Лабораторная работа 3

Математические модели электромеханических объектов управления

Математическое описание в пространстве состояний

Матрично-векторная математическая модель (МВММ) строится на основе системы дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gv & (1) \\ y = Cx + Du + Hv & (2) \end{cases}$$

(1) → уравнение состояний

(2) → уравнение наблюдений

x, u, v, y - вектора A, B, C, D, G, H - матрицы

$A \rightarrow n \times n$ - *системная матрица* (характеризует фундаментальные свойства объекта или системы, n – размерность объекта)

$B \rightarrow n \times m$ - матрица управлений (m – количество управляющих входов)

$G \rightarrow n \times r$ - матрица возмущений (r – количество возмущающих входов)

$C \rightarrow p \times n$ - матрица выходов (показывает взаимосвязь между переменными состояния и выходами, p – количество выходов)

$D \rightarrow p \times m$ - матрица взаимосвязей управлений с выходами

$H \rightarrow p \times r$ - матрица взаимосвязей возмущений с выходами

Построение МВ ММ по структурной схеме.

Алгоритм построения:

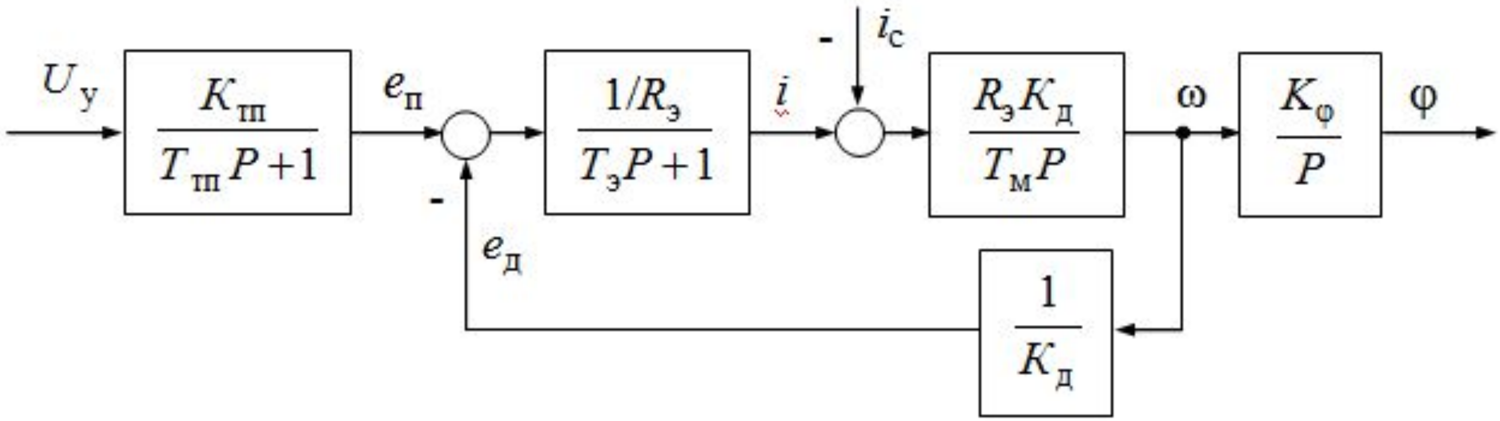
1) Исходная математическая модель, представленная в графической форме преобразуется к структуре, содержащей только элементарные звенья нулевого или первого порядков (ПЗ или ИЗ).

2) На выходах динамических звеньев первого порядка назначаются переменные состояния x_i; выходы звеньев нулевого порядка не обозначаются (они входят в МВ ММ в качестве коэффициентов).

3) Формируются сигналы на входах динамических звеньев, согласно полученной на первых этапах структуре, при этом участвуют как назначенные переменные состояния, так и сумматоры и звенья нулевого порядка.

4) Составляется система операторных алгебраических уравнений, после применения обратного преобразования Лапласа она преобразуется в систему дифференциальных уравнений в форме Коши, по которой строится МВ ММ.

