

# производная.

и её геометрический смысл



Поясним это определение предела функции. Число  $A$  является пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если значения  $f(x)$  при  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , становятся как угодно близкими к числу  $A$ , т. е. значения  $|f(x) - A|$  становятся как угодно малыми.

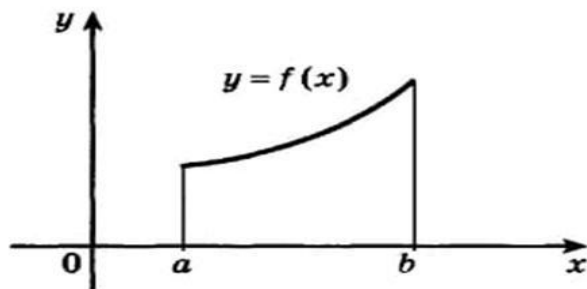


Рис. 102

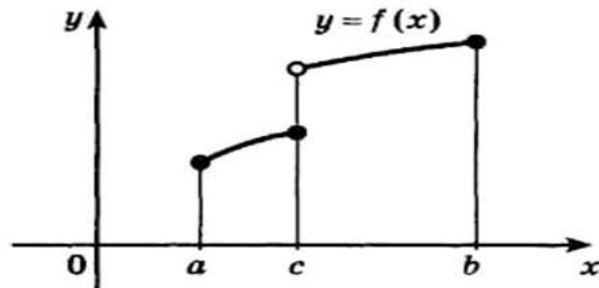


Рис. 103

Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число  $\epsilon$  и убедиться в том, что для всех  $x$ , отличающихся от  $x_0$  меньше чем на некоторое число  $\delta$ , модуль разности между  $f(x)$  и числом  $A$  будет меньше взятого числа  $\epsilon$ .

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке* (рис. 102).

Приведём примеры функций, которые не являются непрерывными. На рисунке 103 изображён график функции, которая непрерывна на промежутках  $[a; c]$  и  $(c; b]$ , но разрывна в точке  $x = c$  и потому не является непрерывной на всём отрезке  $[a; b]$ . Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) число  $h$ , где  $h \neq 0$ , может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число  $x + h$  должно принадлежать промежутку, на котором определена функция  $f(x)$ . Если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

# Определение

- Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то её называют *непрерывной на этом интервале*. Например, функция  $f(x)$ , график которой изображён на рисунке 103, непрерывна на интервале  $(a; c)$ , но не является непрерывной на интервале  $(a; b)$ . Отметим, что если функция имеет производную на некотором интервале, то она непрерывна на этом интервале.

*Обратное утверждение неверно.* Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция  $y = |x|$  непрерывна при всех значениях  $x$ , но не имеет производной в точке  $x = 0$ .

Действительно,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

и поэтому разностное отношение  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$  не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ .

Ещё пример: функция  $y = |\log_2 x|$  непрерывна на промежутке  $(0; +\infty)$ , но не имеет производной в точке  $x = 1$  (рис. 104). \*

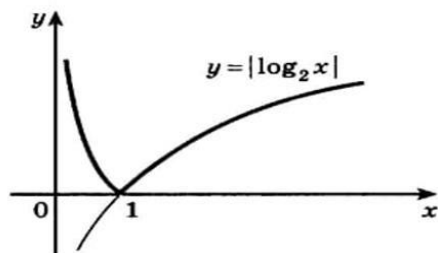


Рис. 104





следующие формулы для производных.

$$C' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0), \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Четыре последние формулы являются формулами производной степенной функции  $f(x) = x^p$  для  $p = 2, 3, -1, \frac{1}{2}$ . Их можно записать так:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, \quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$
$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \quad (1)$$

$$(x^p)' = px^{p-1}. \quad (1)$$

Эта формула применима при тех значениях  $x$ , при которых её правая часть имеет смысл.

