Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Ряды. Лекция 25 сентября 2020 года

Доказательство теоремы Даламбера

1) Из условия имеем

$$a_{k+1} \le q a_k, \quad k = n_0, n_0+1, \ldots \quad (*)$$

Возьмём произвольное $n > n_0$ и напишем неравенство $(*)$ для $k = n_0, n_0+1, \ldots, n-1$

$$a_{n_0+1} \le q a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} \le q a_{n_0+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n \le q a_{n-1}$$

Перемножая все эти неравенства и сокращая на отличные от нуля $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n-1}$ получим $a_n \le \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n, \quad n \ge n_0$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Докажем второе утверждение.

По условию $a_{k+1} \ge a_k$, для всех $k = n_0, n_0+1, \ldots$

Следовательно, при $n \ge n_0$ имеет место цепочка неравенств $a_n \ge a_{n-1} \cdots \ge a_{n_0+1} \ge a_{n_0}$

То есть для каждого $n \ge n_0$ имеем

$a_n \ge a_{n_0} > 0$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$ и поэтому согласно необходимому признаку сходимости ряда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

\#

Теорема (Признак Даламбера в предельной форме)

Если $a_n > 0$ для $\forall n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при

$q > 1$ этот ряд расходится.

Док-во: Так как $a_n > 0$ для $\forall n \in N$, то $q \geq 0$. Если q — конечное число, то согласно определению предела

для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

то есть имеет место неравенство

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \quad \text{для } \forall n \geq n_0$$

Пусть $q < 1$. Возьмём $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$

Тогда для $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0; 1)$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Если q — конечное число, то возьмём $\varepsilon = q - 1 > 0$. Тогда существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - (q - 1) = 1$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если же $q=+\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, так как $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. #

<u>Замечание.</u> Если $q=1$ или предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, то данный признак не дает ответ на вопрос о сходимости ряда.

<u>Теорема (радикальный признак Коши)</u>

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geq 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:

1) Если существует $q \in (0;1)$ и номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ для всех $n \geq n_0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если найдётся строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ натуральных чисел $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

<u>Док-во</u> 1) Возводя неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ в n-ую степень, получим

$$a_n \leq q^n \text{ для } \forall n \geq n_0$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Так как $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то и $a_{n_k} \geq 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и следовательно согласно необходимому признаку сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится #

Следствие

Теорема (радикальный признак Коши в предельной форме)

Если $a_n \geq 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

Док-во. Так как $a_n \geq 0$, то $q \geq 0$. Если $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \in [0;1)$, то по определению верхнего предела, как крайней правой предельной точки последовательности для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0$:

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ тогда $\exists n_0$: что согласно $(*)$ для $\forall n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0;1).$$

Следовательно, согласно радикальному признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q>1$. (q – конечное или $q=+\infty$)
Так как q – частичный предел, то существует последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q.$$ Так как $q>1$, то

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \ge 1 \text{ для } \forall\, n_k \ge n_{k_0},$$

то есть для строго возрастающей последовательности $\{n_k\}$ имеем $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \ge 1$.

Следовательно, по радикальному признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание. При $q=1$ этот признак не даёт ответ на вопрос о сходимости ряда. Требуется дополнительное исследование.

§ Специальный признак сравнения.
Признак Раабе, Гаусса.

Теорема (специальный признак сравнения)
Пусть $a_n>0$, $b_n>0$ и $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ для } \forall\, n \ge n_0 \qquad (*)$$

Тогда 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Док-во: Запишем неравенство (*) для $k = n_0, n_0+1, \dots, (n-1)$:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \le \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \le \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0}}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$a_n \le \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n \quad \text{для } \forall n \ge n_0 \qquad (**)$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$ также сходится. Тогда из (**) следует по признаку сравнения, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Методом „от противного" докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда из предыдущего пункта следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также

сходится, что противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает утверждение #

Теорема (Признак Раабе) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0$ для $\forall n \in N$

1) $\exists\ r > 1$ и $\exists\ n_0 \in N$ такие что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) если $\exists\ n_0 \in N$ такое что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (**)$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Док-во. 1) из $(*)$ следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n} \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (A)$$

Возьмем $p \in (1; r)$. Так как

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} = p$, то из определения предела последовательности следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ n_1 \in N : \forall n > n_1 \Longrightarrow$

$$\left| \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} - p \right| < \varepsilon \quad \text{или}$$

$$p-\varepsilon<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}<p+\varepsilon \text{ для } \forall n\geq n_0 \quad (***)$$

Возьмём $\varepsilon = r-p>0$. Тогда $\exists n_1\in\mathbb{N}$:

из $(***) \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1<[p+r-p]\cdot\frac{1}{n}=\frac{r}{n}$

или $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p<1+\frac{r}{n}$ для $\forall n\geq n_1$ (B)

Из (A) и (B) следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \text{ для всех } n>\max(n_0,n_1)=n_2$$

Следовательно, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{\left(\frac{1}{n}\right)^p}$ для $\forall n>n_2$ (C)

Так как $p>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p$ сходится.

Тогда из (C) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ согласно специальному признаку сравнения.

2) Из (**) следует, что при всех $n\geq n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n} \text{ или } \frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{n}{n+1}=\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (D)$$

Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Тогда из (D) и специального признака сравнения следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

<u>Теорема (Признак Раабе в предельной форме)</u> Если $a_n>0$ для $\forall n\in\mathbb{N}$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$, то при $r>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $r<1$ этот ряд расходится.

