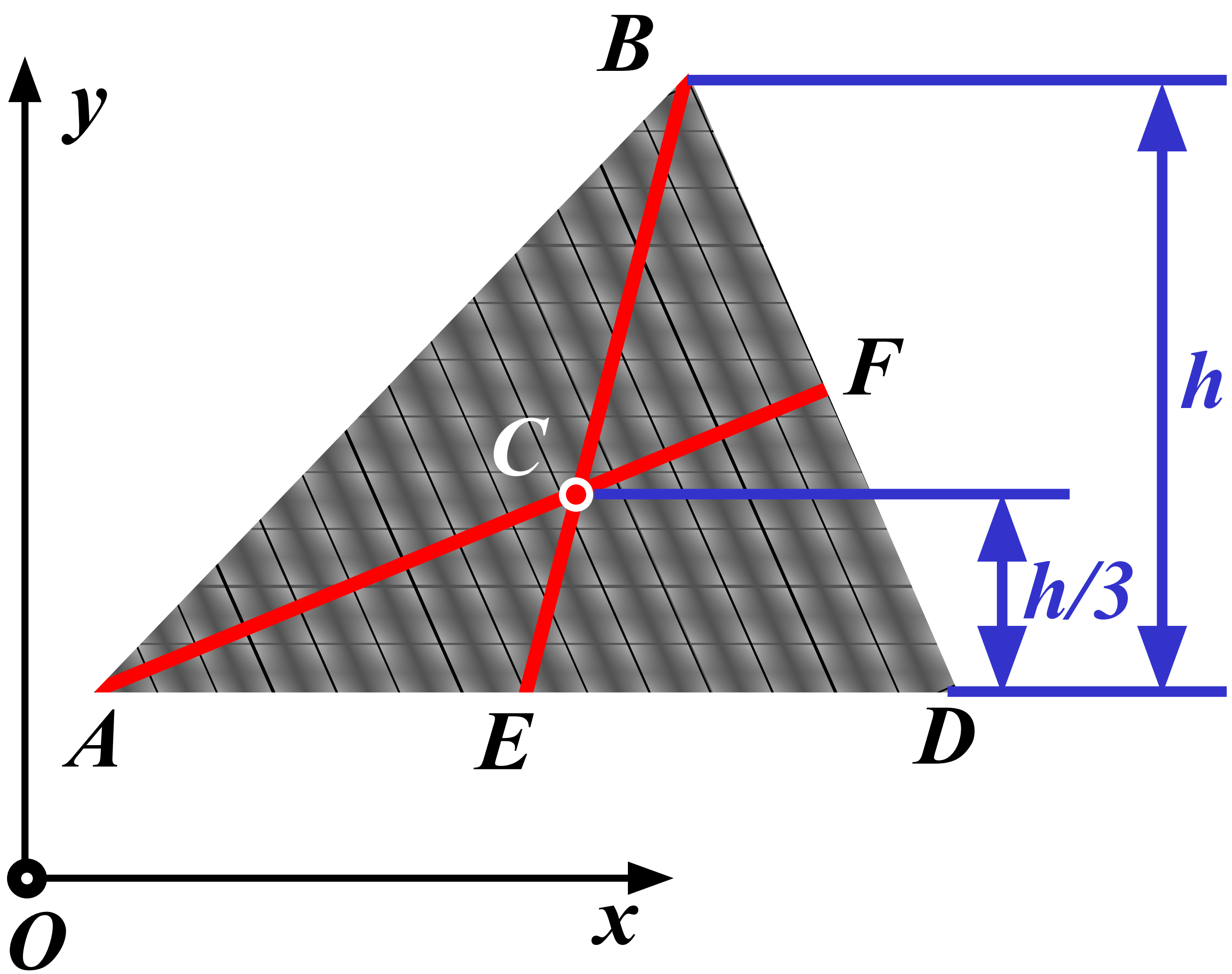
$$z_C = (z_1 V_1 - z_2 V_2)/(V_1 - V_2).$$

Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.5. Центры тяжести простейших тел

2.5.1. Треугольник



Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2/1, считая от соответствующей вершины. Следовательно, от каждого основания центр тяжести находится на расстоянии 1/3 соответствующей высоты треугольника.

Имея координаты вершин треугольника A (x_A, y_A, z_A), $B(x_B, y_B, z_B)$ и $V(x_D, y_D, z_D)$, можно вычислить координаты его центра тяжести по формулам:

$$x_C = (x_A + x_B + x_D)/3,$$
$$y_C = (y_A + y_B + y_D)/3,$$
$$z_C = (z_A + z_B + z_D)/3.$$

