

Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Регр. лекция 25 сентября 2020 года

Доказательство Теоремы Даламбера

1) из условия имеем

$$a_{k+1} \leq q a_k, \quad k = n_0, n_0+1, \dots \quad (*)$$

возьмем произвольное $n > n_0$ и применим неравенство $(*)$ для $k = n_0, n_0+1, \dots, n-1$

$$a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1}$$

$$\dots$$

$$a_n \leq q a_{n-1}$$

Перемножая все эти неравенства и сокращая на отрезке от нуля $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_{n-1}$

$$\text{получим } a_n \leq \frac{a_{n_0} q^n}{q^{n_0}}, \quad n \geq n_0$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0} q^n}{q^{n_0}}$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Докажем второе утверждение.

По условию $a_{k+1} \geq a_k$, для всех $k = n_0, n_0+1, \dots$

Следовательно, при $n \geq n_0$ имеет место цепочка неравенств $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_{n_0+1} \geq a_{n_0}$

То есть для каждого $n \geq n_0$ имеем

$$a_n \geq a_{n_0} > 0. \quad \text{Поскольку } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ и}$$

поэтому согласно необходимому признаку сходимости ряда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

#

- 2 -

Теорема (Признак Даламбера в предельной форме)

Если $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,
то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ этот ряд расходится.

Док-во: Так как $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то $q \geq 0$. Если q — конечное число, то согласно определению предела для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

то есть имеет место неравенство

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \quad \text{для } \forall n \geq n_0$$

Пусть $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$

Тогда для $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_{\frac{1}{2}} \in (0; 1)$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Если q — конечное число, то возьмем $\varepsilon = q - 1 > 0$. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - (q - 1) = 1$$

-3-

Скорее всего, совместно признак Даламбера $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходуется.

Если же $q = +\infty$, то $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходуется, так как $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. #

Замечание. Если $q = 1$ или предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, то данный признак не даёт ответ на вопрос о сходимости ряда.

Теорема (радикальный признак Коши)

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geq 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$

справедливы следующие утверждения:

1) Если существует $q \in (0, 1)$ и номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ для всех $n \geq n_0$, то $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если найдётся строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Док-во 1) Возводя неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ в n -ую степень, получим

$$a_n < q^n \text{ для } \forall n \geq n_0$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Так как $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то и $a_{n_k} \geq 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ и следовательно согласно необходимому признаку сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. #

Следствие

Теорема (радикальный признак Коши в

предельной форме)

Если $a_n \geq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$

ряд расходится.

Док-во. Так как $a_n \geq 0$, то $q \geq 0$.

Если $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0; 1)$, то по определению верхней точки предела, как крайней правой предельной точки последовательности для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0$:

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ тогда $\exists n_0$:

что согласно $(*)$ для $\forall n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0; 1).$$

Следовательно, согласно радикальному признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. (q - конечное или $q = +\infty$)

Так как q - частичный предел, то существует последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \text{ такая, что}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q. \text{ Так как } q > 1, \text{ то}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1 \text{ для } \forall n_k \geq n_0,$$

то если мы сорго возрастающей последовательности $\{n_k\}$ ищем $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$.

Следовательно по радикальному признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание При $q = 1$ этот признак не даёт ответ на вопрос о сходимости ряда. Требуется дополнительное исследование.

§ Специальный признак сравнения.

Признак Раабе, Гаусса.

Теорема (специальный признак сравнения)

Пусть $a_n > 0, b_n > 0$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

Тогда 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Док-во Запишем неравенство (*) для $k = n_0, n_0+1, \dots, (n-1)$:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}$$

$$\dots$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n \quad \text{для } \forall n \geq n_0 \quad (**)$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$ также сходится. Тогда из (**)
следует по признаку сравнения, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Методом
"от противного" докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также
расходится. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда из предыдущего
пункта следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также

-7-

сходится, это противоречит предположе-
нию. Полученное противоречие и дока-
зывает утверждение #

Теорема (Признак Рааде) Для ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$

1) $\exists z > 1$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое что

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq z \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) если $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое что

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (**)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Док-во. 1) из $*$ следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{z}{n} \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (A)$$

Возьмем $p \in (1; z)$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} = p, \text{ то из определения}$$

предела последовательности следует, что

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{(1 + \frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} - p \right| < \varepsilon \text{ или}$$

-8-

$$p - \varepsilon < \frac{(1 + \frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} < p + \varepsilon \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (***)$$

Возьмем $\varepsilon = z - p > 0$. Тогда $\exists n_1 \in \mathbb{N}$:

из (***) $\Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^p - 1 < [p + z - p] \cdot \frac{1}{n} = \frac{z}{n}$

или $(1 + \frac{1}{n})^p < 1 + \frac{z}{n}$ для $\forall n \geq n_1$ (B)

Из (A) и (B) следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > (1 + \frac{1}{n})^p \text{ для всех } n > \max(n_0, n_1) = n_2$$

Следовательно, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < (\frac{n}{n+1})^p = \frac{(\frac{1}{n+1})^p}{(\frac{1}{n})^p}$ для $\forall n > n_2$ (C)

Так как $p > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится.

Тогда из (C) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ согласно специальной прищипке сравнения.

2) Из (***) следует, что при всех $n \geq n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} \text{ или } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{(\frac{1}{n+1})}{(\frac{1}{n})} \quad (D)$$

Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Тогда из (D) и специальной прищипки сравнения следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (Признак Раде в предельной форме) Если $a_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и

-9-

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \zeta$, то при $\zeta > 1$
ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $\zeta < 1$ этот ряд
расходится.

