# производная.

## и её геометрический смысл

определение.Число А называется пределом функции f(x) в точке X0 и обозначается lim f(x) =A , если для любого числа E>0 существует такое число б>0 что для всех X удовлетворяющих условию |x-x0|<б где X не равен X0, выполняется неравенство |f(x)-A| становятся как угодно малыми

Поясним это определение предела функции. Число $A$ является пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, если значения $f(x)$ при $x$, достаточно близких к $x_0$, становятся как угодно близкими к числу $A$, т. е. значения $|f(x) - A|$ становятся как угодно малыми.

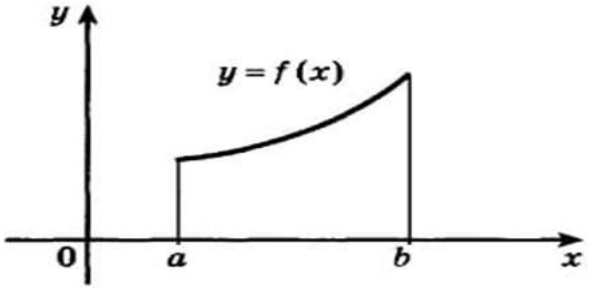


*Рис. 102*

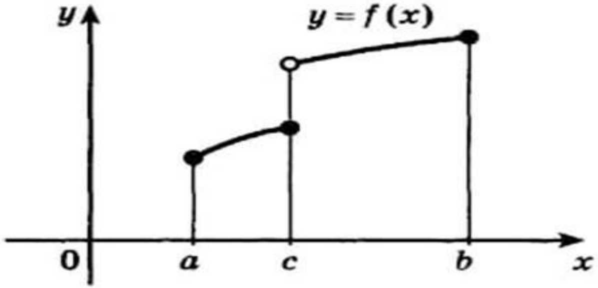


*Рис. 103*

Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число $\varepsilon$ и убедиться в том, что для всех $x$, отличающихся от $x_0$ меньше чем на некоторое число $\delta$, модуль разности между $f(x)$ и числом $A$ будет меньше взятого числа $\varepsilon$.

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.
Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке* (рис. 102).
Приведём примеры функций, которые не являются непрерывными. На рисунке 103 изображён график функции, которая непрерывна на промежутках $[a; c]$ и $(c; b]$, но разрывна в точке $x = c$ и потому не является непрерывной на всём отрезке $[a; b]$.
Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) число $h$, где $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число $x + h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция $f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x$, то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

# Определение

- Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии ,что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то её называют *непрерывной на этом интервале*. Например, функция $f(x)$, график которой изображён на рисунке 103, непрерывна на интервале $(a; c)$, но не является непрерывной на интервале $(a; b)$. Отметим, что если функция имеет производную на некотором интервале, то она непрерывна на этом интервале.

*Обратное утверждение неверно*. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция $y = |x|$ непрерывна при всех значениях $x$, но не имеет производной в точке $x = 0$. Действительно,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

и поэтому разностное отношение $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Ещё пример: функция $y = |\log_2 x|$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$, но не имеет производной в точке $x = 1$ (рис. 104). *

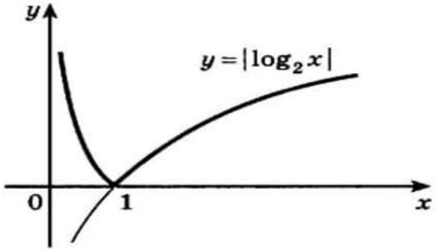


*Рис. 104*

# Производная степенной функции

следующие формулы для производных:

$$C' = 0, \ (x)' = 1, \ (x^2)' = 2x, \ (x^3)' = 3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \ (x \neq 0), \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x > 0).$$

Четыре последние формулы являются формулами производной степенной функции $f(x) = x^p$ для $p = 2, \ 3, \ -1, \ \frac{1}{2}$. Их можно записать так:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, \quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)\, x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \qquad (1)$$

$$(x^p)' = px^{p-1}. \tag{1}$$

Эта формула применима при тех значениях $x$, при которых её правая часть имеет смысл.

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

Пользуясь формулами $(x^p)' = px^{p-1}$ и $(kx + b)' = k$, можно найти производные степенной и линейной функций, например $(x^7)' = 7x^6$, $(3x - 1)' = 3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x - 1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk\,(kx + b)^{p-1}. \tag{2}$$

примеры

**Задача 4** Вычислить $f'(-3)$, если $f(x)=\sqrt{4-7x}$.

▶ Запишем данную функцию так: $f(x)=(-7x+4)^{\frac{1}{2}}$.

По формуле (2) находим $f'(x)=-\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

При $x=-3$ получаем $f'(-3)=-\frac{7}{2}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}=-0{,}7$. ◁

**Задача 5*** Доказать, что $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на промежутке:

1) $x>0$; 2) $x<0$.

▶ 1) Если $x>0$, то $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Если $x<0$, то $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{(-x)}=-(-x)^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (2) получаем

$$(\sqrt[3]{x})'=(-1)\cdot\frac{1}{3}(-1)(-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$ ◁

# правила дифференцирования

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \qquad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

● Обозначим $f(x)+g(x)=F(x)$. Тогда $F(x+h)-F(x)=f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$. Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

При $h \to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$; вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому левая часть имеет предел, равный $F'(x) = f'(x) + g'(x)$, т. е. справедливо равенство (1). ○

Аналогично доказывается, что производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.