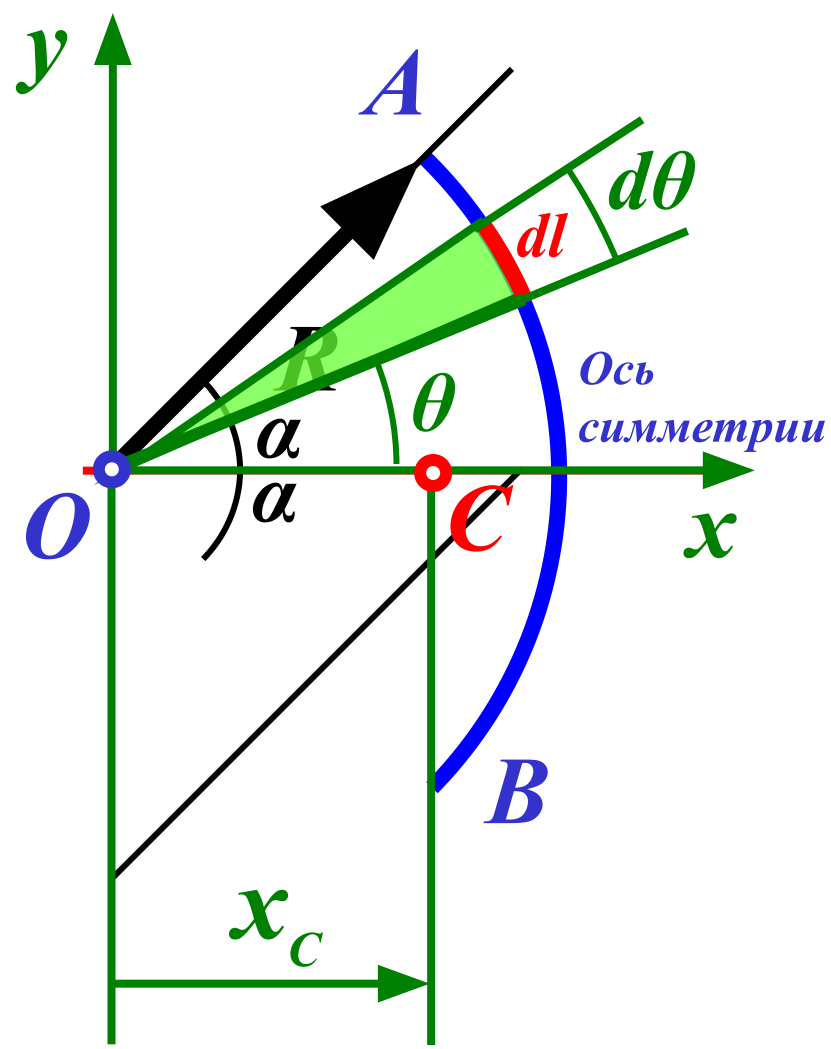
Способ не подходит для вычисления центра тяжести треугольника, масса которого распределена по периметру. В этом случае необходимо рассматривать трехточечную систему, точки которой расположены в серединах сторон и имеют массу соответствующих сторон.

Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.5. Центры тяжести простейших тел

2.5.2. Дуга окружности



*Рассмотрим однородную дугу окружности длиной **l**, радиусом **R** и центральным углом **2α**.*

*Центр тяжести находится на оси симметрии, с которой совместим ось **Ox**. Требуется найти только координату x_C центра тяжести дуги окружности.*

Статический момент дуги относительно оси Oy:

$$l \cdot x_C = \int_{AB} x \cdot dl.$$

В полярных координатах: $x = R\cos\theta, \; R = 2R\alpha.$

$$2R\alpha \cdot x_C = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\theta \cdot R \cdot d\theta,$$

$$\boxed{x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

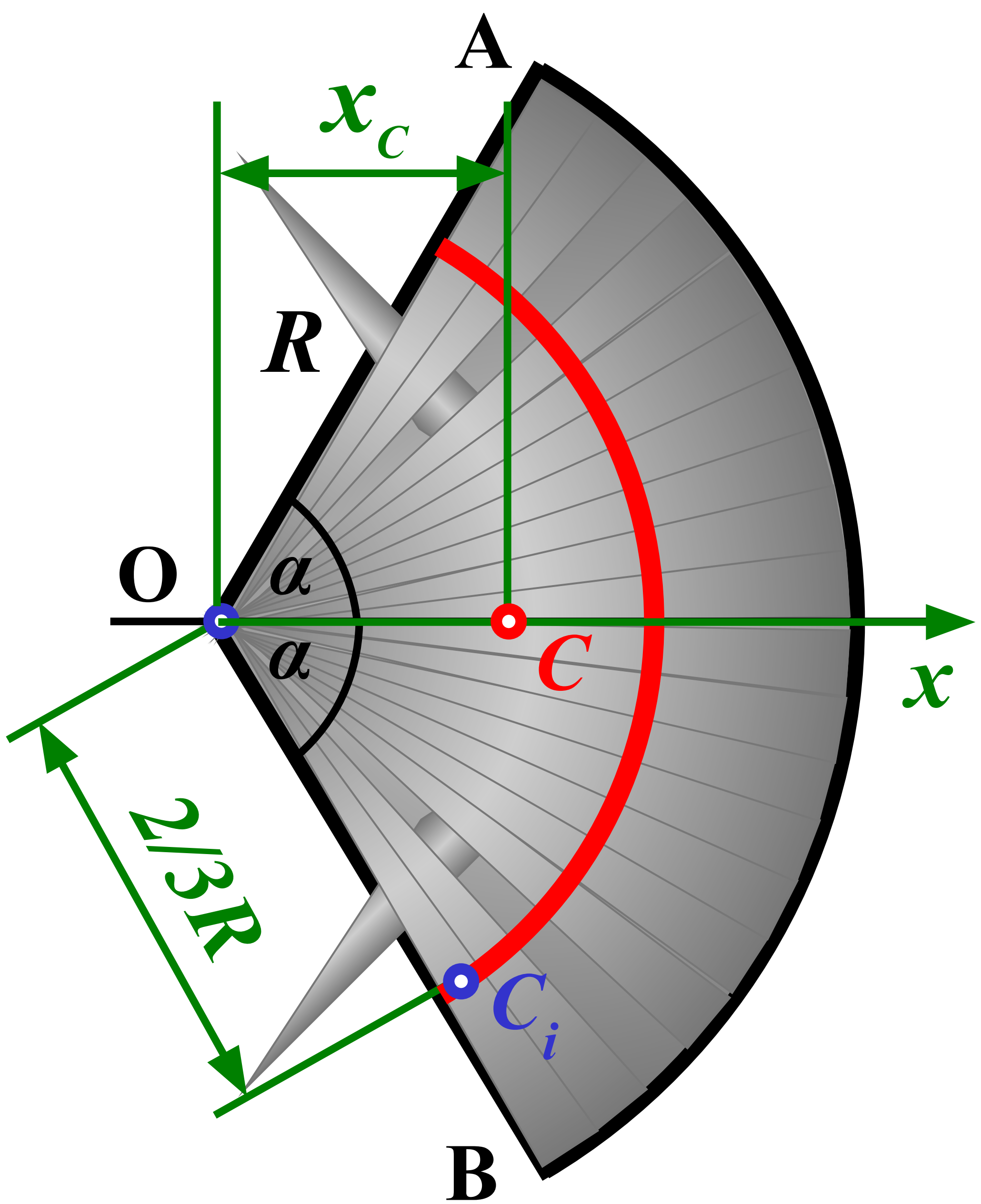
Для половины окружности: $\alpha = \dfrac{\pi}{2};$ $\qquad x_C = \dfrac{2R}{\pi}$

Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.5. Центры тяжести простейших тел

2.5.3. Круговой сектор



Рассмотрим однородный круговой сектор радиусом ***R*** *и с центральным углом* ***2α.***

Разобьем круговой сектор на элементарные одинаковые секторы.