$$\text{Например, } (x^5)' = 5x^4, \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}},$$

$$(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}.$$

Пользуясь формулами  $(x^p)' = px^{p-1}$  и  $(kx + b)' = k$ , можно найти производные степенной и линейной функций, например  $(x^7)' = 7x^6$ ,  $(3x - 1)' = 3$ . В более сложных случаях, например при нахождении производной функции  $(3x - 1)^7$ , можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk (kx + b)^{p-1}. \quad (2)$$

# примеры

**Задача 4** Вычислить  $f'(-3)$ , если  $f(x) = \sqrt{4-7x}$ .

► Запишем данную функцию так:  $f(x) = (-7x+4)^{\frac{1}{2}}$ .

По формуле (2) находим  $f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$ .

При  $x = -3$  получаем  $f'(-3) = -\frac{7}{2} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} = -0,7$ . ◁

**Задача 5\*** Доказать, что  $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  на промежутке:

1)  $x > 0$ ; 2)  $x < 0$ .

► 1) Если  $x > 0$ , то  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  и по формуле (1) получаем  $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ .

2) Если  $x < 0$ , то  $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{(-x)} = -(-x)^{\frac{1}{3}}$  и по формуле (2) получаем

$$(\sqrt[3]{x})' = (-1) \cdot \frac{1}{3} (-1) (-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \triangleleft$$



При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций  $f(x)$  и  $g(x)$  имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

- Обозначим  $f(x) + g(x) = F(x)$ . Тогда  $F(x+h) - F(x) = f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$ . Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

При  $h \rightarrow 0$  первая дробь в правой части имеет предел, равный  $f'(x)$ ; вторая дробь имеет предел, равный  $g'(x)$ . Поэтому левая часть имеет предел, равный  $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ , т. е. справедливо равенство (1).  $\circ$

Аналогично доказывается, что производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.





3. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (3)$$

**Задача 3** Найти производную функции  $f(x)g(x)$ , если  $f(x) = 3x^2 - 5$ ,  $g(x) = 2x + 7$ .

► По формуле (3) находим

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))' = \\ & = (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' = \\ & = 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5) \cdot 2 = 18x^2 + 42x - 10. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

**Задача 4** Найти значения  $x$ , при которых значение производной функции  $f(x) = (x - 1)^9(x + 2)^6$  равно нулю.

► По формуле (3) получаем  $f'(x) = 9(x - 1)^8(x + 2)^6 + 6(x - 1)^9(x + 2)^5 = 3(x - 1)^8(x + 2)^5(3x + 6 + 2x - 2) = 3(x - 1)^8(x + 2)^5(5x + 4)$ .

Решая уравнение  $3(x - 1)^8(x + 2)^5(5x + 4) = 0$ , находим, что  $f'(x) = 0$  при

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -0,8. \quad \triangleleft$$

Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы при условии, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производную в точке  $x$ , причём в равенстве (4)  $g(x) \neq 0$ .

### 5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию  $F(x) = \log_2(x^2 + 1)$ . Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию  $f(y) = \log_2 y$ , где  $y = g(x) = x^2 + 1$ , т. е. как функцию  $f(y)$ , аргумент которой также является функцией  $y = g(x)$ . Иными словами, сложная функция — это функция от функции  $F(x) = f(g(x))$ . Производная сложной функции находится по формуле  $F'(x) = f'(y) g'(x)$ , где  $y = g(x)$ , т. е. по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x). \quad (5)$$



*Элементарными функциями* называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой  $U(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ ; для нахождения силы тока  $I(t)$  нужно уметь находить производную  $U'(t)$ , так как  $I(t) = U'(t)$ .

