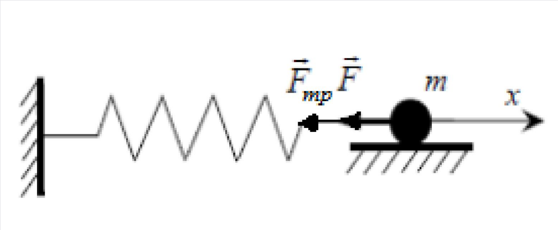
Лекція 3

Вільні згасаючі коливання

Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань

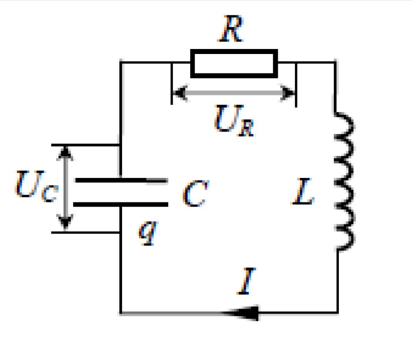


$$m\vec{a} = \vec{F}_{пр} + \vec{F}_{тр}$$

$$ma_x = -kx - rv$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0,} \qquad \beta = \frac{r}{2m}, \ \ \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$



$$U_C + U_R = \varepsilon_i$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

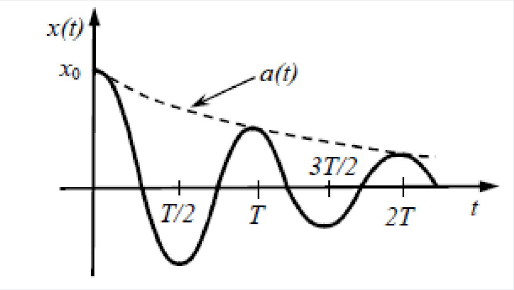
$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0{}^2 q = 0,} \qquad \beta = \frac{R}{2L}, \ \ \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

ω_0 – власна частота коливального контуру, β – коефіцієнт згасання.

Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань

$$x(t) = A e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0\right) \qquad q(t) = Q_{max} e^{-\beta t}\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0\right)$$

У цьому рівнянні амплітуда коливань вже є сама функцією часу та зменшується з часом за експоненційним законом (на рисунку – пунктирний графік):



$$a(t) = A e^{-\beta t} \qquad Q_{max}(t) = Q_{max} e^{-\beta t}.$$

Частота вільних згасаючих коливань визначається виразом:

$$\omega_з = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}, \qquad \omega_з < \omega_0$$

вона завжди менша за власну частоту і є тим меншою, чим більший активний опір чи тертя.

Період вільних згасаючих коливань визначається через частоту згасаючих коливань і завжди є більшим за період власних коливань:

$$T_з = \frac{2\pi}{\omega_з} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}, \quad T_з > T .$$

Умова для можливості коливань. Аперіодичний процес

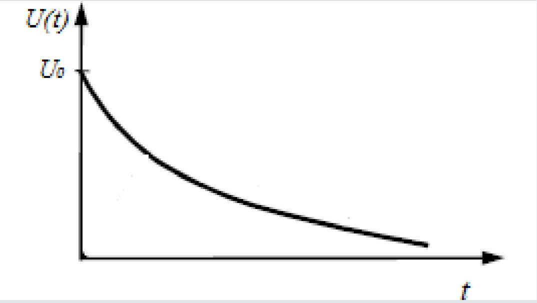
З виразу для частоти вільних згасаючих коливань ($\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$) очевидно, що коливання будуть спостерігатись лише за умови додатного підкореневого значення. Для електричного контура це означає, що існує деяке критичне значення опору, який можна включити у контур, більше якого коливання не можуть відбуватися, а буде спостерігатись лише аперіодичний розряд конденсатора (графік на рисунку).

Процес називається аперіодичним, коли система після збурення повертається до стану рівноваги монотонним чином.

Критичний опір визначається з рівності власної частоти до коефіцієнту згасання:

$$\omega_0 = \beta \qquad \text{або} \qquad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R_{кр}}{2L},$$

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$



Характеристики вільних згасаючих коливань

Основними характеристиками вільних згасаючих коливань є:

- *коефіцієнт згасання* β;
- *час релаксації* τ;
- *логарифмічний декремент згасання* λ;
- *добротність* Q.