Центр тяжести каждого элементарного треугольника отстоит от его вершины на ***2/3*** *его высоты (здесь – радиуса* ***R****).*

Через центры тяжести элементарных треугольников можно провести дугу радиуса ***2/3R.***

Центр тяжести сектора будет совпадать с центром тяжести этой дуги и его положение вычисляется по формуле:

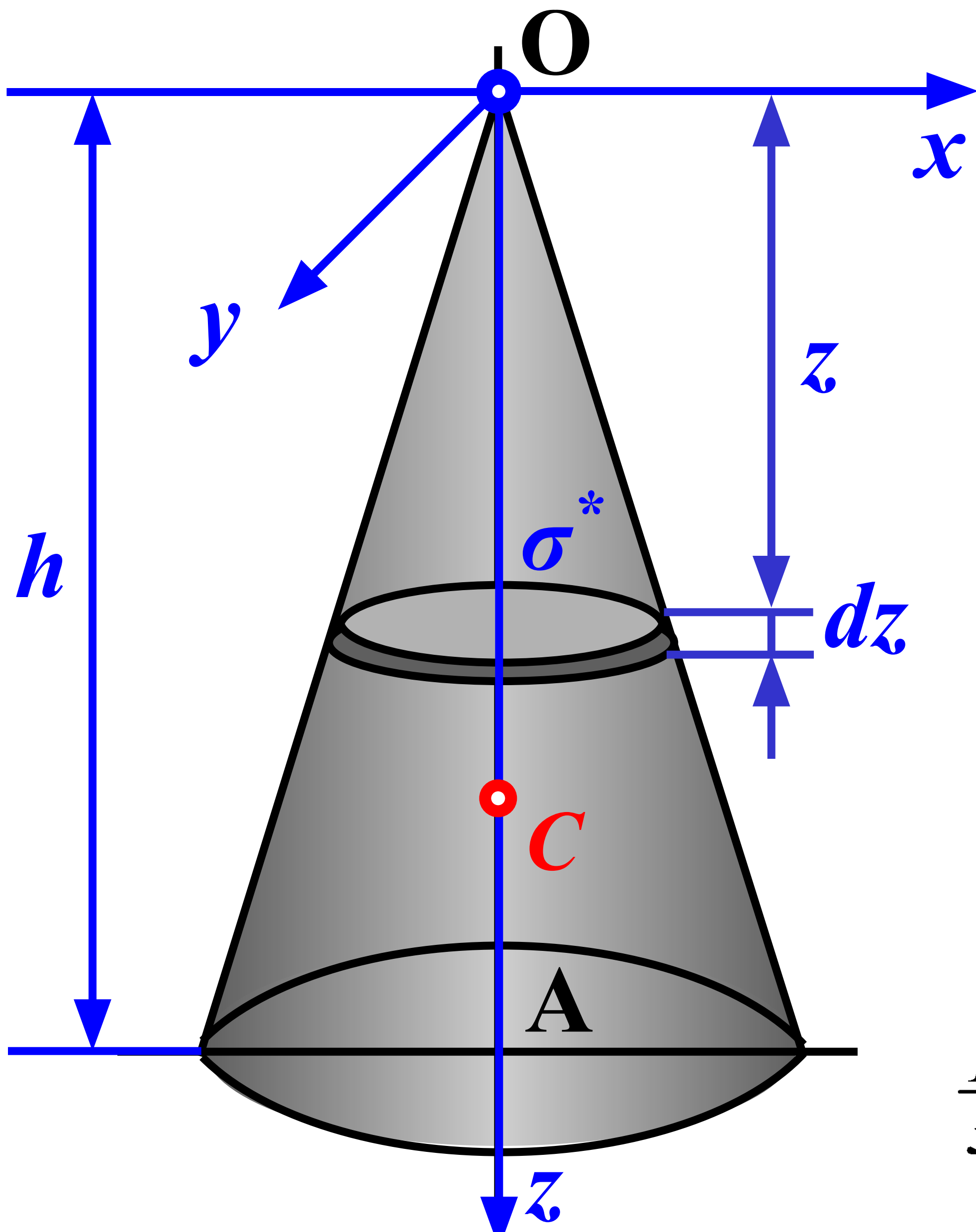
$$\boxed{x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

Центр тяжести

2. Центр тяжести тел

2.5. Центры тяжести простейших тел

2.5.4. Объем конуса



Определим центр тяжести конуса, имеющего ось симметрии AO. Высота конуса – h, *площадь основания конуса –* σ, *объем конуса –* V.

Центр тяжести конуса лежит на оси симметрии, с которой совмещена ось Oz .

$$z_C = \frac{1}{V}\int_V z \cdot dV; \qquad V = \frac{1}{3}\sigma \cdot h.$$

$$dV = \sigma^* \cdot dz,$$ *где* σ^* *– площадь сечения конуса с координатой* z .