## 1. Производная показательной функции.

Показательная функция  $f(x) = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой её точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием  $e$  по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad (1)$$

так как  $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$ . В курсе высшей математики доказывается, что функция  $e^x$  обладает замечательным свойством: её производная также равна  $e^x$ , т. е.

$$(e^x)' = e^x. \quad (2)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}. \quad (3)$$



## 2\*. Производная логарифмической функции.

Логарифмическую функцию  $\log_a x$  с любым основанием  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  можно выразить через логарифмическую функцию с основанием  $e$  с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (5)$$

Производная функции  $\ln x$  выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad (6)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b}. \quad (7)$$

#### 4. Применение правил дифференцирования и формул производных к решению задач.

Приведём сводную таблицу.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$((x)^p)' = px^{p-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

# геометрический смысл производной

Графиком линейной функции  $y = kx + b$  является прямая (рис. 109). Число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол  $\alpha$  — *углом между этой прямой и осью  $Ox$* .

Если  $k > 0$ , то  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (рис. 109, а); в этом случае функция возрастает.

Если  $k < 0$ , то  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  (рис. 109, б); в этом случае функция  $y = kx + b$  убывает.

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции  $y = f(x)$ .

Пусть точки  $A$  и  $M$  принадлежат графику функции  $y = f(x)$  (рис. 110).

Пусть  $x$  и  $x + h$  — абсциссы точек  $A$  и  $M$  (рис. 111), тогда их ординаты равны  $f(x)$  и  $f(x + h)$ . Из треугольника  $ACM$  (рис. 111), где  $C(x + h; f(x))$ , найдём угловой коэффициент  $k$  прямой  $AM$ , который зависит от  $h$  (его можно рассматривать как функцию от  $h$  и писать  $k(h)$ ). Имеем

$$k(h) = \operatorname{tg} \angle CAM = \frac{MC}{AC},$$

где  $MC = f(x + h) - f(x)$ ,  $AC = h$ , т. е.

$$k(h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

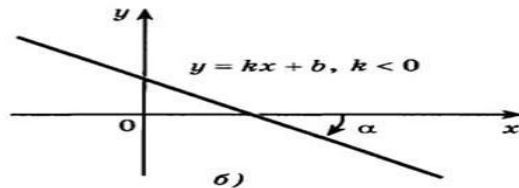
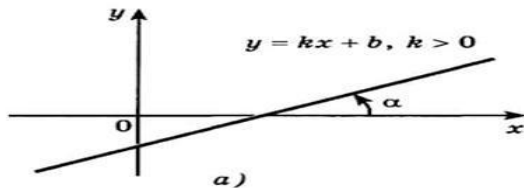


Рис. 109

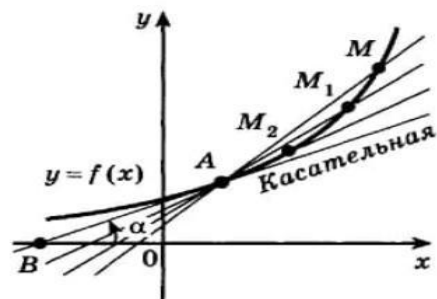


Рис. 110

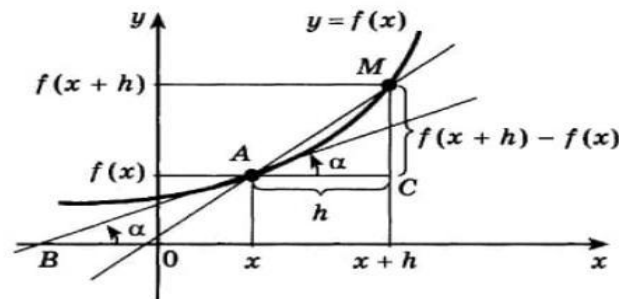


Рис. 111

Пусть число  $x$  фиксировано, а  $h \rightarrow 0$ , тогда точка  $A$  неподвижна, а точка  $M$ , двигаясь по графику, стремится к точке  $A$  (рис. 111). При этом прямая  $AM$  стремится занять положение некоторой прямой, которую называют *касательной к графику функции*  $y = f(x)$ , потому что  $\lim_{h \rightarrow 0} k(h)$  существует и равен  $f'(x)$ . Итак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке  $(x; f(x))$ .