Док-во. Если r — конечное число, то из определения предела последовательности следует, что для $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists n_0\in N: \forall n\geq n_0$

$$r-\varepsilon<n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<r+\varepsilon \text{ для } \forall n>n_0 \quad (*)$$

Пусть $r>1$ (конечное). Возьмём $\varepsilon=\frac{r-1}{2}>0$

Тогда $\exists n_0\in N$ такое что из $(*)$ следует

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r-\frac{r-1}{2}=\frac{r+1}{2}=r_1>1$$

Следовательно, по теореме Раабе ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $r=+\infty$, то $\exists n_0: n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>2$ для $\forall n\geq n_0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Раабе.

2) Пусть $r<1$. Тогда возьмём $\varepsilon=1-r>0$

Тогда $\exists n_0\in N$ такое, что из $(*)$ следует

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<r+(1-r)=1 \text{ для всех } n\geq n_0$$

Следовательно, из теоремы Раабе следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если $r=-\infty$, то $\exists n_0\in N: \forall n\geq n_0 \Longrightarrow$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$$

и тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по признаку Раабе. #

<u>Замечание</u> Если $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1$ или если этот предел не существует, то данный признак не дает ответ на вопрос о сходимости ряда.

<u>Теорема (признак Гаусса)</u>. Если для ряда $\sum_{n=1} a_n$, в котором $a_n>0$ найдутся номер $n_0\in N$ и числа $\lambda, \mu, \alpha>0$ и $C>0$ такие, что отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ можно представить в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}} \text{ где } |\theta_n|\le C \text{ для } \forall n\ge n_0 \quad (*)$$

Тогда 1) при $\lambda>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) при $\lambda<1$ ряд расходится

3) при $\lambda=1$ и $\mu>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

4) при $\lambda=1$ и $\mu\le 1$ ряд расходится.

<u>Док-во</u>: Из (*) следует, что $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda$, то есть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q=\frac{1}{\lambda}$ (если $\lambda=0$, то $q=+\infty$). Поэтому согласно признаку Даламбера в предельной форме 1-е и 2-е утверждения теоремы доказаны.

Далее пусть $\lambda=1$. Тогда в этом случае из (*) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\mu+\frac{\theta_n}{n^\alpha}\right)=\mu$$

Поэтому согласно признаку Раабе в предельной форме следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\mu>1$ и расходится при $\mu<1$. Следовательно, 3е) утверждение теоремы и 4е) утверждение при $\mu<1$ доказаны.

При $\lambda=\mu=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, что можно доказать. #

§ Знакопеременные числовые ряды.

Опр) Ряд называется знакопеременным, если для $\forall N_0\in\mathbb{N}$ $\exists n_1>N_0$ и $n_2>N_0$: $a_{n_1}>0$, а $a_{n_2}<0$

Абсолютная и условная сходимость

Опр) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится

Для знакоположительного ряда абсолютная сходимость эквивалентна просто сходимости. Поэтому абсолютная сходимость представляет интерес только для знакопеременных рядов.

Теорема Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Док-во) Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то

по критерию Коши для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:
$\forall m > n > N_0(\varepsilon) \Rightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$, Но тогда для этих же m и n имеем:
$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится #

Опр: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.

§ Знакочередующиеся ряды

Теорема (признак Лейбница. Оценка остатка)
Если числовая последовательность $\{u_n\}_1^{\infty}$ монотонно не возрастает и стремится к нулю $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \dots \ge u_n \ge \dots$ и

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (*),$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится

Док-во: Из $(*)$ следует, что $u_n \ge 0$
Рассмотрим $S_{2m} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2m-1} + a_{2m} =$
$= u_1 - u_2 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m}$. Мы видим, что
$S_{2m+2} = S_{2m} + u_{2m+1} - u_{2m+2} \ge S_{2m}$. С другой стороны $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) -$
$- u_{2m} \le u_1$. Следовательно, S_{2m} монотонно

возрастает и ограничена сверху. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$.
Но частичная сумма нечётного порядка
$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$
Следовательно, из ⊛ следует, что
$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$$
Отсюда следует, что исходный ряд
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится к сумме S. #

Следствие. (оценка остатка)
Пусть выполняются условия теоремы Лейбница. Тогда $|S - S_n| \le u_{n+1}$

Док-во. Ранее было доказано, что S_{2m} монотонно не убывая стремится к сумме ряда S (т.е $S_{2m} \nearrow S$). С другой стороны $S_{2m+1} = S_{2m-1} - (u_{2m} - u_{2m+1}) \le S_{2m-1}$
Следовательно, частичные суммы нечётного порядка монотонно не возрастая стремятся к тому же пределу S (т.е $S_{2m+1} \searrow S$)
Поэтому для $\forall m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие неравенства
$$S_{2m} \le S \le S_{2m-1} \qquad (1)$$
$$S_{2m} \le S \le S_{2m+1} \qquad (2)$$

Из неравенства ① следует, что

$$0 \le S_{2m-1} - S \le S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m} \quad ③$$

А из неравенства ② следует, что

$$0 \le S - S_{2m} \le S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1} \quad ④$$

Из ③ при нечетных и ④ при четных n вытекает неравенство

$$|S - S_n| \le u_{n+1} \qquad \#$$