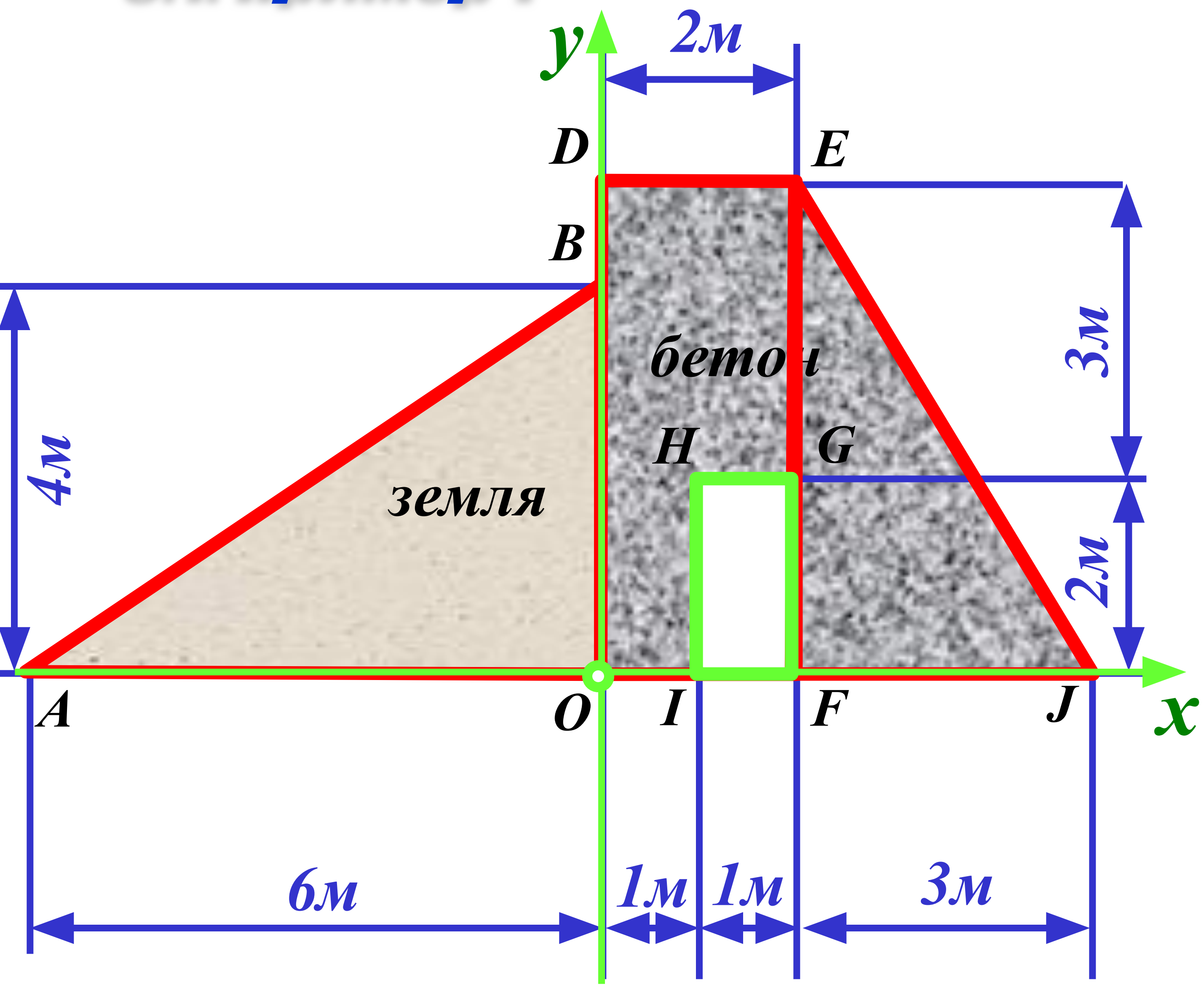
$$\frac{\sigma^*}{\sigma} = \frac{z^2}{h^2}, \qquad dV = \frac{\sigma}{h^2} z^2 \cdot dz;$$

$$\frac{1}{3}\sigma \cdot h \cdot z_C = \int_0^h z \cdot \frac{\sigma}{h^2} \cdot z^2 \cdot dz, \qquad \boxed{z_C = \frac{3}{4}h}$$

Центр тяжести

3. Примеры решения задач

3.1. Пример 1



Найти центр тяжести поперечного сечения плотины, показанного на рисунке, принимая, что удельный вес бетона – $\rho_{бет}=24$ кН/м^3, а земляного грунта – $\rho_{зем}=16$ кН/м^3.

Решение:

Применяя метод отрицательных площадей, представим фигуру состоящей и четырех частей:

– треугольника ABO ;
– прямоугольника CDEF ;
– треугольника FEJ ;
– прямоугольника FGHI (пустота);

Поскольку прямоугольник FGHI дополняет заданную фигуру, а не является ее частью, то в дальнейших расчетах его площадь учитывается со знаком «минус».

