МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Выполнил:
Хамаза В.А.
Научный руководитель:
К.ф.-м.н., доцент Якушев И.А.

Пусть H_1 – сепарабельное гильбертово пространство, плотно и компактно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $||\cdot||_H \equiv ||\cdot||$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

$$u'''(t) + Au(t) + K(t)u(t) = h(t), \qquad (1)$$

$$u(0) = u(T) = u'(0) = 0, \qquad (2)$$

где u(t) искомая, а h(t)-заданная функции. Линейный оператор K(t) и функции u(t), h(t) определены на конечном отрезке [0,T].

- A – самосопряженный оператор в H с областью определения D(A)= H_1;
-
- Существует постоянная β>0 такая, что $(Av,v)\le -\beta\,\|v\|^2$ для любого v∈H_1.

$L_2(0,T;H)$ - Гильбертово пространство на [0,T]

$$\|v(t)\|_{0,2}=\left(\int_0^T \|v(t)\|^2\,dt\right)^{1/2},$$

а через $W_2^3 H, H_1$ пространство функций v(t) таких, что

$\dfrac{d^i v}{dt^j}\in L_2(0,T;H)$ $(j=0,1,2,3)$, и определим норму

$$\|v(t)\|_{2,3}=\left(\sum_{j=0}^{3}\int_0^T \left\|\frac{d^i v}{dt^j}\right\|^2 dt+\int_0^T \|Av(t)\|^2\,dt\right)^{1/2} \qquad (3)$$

Подпространство функций v(t) из $W_2^3(H, H_1)$, удовлетворяющих условию $u(0) = u(T) = u'(0) = 0$, обозначим через $\dot{W}_2^3(H, H_1)$,

В пространстве $\dot{W}_2^3(H, H_1)$ введем следующую норму:

$$\|v(t)\|_{2,3} = \left(\int_0^T \left\| \frac{d^3 v}{dt^3} \right\|^2 dt + \int_0^T \|Av(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \qquad (4)$$

Обозначим через e_1, $e_2,\ldots,e_n$ полную ортонормированную систему собственных элементов оператора –*A*, через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ соответствующие собственные числа такие, что $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\le\ldots,\lambda\to\cdot$ $+\infty$. при $n\to\infty$.

Пусть P_n ортопроектор в *H* на линейную оболочку H^n элементов e_1, $e_2,\ldots,e_n$.

$$u_n'''(t)+Au_n(t)+P_nK(t)u_n(t)=P_nh(t), \tag{5}$$

$$u(0)=u(T)=u'(0)=0, \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $h(t) \in L_2(0, T; H)$, *выполнены условия 1),2) и для любых z из* H_1 *верны неравенства*

$$\|K(t)z\| \le C\|Az\|^{\alpha}\|z\|^{1-\alpha}, 0 \le \alpha < 1. \ (K(t)z, z) \le 0, \quad (7)$$

$$\|K(t)z\| \le C\|Az\|^{\alpha}\|z\|^{1-\alpha}, 0 \le \alpha < 1. \quad (8)$$

Тогда при каждом n задача (5) и (6) имеет единственное решение $u_n(t) \in W_2^3(H, H_1)$, *последовательности* $\{u_n(t)\}$ *сходится в* $W_2^3(H, H_1)$, *причем предельный элемент является решением задачи (1),(2). Решение задачи (1), (2) единственно.*

- ***Теорема 2.*** *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда верна оценка*

$$\left\| (-A)^{1/2} (u_n - u) \right\|_{0,2} \leq C \lambda_{n+1}^{-1/2}$$

Спасибо за внимание.