



# МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Выполнил:

Хамаза В.А.

Научный руководитель:

К.ф.-м.н., доцент Якушев И.А.

Пусть  $H_1$  – сепарабельное гильбертово пространство, плотно и компактно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство  $H$  с нормой  $\|\cdot\|_{H_1} \equiv \|\cdot\|$  и скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ .

$$u'''(t) + Au(t) + K(t)u(t) = h(t), \quad (1)$$

$$u(0) = u(T) = u'(0) = 0, \quad (2)$$

где  $u(t)$  искомая, а  $h(t)$ -заданная функции. Линейный оператор  $K(t)$  и функции  $u(t)$ ,  $h(t)$  определены на конечном отрезке  $[0, T]$ .

- $A$  – самосопряженный оператор в  $H$  с областью определения  $D(A) = H_1$ ;
- Существует постоянная  $\beta > 0$  такая, что  $(Av, v) \leq -\beta \|v\|^2$  для любого  $v \in H_1$ .

$L_2(0, T; H)$  - Гильбертово пространство на  $[0, T]$

$$\|v(t)\|_{0,2} = \left( \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \right)^{1/2},$$

а через  $W_2^3 H, H_1$  пространство функций  $v(t)$  таких, что

$\frac{d^j v}{dt^j} \in L_2(0, T; H)$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), и определим норму

$$\|v(t)\|_{2,3} = \left( \sum_{j=0}^3 \int_0^T \left\| \frac{d^j v}{dt^j} \right\|^2 dt + \int_0^T \|Av(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3)$$

Подпространство функций  $v(t)$  из  $W_2^3(H, H_1)$ , удовлетворяющих условию  $u(0) = u(T) = u'(0) = 0$ , обозначим через  $\dot{W}_2^3(H, H_1)$ ,

В пространстве  $\dot{W}_2^3(H, H_1)$  введем следующую норму:

$$\|v(t)\|_{2,3} = \left( \int_0^T \left\| \frac{d^3 v}{dt^3} \right\|^2 dt + \int_0^T \|Av(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \quad (4)$$

Обозначим через  $e_1, e_2, \dots, e_n$  полную ортонормированную систему собственных элементов оператора  $-A$ , через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  соответствующие собственные числа такие, что  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \lambda \rightarrow \cdot +\infty$ .  
при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $P_n$  ортопроектор в  $H$  на линейную оболочку  $H^n$  элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

$$u_n'''(t) + Au_n(t) + P_n K(t)u_n(t) = P_n h(t), \quad (5)$$

$$u(0) = u(T) = u'(0) = 0, \quad (6)$$

**Теорема 1.** Пусть  $h(t) \in L_2(0, T; H)$ , выполнены условия 1), 2) и для любых  $z$  из  $H_1$  верны неравенства

$$\|K(t)z\| \leq C \|Az\|^\alpha \|z\|^{1-\alpha}, 0 \leq \alpha < 1. (K(t)z, z) \leq 0, \quad (7)$$

$$\|K(t)z\| \leq C \|Az\|^\alpha \|z\|^{1-\alpha}, 0 \leq \alpha < 1. \quad (8)$$

Тогда при каждом  $n$  задача (5) и (6) имеет единственное решение  $u_n(t) \in W_2^3(H, H_1)$ , последовательности  $\{u_n(t)\}$  сходится в  $W_2^3(H, H_1)$ , причем предельный элемент является решением задачи (1), (2). Решение задачи (1), (2) единственно.

- **Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда верна оценка

$$\left\| (-A)^{1/2} (u_n - u) \right\|_{0,2} \leq C \lambda_{n+1}^{-1/2}$$



Спасибо за внимание.