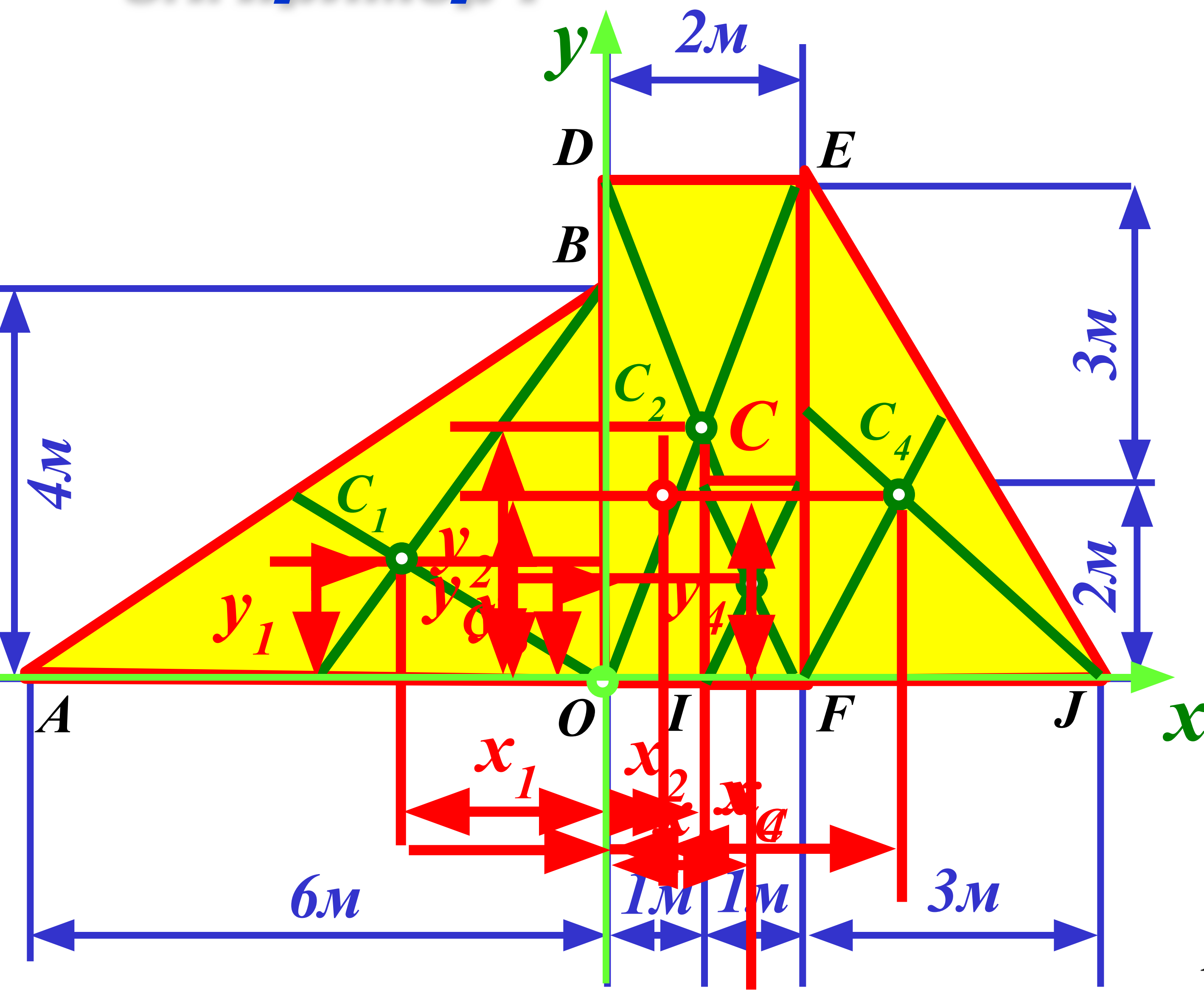
Координаты X_C и Y_C центра тяжести плоской фигуры определим по формулам:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \rho_i S_i}{\sum_{i=1}^{4} \rho_i S_1}; \qquad Y_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i \rho_i S_i}{\sum_{i=1}^{4} \rho_i S_1};$$

Центр тяжести

3. Примеры решения задач

3.1. Пример 1



Найти центр тяжести поперечного сечения плотины, показанного на рисунке, принимая, что удельный вес бетона – $\rho_{бет}=24$ кН/м^3, а земляного грунта – $\rho_{зем}=16$ кН/м^3.

Решение:

$$X_C=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\rho_iS_i}{\sum_{i=1}^{4}\rho_iS_1};\qquad Y_C=\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i\rho_iS_i}{\sum_{i=1}^{4}\rho_iS_1};$$

ABO:	$x_1=-2м;$	$y_1=1.33м;$	$S_1=12м^2;$	$\rho_1=16;$
ODEF:	$x_2=1м;$	$y_2=2.5м;$	$S_2=10м^2;$	$\rho_2=24;$
FGHI:	$x_3=1.5м;$	$y_3=1м;$	$S_3=-2м^2;$	$\rho_3=24;$
FEJ:	$x_4=3м;$	$y_4=1.67м;$	$S_4=7.5м^2;$	$\rho_4=24;$

$$X_C=\frac{-2\cdot16\cdot12+1\cdot24\cdot10-1.5\cdot24\cdot2+3\cdot24\cdot7.5}{12\cdot16+10\cdot24-2\cdot24+7.5\cdot24}=0.57\,м;$$

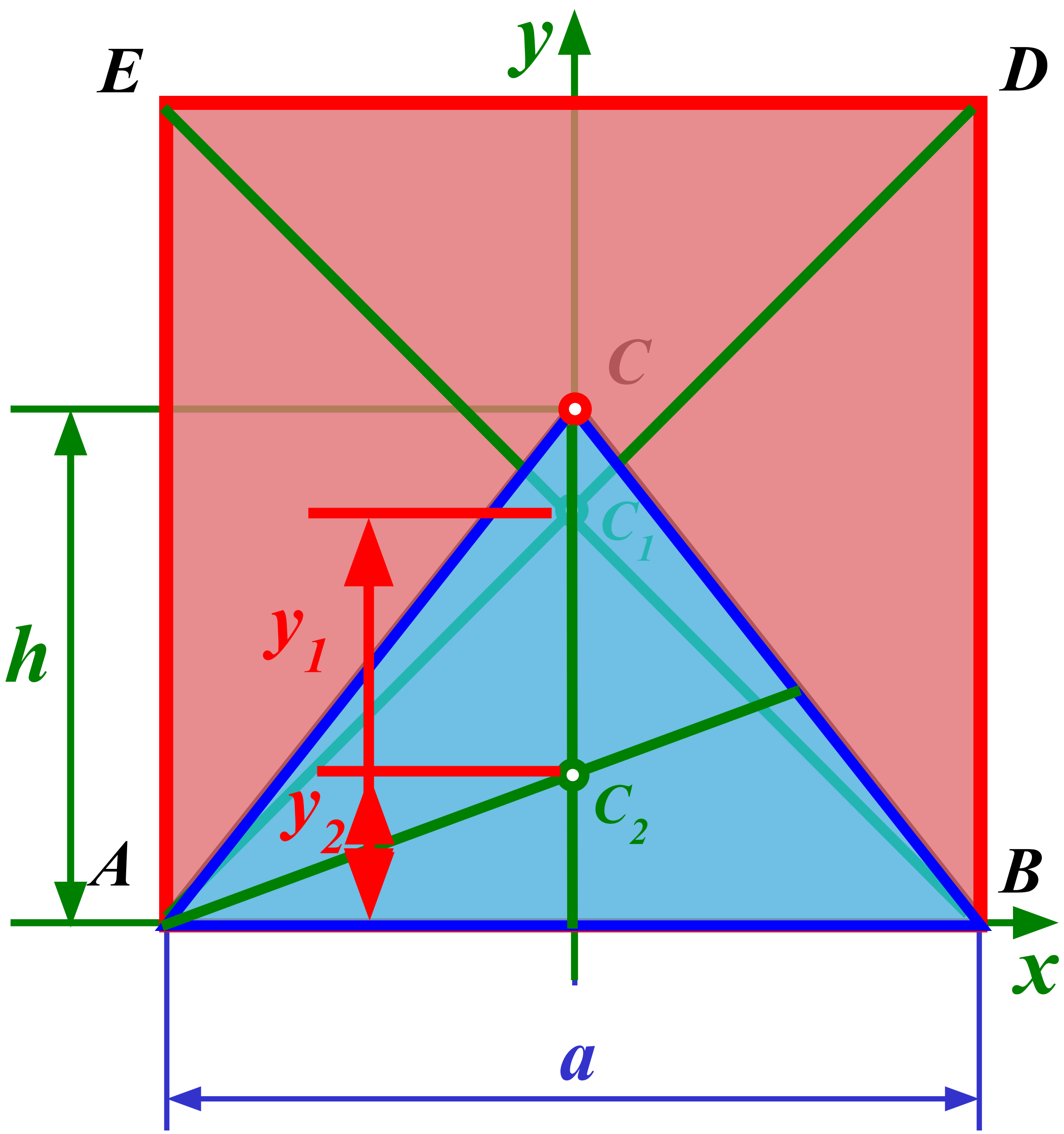
$$Y_C=\frac{1.33\cdot16\cdot12+2.5\cdot24\cdot10-1\cdot2\cdot24+1.67\cdot7.5\cdot24}{12\cdot16+10\cdot24-2\cdot24+7.5\cdot24}=1.96\,м.$$

