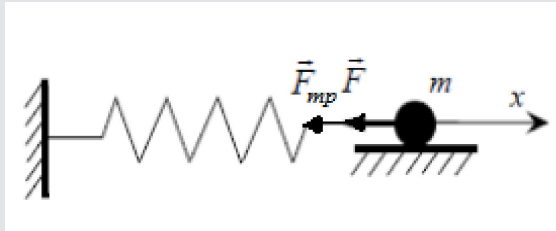


A 3D wooden maze with a white circular overlay containing text. The maze is made of dark wood and is viewed from an elevated perspective. The text is centered within the white circle.

# Лекція 3

*Вільні згасаючі коливання*

## Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань



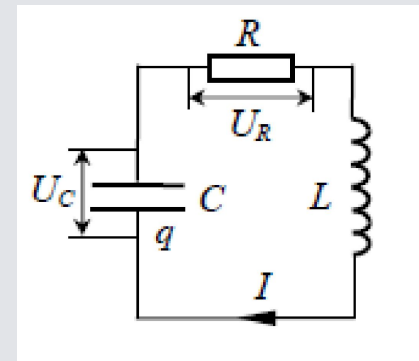
$$m\ddot{a} = F_{np} + F_{dp}$$

$$ma_x = -kx - rv$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$



$$U_C + U_R = \varepsilon_i$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

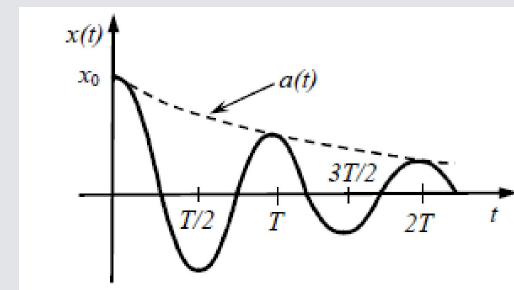
$\omega_0$  – власна частота коливального контуру,  $\beta$  – коефіцієнт згасання.

## Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань

$$x(t) = Q e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) \quad (1) \quad Q = \frac{x_0}{\cos(\varphi_0)}$$

У цьому рівнянні амплітуда коливань вже є самою функцією часу та зменшується з часом за експоненціальним законом (на рисунку – пунктирний графік):

$$A(t) = Q e^{-\beta t} \quad Q = \frac{x_0}{\cos(\varphi_0)} \quad (2) \quad Q = \frac{x_0}{\cos(\varphi_0)}$$



Частота вільних згасаючих коливань визначається виразом:

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_3 < \omega_0$$

вона завжди менша за власну частоту і є тим меншою, чим більший активний опір чи тертя.

Період вільних згасаючих коливань визначається через частоту згасаючих коливань і завжди є більшим за період власних коливань:

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad T_3 > T.$$

## Умова для можливості коливань.

### Аперіодичний процес

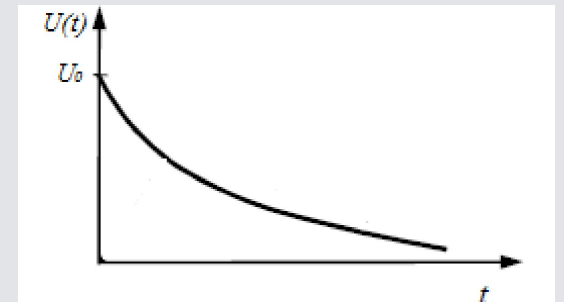
---

З виразу для частоти вільних згасаючих коливань ( $\omega_z = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ) очевидно, що коливання будуть спостерігатись лише за умови додатного підкореневого значення. Для електричного контура це означає, що існує деяке критичне значення опору, який можна включити у контур, більше якого коливання не можуть відбуватися, а буде спостерігатись лише аперіодичний розряд конденсатора (графік на рисунку).

Процес називається **аперіодичним**, коли система після збурення повертається до стану рівноваги монотонним чином.