Коефіцієнт згасання та час релаксації

Ми вже визначили коефіцієнт згасання як β=r/2m для механічних коливань чи β=R/2L для електричних коливань, причому він має розмірність частоти.

Час релаксації τ – це часовий проміжок, за який амплітуда коливань зменшується у е разів. Відношення амплітуд у момент часу 0 та момент часу τ дає нам вираз:

$$A(t) = Ae^{-\beta t}, \quad \frac{A(0)}{A(\tau)} = e, \quad \text{звідси} \quad \frac{A}{Ae^{-\beta\tau}} = e, \quad \text{або} \quad \beta\tau = 1.$$

Отже бачимо, що коефіцієнт згасання та час релаксації є взаємнооберненими величинами.

$$\beta = \frac{1}{\tau} \qquad \tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$$

Логарифмічний декремент згасання

Логарифмічний декремент згасання вводиться як величина, що обернена до кількості коливань за час релаксації: $\lambda = \frac{1}{N_e}$. *Оскільки кількість коливань можна виразити з відношення* $N_e = \frac{\tau}{T_з}$, *обернений дріб буде дорівнювати логарифмічному декременту згасання:* $\lambda = \frac{T_з}{\tau}$

Крім цього, згадавши, що час релаксації обернена величина до коефіцієнту згасання, можна визначити логарифмічний декремент згасання як $\lambda = \beta T_з$.

Розглянемо амплітуду в деякий момент часу та амплітуду через один період коливань $A(t) = Ae^{-\beta t}$, $A(t+T_з) = Ae^{-\beta(t+T_з)}$ *та візьмемо їх відношення:* $\frac{A(t)}{A(t+T_з)} = \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T_з)}} = e^{\beta T_з}$, *звідки, взявши натуральний логарифм від обох частин виразу, отримаємо:*

$$\lambda = ln\frac{A(t)}{A(t+T_з)}$$

Виразимо логарифмічний декремент через параметри коливального контура – R, L, C.

Для цього у вираз $\lambda = \beta T_з$ *підставимо* $\beta = \dfrac{R}{2L}$ *та* $T_з = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}.$

Виконання математичних перетворень призводить до виразу

$$\lambda = \frac{\pi R}{L}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} = \frac{\pi R}{\sqrt{\dfrac{L}{C} - \dfrac{R^2}{4}}},$$

який можна спростити для випадку слабкого згасання, при якому $\beta \ll \omega_0$

$$\lambda = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Добротність коливального контура

Добротність характеризує втрати енергії під час коливального процесу.

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t + T_з)}$$

Розглянемо відносне зменшення енергії за період коливань від моменту повного заряду конденсатора: $W(t) = \frac{Q_{max}^2 e^{-2\beta t}}{2C}$, $W(t + T_з) = \frac{Q_{max}^2 e^{-2\beta(t + T_з)}}{2C}$ $\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T_з}}$

За невеликих значеннях показника степені $\beta T_з \ll 1$ *можна розкласти експоненту в ряд:*

$$e^{-2\beta T_з} \approx 1 - 2\beta T_з$$

Тоді отримаємо більш простий вираз для добротності, який пов'язує її з логарифмічним декрементом: $Q = \frac{\pi}{\lambda}$

Так само, як і логарифмічний декремент, добротність може бути виражена через параметри контуру R, L, C.

Якщо згасання суттєве, слід використовувати більш точну формулу:

$$Q = \frac{L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{L}{R^2C} - \frac{1}{4}}$$

У випадку слабкого згасання, коли $\beta \ll \omega_0$, *можна використовувати спрощений вираз:*

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

В реальних контурах, які працюють у радіочастотному діапазоні, значення добротності лежать у межах 100-300. Добротність систем, побудованих на використанні п'єзоелектричного ефекту (кварцеві резонатори), може досягати сотен тисяч.

І добротність, і логарифмічний декремент згасання – безрозмірні величини.