Ответ: $X_C=0.57\,м;$ $Y_C=1.96\,м;$

Центр тяжести

3. Примеры решения задач

3.2. Пример 2



Дан квадрат ABDE, сторона которого равна a. Найти внутри него такую точку C, чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник ACB.

Решение:

$$x_C = 0; \quad y_C = h.$$

$$ABDE: \quad x_1 = 0; \quad y_1 = a/2; \quad S_1 = a^2;$$

$$ABC: \quad x_2 = 0; \quad y_2 = h/3; \quad S_2 = -a \cdot h/2;$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2}; \quad h = \frac{a/2 \cdot a^2 - h/3 \cdot (a \cdot h)/2}{a^2 - (a \cdot h)/2};$$

$$2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0;$$

$$h_1 = 2.365a;$$

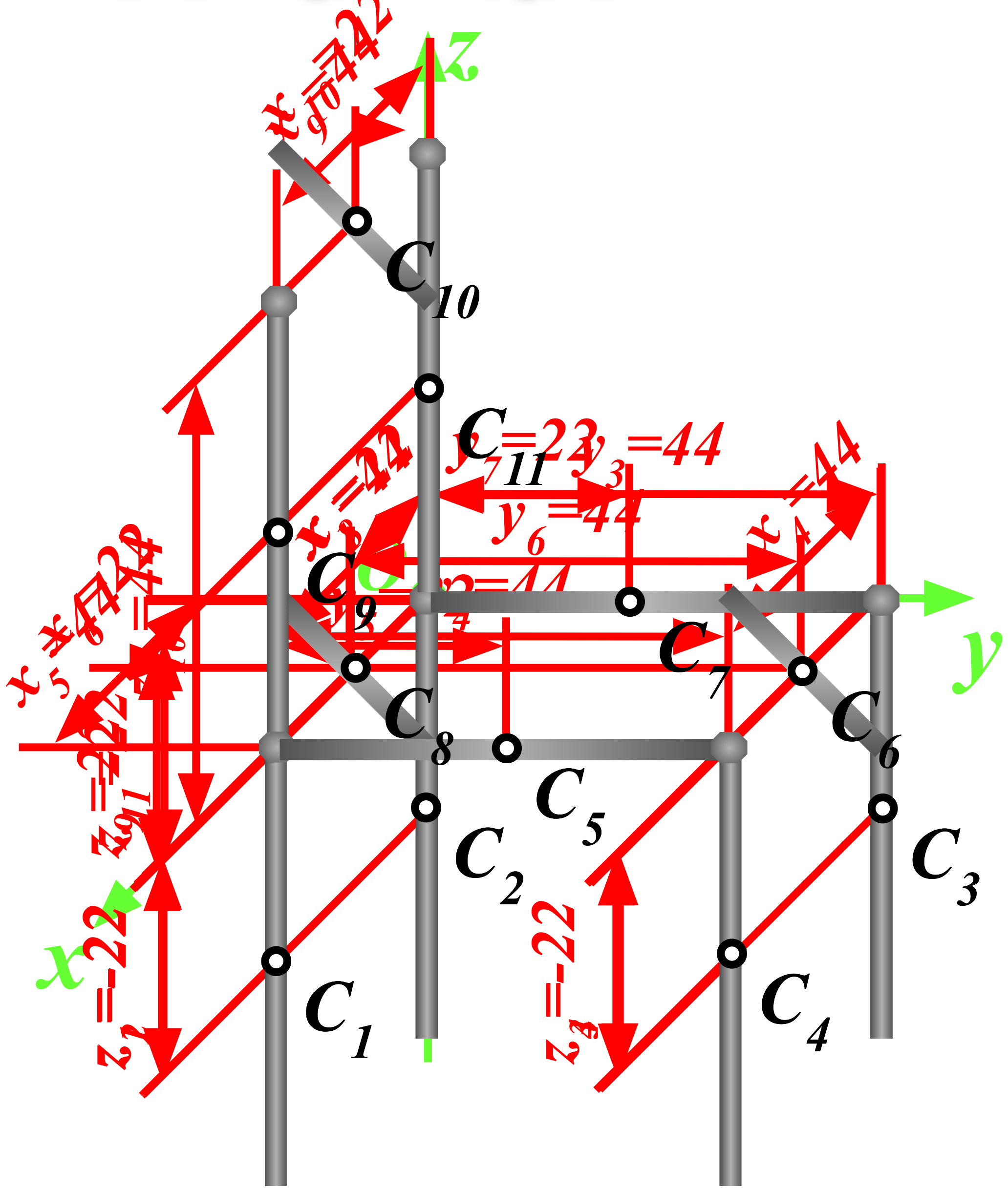
$$h_2 = 0.635a;$$

Ответ: $h = 0.635a$

Центр тяжести

3. Примеры решения задач

3.3. Пример 3



Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинакового веса и длины. Длина стержня – 44 см.

Решение:

$$X_C=\frac{\sum_{i=1}^{11}x_il_i}{\sum_{i=1}^{11}l_i}=\frac{l\cdot\sum_{i=1}^{11}x_i}{11\cdot l}=\frac{\sum_{i=1}^{11}x_i}{11};\quad Y_C=\frac{\sum_{i=1}^{11}y_i}{11};\quad Z_C=\frac{\sum_{i=1}^{11}z_i}{11};$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	44	0	0	44	44	22	0	22	44	22	0
y_i	0	0	44	44	22	44	22	0	0	0	0
z_i	-22	-22	-22	-22	0	0	0	0	22	44	22

$$X_C=\frac{44+0+0+44+44+22+0+22+44+22+0}{11}=22см;$$

$$Y_C=\frac{0+0+44+44+22+44+22+0+0+0+0}{11}=16см;$$

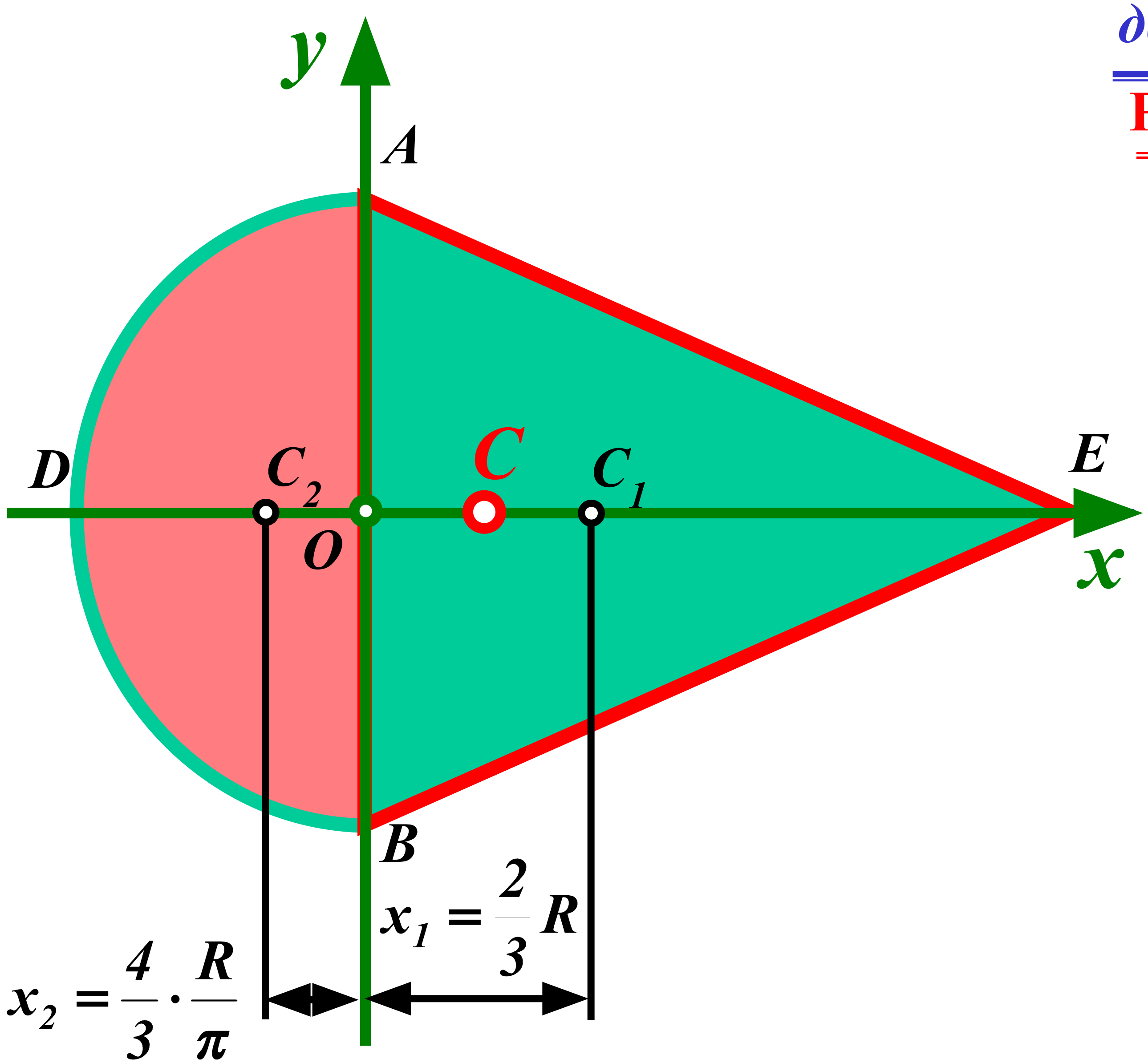
$$Z_C=\frac{-22-22-22-22+0+0+0+0+22+44+22}{11}=0см;$$

Ответ: $x_C=22см,\ y_C=16см,\ z_C=0.$

Центр тяжести

3. Примеры решения задач

3.4. Пример 4



*Определить положение центра тяжести **C** плоской фигуры, ограниченной полуокружностью **ADB** радиуса **R** и двумя прямыми равной длины **AE** и **BE**, причем **DE=3R**.*

Решение:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2};\quad y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2},\quad y_C = 0,$$

Т.к. фигура симметрична относительно оси Ox.