Критичний опір визначається з рівності власної частоти до коефіцієнту згасання:

$$\omega_0 = \beta \quad \text{або} \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R_{кр}}{2L},$$
$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$



# *Характеристики вільних згасаючих коливань*

---

*Основними характеристиками вільних згасаючих коливань є:*

- коефіцієнт згасання  $\beta$ ;*
- час релаксації  $\tau$ ;*
- логарифмічний декремент згасання  $\lambda$ ;*
- добротність  $Q$ .*

## Коефіцієнт згасання та час релаксації

---

Ми вже визначили коефіцієнт згасання як  $\beta=r/2m$  для механічних коливань чи  $\beta=R/2L$  для електричних коливань, причому він має розмірність частоти.

Час релаксації  $\tau$  – це часовий проміжок, за який амплітуда коливань зменшується у  $e$  разів. Відношення амплітуд у момент часу 0 та момент часу  $\tau$  дає нам вираз:

$$A(t) = Ae^{-\beta t}, \quad \frac{A(0)}{A(\tau)} = e^{-\beta\tau} = e^{-1}, \quad \frac{A}{Ae^{-\beta\tau}} = e, \quad \beta\tau = 1.$$

Отже бачимо, що коефіцієнт згасання та час релаксації є взаємнооберненими величинами.

$$\beta = \frac{1}{\tau} \quad \tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$$

# Логарифмічний декремент згасання

---

Логарифмічний декремент згасання вводиться як величина, що обернена до кількості коливань за час релаксації:  $\lambda = \frac{1}{N_e}$  скільки кількість коливань можна виразити з відношення  $N_e = \frac{\tau}{T_3}$ , обернений дріб буде дорівнювати логарифмічному декременту згасання:  $\lambda = \frac{T_3}{\tau}$

Крім цього, згадавши, що час релаксації обернена величина до коефіцієнту згасання, можна визначити логарифмічний декремент згасання як  $\lambda = \beta T_3$ .

Розглянемо амплітуду в деякий момент часу та амплітуду через один період коливань

$A(t) = Ae^{-\beta t}$ ,  $A(t + T_3) = Ae^{-\beta(t+T_3)}$  та візьмемо їх відношення:  $\frac{A(t)}{A(t+T_3)} = \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T_3)}}$  звідки, взявши натуральний логарифм від обох частин виразу, отримаємо:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_3)}$$

Виразимо логарифмічний декремент через параметри коливального контура –  $R, L, C$ .

Для цього у вираз  $\lambda = \beta \pi$  підставимо  $\beta = \frac{R}{2L}$  та  $T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$ .

Виконання математичних перетворень призводить до виразу

$$\lambda = \frac{\pi R}{L} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}},$$

який можна спростити для випадку слабкого згасання, при якому  $\beta \ll \omega_0$

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$



# Добротність коливального контура

---

Добротність характеризує втрати енергії під час коливального процесу.

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T_3)}$$

Розглянемо відносне зменшення енергії за період коливань від моменту повного заряду конденсатора:

$$W(t) = \frac{Q_{\max}^2 e^{-2\beta t}}{2C}, \quad W(t+T_3) = \frac{Q_{\max}^2 e^{-2\beta(t+T_3)}}{2C}, \quad \frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T_3}}$$

За невеликих значеннях показника степені  $\beta T_3 \ll 1$  можна розкласти експоненту в ряд:

$$e^{-2\beta T_3} \approx 1 - 2\beta T_3$$

Тоді отримаємо більш простий вираз для добротності, який пов'язує її з логарифмічним декрементом:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

*Так само, як і логарифмічний декремент, добротність може бути виражена через параметри контуру  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .*

*Якщо згасання суттєве, слід використовувати більш точну формулу:*

$$Q = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C} - \frac{1}{4}}$$

*У випадку слабого згасання, коли  $\beta \ll \omega_0$ , можна використовувати спрощений вираз:*

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

*В реальних контурах, які працюють у радіочастотному діапазоні, значення добротності лежать у межах 100-300. Добротність систем, побудованих на використанні п'єзоелектричного ефекту (кварцеві резонатори), може досягати сотен тисяч.*

*І добротність, і логарифмічний декремент згасання – безрозмірні величини.*