Производная произведения

(f(x)g(x))”=f”(x)g(x)+f(x)g”(x)

**3.** **Производная произведения:**

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x). \qquad (3)$$

**Задача 3** Найти производную функции $f(x)\,g(x)$, если $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x + 7$.

▶ По формуле (3) находим

$$(f(x)\,g(x))' =$$
$$= (3x^2 - 5)'\,(2x + 7) + (3x^2 - 5)\,(2x + 7)' =$$
$$= 6x\,(2x + 7) + (3x^2 - 5) \cdot 2 = 18x^2 + 42x - 10. \ \triangleleft$$

**Задача 4** Найти значения $x$, при которых значение производной функции $f(x) = (x - 1)^9\,(x + 2)^6$ равно нулю.

▶ По формуле (3) получаем $f'(x) = 9\,(x - 1)^8\,(x + 2)^6 + 6\,(x - 1)^9\,(x + 2)^5 = 3\,(x - 1)^8\,(x + 2)^5\,(3x + 6 + 2x - 2) = 3\,(x - 1)^8\,(x + 2)^5\,(5x + 4)$.

Решая уравнение $3\,(x - 1)^8\,(x + 2)^5\,(5x + 4) = 0$, находим, что $f'(x) = 0$ при

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -0{,}8. \ \triangleleft$$

Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы при условии, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную в точке $x$, причём в равенстве (4) $g(x) \neq 0$.

## 5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $F(x) = \log_2(x^2 + 1)$. Эту функцию можно рассматривать как *сложную функцию* $f(y) = \log_2 y$, где $y = g(x) = x^2 + 1$, т. е. как функцию $f(y)$, аргумент которой также является функцией $y = g(x)$. Иными словами, *сложная функция — это функция от функции* $F(x) = f(g(x))$. Производная сложной функции находится по формуле $F'(x) = f'(y)\, g'(x)$, где $y = g(x)$, т. е. по формуле

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\, g'(x). \qquad (5)$$

# Производные некоторых элементарных функций

*Элементарными функциями* называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$; для нахождения силы тока $I(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $I(t) = U'(t)$.

**1. Производная показательной функции.**

Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой её точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием $e$ по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \tag{1}$$

так как $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция $e^x$ обладает замечательным свойством: её производная также равна $e^x$, т. е.

$$(e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}. \qquad (3)$$

**2*. Производная логарифмической функции.** Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием $e$ с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{5}$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0. \tag{6}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln (kx + b))' = \frac{k}{kx + b}. \tag{7}$$

**4. Применение правил дифференцирования и формул производных к решению задач.**

Приведём сводную таблицу.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),\quad (cf(x))' = cf'(x),$$

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)},$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

$$((x)^p)' = px^{p-1},\quad (e^x)' = e^x,\quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(a^x)' = a^x\ln a,\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x.$$

# геометрический смысл производной

графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 109). Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол $\alpha$ — *углом между этой прямой и осью* $Ox$.

Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 109, *а*); в этом случае функция возрастает.

Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ (рис. 109, *б*); в этом случае функция $y = kx + b$ убывает.

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y = f(x)$.

Пусть точки $A$ и $M$ принадлежат графику функции $y = f(x)$ (рис. 110).

Пусть $x$ и $x + h$ — абсциссы точек $A$ и $M$ (рис. 111), тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x + h)$. Из треугольника $ACM$ (рис. 111), где $C\ (x + h;\ f(x))$, найдём угловой коэффициент $k$ прямой $AM$, который зависит от $h$ (его можно рассматривать как функцию от $h$ и писать $k(h)$). Имеем

$$k(h) = \operatorname{tg}\angle CAM = \frac{MC}{AC},$$

где $MC = f(x + h) - f(x)$, $AC = h$, т. е.

$$k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$

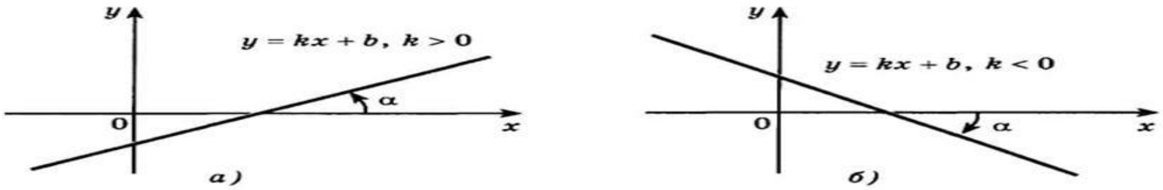


*Рис. 109*

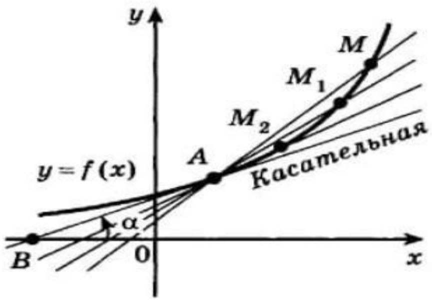


*Рис. 110*

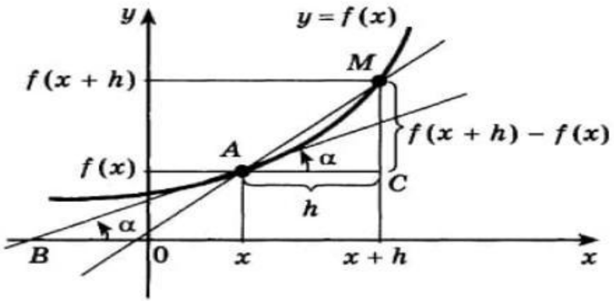


*Рис. 111*

Пусть число $x$ фиксировано, а $h \to 0$, тогда точка $A$ неподвижна, а точка $M$, двигаясь по графику, стремится к точке $A$ (рис. 111). При этом прямая $AM$ стремится занять положение некоторой прямой, которую называют *касательной к графику функции* $y = f(x)$, потому что $\lim\limits_{h \to 0} k(h)$ существует и равен $f'(x)$. Итак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

**Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке $x$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.**