Треугольник ABE:

$$x_1 = OC_1 = \frac{1}{3}OE = \frac{2}{3}R;\quad y_1 = 0;\quad S_1 = \frac{1}{2}AB\cdot OE = \frac{1}{2}2R\cdot 2R = 2R^2.$$

Полукруг ADB:

$$x_2 = OC_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{R}{\pi};\qquad y_2 = 0;\quad S_2 = 0.5\pi\cdot R^2.$$

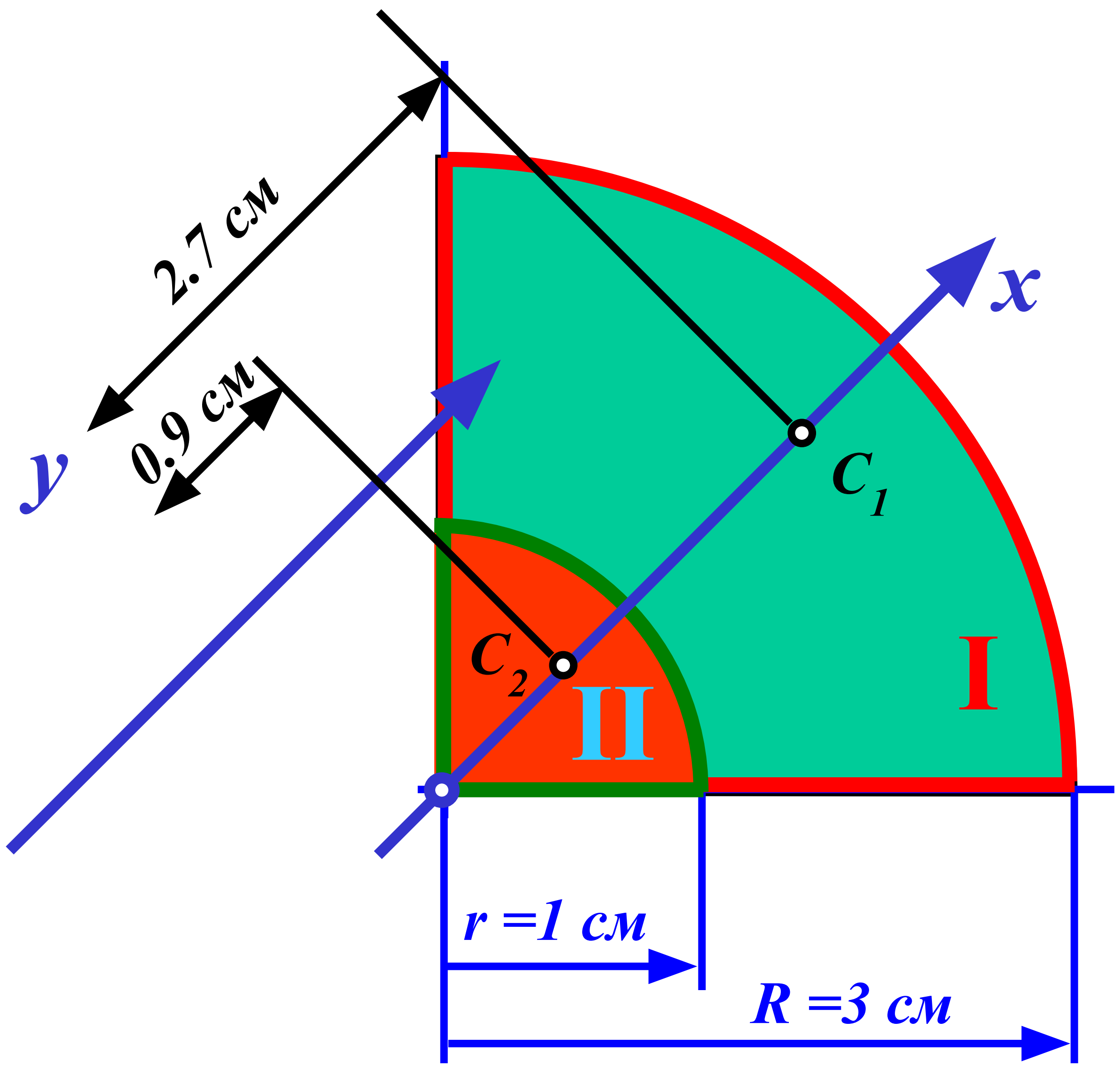
$$x_C = \frac{\frac{2}{3}R\cdot 2R^2 + \frac{4}{3\pi}R\cdot\frac{1}{2}\pi R^2}{2R^2 + 0.5\pi R^2} = \frac{4R}{4+\pi}.$$

Ответ: $x_C = \frac{4R}{4+\pi};\quad y_C = 0.$

Центр тяжести

3. Примеры решения задач

3.5. Пример 5



Определить координаты центра тяжести четверти кольца, показанного на рисунке.

Решение:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}; \quad y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2}, \quad y_C = 0,$$

Т.к. фигура симметрична относительно оси Ox.

Сектор **I**:

$$x_1 = OC_1 = \frac{R \sin\alpha}{\alpha} = \frac{3 \cdot 0.707 \cdot 4}{\pi} = 2.7\,см, \qquad S_1 = 0.25\pi \cdot R^2 = 7.07\,см^2.$$

Сектор **II**:

$$x_2 = OC_2 = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\alpha} = \frac{1 \cdot 0.707 \cdot 4}{\pi} = 0.9см, \quad S_2 = -0.25\pi \cdot r^2 = -0.79см^2.$$

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2.7 \cdot 7.07 - 0.9 \cdot 0.79}{7.07 - 0.79} = 2.93см;$$

Ответ: $x_C = 2.93\,см; \quad y_C = 0.$