Док-во: Если ζ — конечное число, то из
определения предела последовательности
следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$
 $\zeta - \varepsilon < n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < \zeta + \varepsilon$ для $\forall n > n_0$ (*)
Пусть $\zeta > 1$ (конечное). Возьмем $\varepsilon = \frac{\zeta - 1}{2} > 0$
Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое что из (*) следует

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > \zeta - \frac{\zeta - 1}{2} = \frac{\zeta + 1}{2} = \zeta_1 > 1$$

Следовательно, по теореме Раабе ряд
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\zeta = +\infty$, то $\exists n_0 : n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 2$
для $\forall n \geq n_0$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
сходится по признаку Раабе.

2) Пусть $\zeta < 1$. Тогда возьмем $\varepsilon = 1 - \zeta > 0$
Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что из (*) следует

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < \zeta + (1 - \zeta) = 1 \text{ для всех } n \geq n_0$$

Следовательно, из теоремы Раабе следует,
что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если $\zeta = -\infty$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$$

-10-

и тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расхо́дится по признаку Раабе.

Замечание Если $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1$ или если этот предел не существует, то данный признак не даёт ответ на вопрос о сходимости ряда.

Теорема (признак Гаясса). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$ ка́ждый номер $n \in \mathbb{N}$ и числа $\lambda, \mu, \alpha > 0$ и $C > 0$ такие, что отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ можно представить в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\alpha+2}} \text{ где } |\theta_n| \leq C \text{ для } \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

тогда 1) при $\lambda > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходя́тся

2) при $\lambda < 1$ ряд расхо́дится

3) при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходя́тся

4) при $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$ ряд расхо́дится.

Док-во. Из $(*)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{\lambda}$ (если $\lambda = 0$, то

$q = +\infty$). Поэтому согласно признаку Даламбера в предельной форме 1-е и 2-е утверждения теоремы доказаны. Далее пусть $\lambda = 1$. Тогда в этом случае из $(*)$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu + \frac{\theta_n}{n^\lambda} \right) = \mu$$

Поэтому согласно признаку Рааде в предельной форме следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$. Следовательно, 3e) утверждение Дарема и 4e) утверждение при $\mu < 1$ доказаны.

При $\lambda = \mu = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, что можно доказать. #

§ Знакопеременные числовые ряды.

Опр Ряд называется знакопеременным, если для $\forall N_0 \in \mathbb{N} \exists n_1 > N_0$ и $n_2 > N_0 : a_{n_1} > 0$, а $a_{n_2} < 0$

Абсолютная и условная сходимость

Опр Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится

Для знакочередующегося ряда абсолютная сходимость эквивалентна простой сходимости. Поэтому абсолютная сходимость предвещает инверс только для знакопеременных рядов.

Теорема Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Док-во: Так как $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то

но критерия Коши для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:
 $\forall m > n > N(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$, Но тогда для
этих же m и n имеем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon. \text{ Следовательно, по}$$

критерия Коши следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
сходится ~~то~~

Опр! Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно
сходящимся.

§ Знакопеременные ряды

Теорема (признак Лейбница. Оценка остатка)

Если числовая последовательность $\{u_n\}_1^{\infty}$ мо-
ноotonно не возрастает и стремится к
нулю $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \text{(*)},$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится

Док-во! Из (*) следует, что $u_n \geq 0$

$$\text{Рассмотрим } S_{2m} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2m-1} + a_{2m} =$$

$$= u_1 - u_2 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m}. \text{ Мы видим, что}$$

$$S_{2m+2} = S_{2m} + u_{2m+1} - u_{2m+2} \geq S_{2m}. \text{ С другой}$$

$$\text{стороны } S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) -$$

$$- u_{2m} \leq u_1. \text{ Следовательно, } S_{2m} \text{ монотонно}$$

возрастает и ограничена сверху. Следовательно,
но, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$.

Но разная сумма четного порядка

$$S_{2m+1} = S_{2m} + U_{2m+1}$$

Следовательно, из $\textcircled{1}$ следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$$

Отсюда следует, что исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n \text{ сходится к сумме } S. \#$$

Следствие. (оценка остатка)

Пусть выполняются условия теоремы Лейбница. Тогда $|S - S_n| \leq U_{n+1}$

Док-во. Ранее было доказано, что S_{2m} монотонно не убывая стремится к сумме ряда S (т.е. $S_{2m} \nearrow S$). С другой стороны $S_{2m+1} = S_{2m} - (U_{2m} - U_{2m+1}) \leq S_{2m}$

Следовательно, разная сумма четного порядка монотонно не возрастая стремится к тому же пределу S (т.е. $S_{2m+1} \searrow S$)

Поэтому для $\forall m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие неравенства

$$S_{2m} \leq S \leq S_{2m-1} \quad \textcircled{1}$$

$$S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1} \quad \textcircled{2}$$

Из неравенства ⁻¹⁴⁻ (1) следует, что

$$0 \leq S_{2m-1} - S \leq S_{2m-1} - S_{2m} = U_{2m} \quad (3)$$

А из неравенства (2) следует, что

$$0 \leq S - S_{2m} \leq S_{2m+1} - S_{2m} = U_{2m+1} \quad (4)$$

Из (3) при четных n и (4) при четных n
вытекает неравенство

$$|S - S_n| \leq U_{n+1} \quad \#$$