а)



$$
\begin{cases}
\dot{\varphi} = K_{\varphi} \cdot \omega \ ; \\
\dot{\omega} = \dfrac{R_э K_д}{T_м}(i - i_с); \\
\dot{i} = \dfrac{1}{T_э}\left[\dfrac{1}{R_э}(E_п - \dfrac{1}{K_д}\omega) - i \right]; \\
\dot{E}_п = \dfrac{1}{T_{тп}}(K_{тп} U_у(kT) - E_п) \ .
\end{cases}
$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{CF},$$

где $\mathbf{X} = \left[\varphi,\ \omega,\ i,\ E_п\right]^T$ – вектор состояния; $\mathbf{U} = [U_у]$ – вектор управления; $\mathbf{F} = \left[i_c\right]$ – вектор возмущения.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = K_\varphi \cdot \omega\ ; \\ \dot{\omega} = \dfrac{R_э K_д}{T_м}(i - i_c); \\ \dot{i} = \dfrac{1}{T_э}\left[\dfrac{1}{R_э}(E_п - \dfrac{1}{K_д}\omega) - i\right]. \\ \dot{E}_п = \dfrac{1}{T_{тп}}(K_{тп} U_у(kT) - E_п \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & K_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R_э K_д}{T_м} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{R_э T_э K_д} & -\dfrac{1}{T_э} & \dfrac{1}{R_э T_э} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{T_{тп}} \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_{тп}}{T_{тп}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{R_э K_д}{T_м} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\varphi = \frac{ke}{p} \cdot \omega \rightarrow p \cdot \varphi = ke \cdot \omega \rightarrow \frac{d}{dt}\varphi = ke \cdot \omega$$

$$\dot{\varphi} = ke \cdot \omega$$

$$\omega = (i - i_c) \cdot \frac{R_э k_Д}{T_M \cdot p} \Rightarrow p \cdot \omega = (i - i_c) \cdot \frac{R_э \cdot k_Д}{T_M} \rightarrow$$

$$\dot{\omega} = (i - i_c) \frac{R_э \cdot k_Д}{T_M} \rightarrow \boxed{\dot{\omega} = i \cdot \frac{R_э \cdot k_Д}{T_M} - i_c \frac{R_э \cdot k_Д}{T_M}}$$

$$i = (E_n - E_Д) \cdot \frac{1/R_э}{T_э p + 1} \rightarrow i \cdot T_э p + i = (E_n - E_Д) \cdot \frac{1}{R_э} =$$

$$T_э \frac{d}{dt} i = (E_n - E_Д) \cdot \frac{1}{R_э} - i \Rightarrow$$

$$\dot{i} = \left(\left(E_n - \frac{1}{k_Д} \cdot \omega\right) \cdot \frac{1}{R_э} - i\right) \cdot \frac{1}{T_э} \Rightarrow$$

$$\dot{i} = \frac{1}{T_э}\left(\frac{1}{R_э}\left(E_n - \frac{1}{k_Д}\omega\right) - i\right) \rightarrow \boxed{\dot{i} = \frac{1}{T_э R_э} E_n - \frac{1}{T_э R_э k_Д} \omega - \frac{1}{T_э} \cdot i}$$

$$E_n = U_y(kT) \cdot \frac{k_{тп}}{T_{тп} \cdot p + 1} \rightarrow p E_n \cdot T_{тп} + E_n = U_y(kT) \cdot k_{тп}$$

$$\dot{E}_n = \frac{1}{T_{тп}}(k_{тп} U_y(kT) - E_n) \quad \dot{E}_n = \frac{1}{T_{тп}}(k_{тп} \cdot U_y(kT) - E_n)$$

$$\boxed{\dot{E}_n = U_y(kT) \cdot \frac{k_{тп}}{T_{тп}} - \frac{E_n}{T_{тп}}}$$

вект сост.
1 → сам перс.
4 вз самал тп

о2G

$$T_{MC} = T_T = 2 T_{\mu T}$$

$$k_c = 5 \div 10 / \omega_M$$

Зч

Пример Дан объект управления

$$W(p) = \frac{10}{5p^3 + 15p^2 + 20p + 10} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Необходимо построить МВ ММ

$$(5p^3 + 15p^2 + 20p + 10)Y(p) = 10U(p)$$

$$(p^3 + 3p^2 + 4p + 2)Y(p) = 2U(p)$$

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y^{(1)} + 2y = 2u$$

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2u - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1\ 0\ 0]$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

По системе дифференциальных уравнений, описывающих многомерную систему –

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} + x = 2u, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 2\dfrac{dx}{dt} + x, \end{cases}$$

полагая векторы состояния и входа –

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{U} = u \,.$$

записать уравнение состояния в развернутой форме.

Ответ:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot u \,.$$

- ошибка

$$\cancel{-\frac{1}{3}x+0}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}u$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

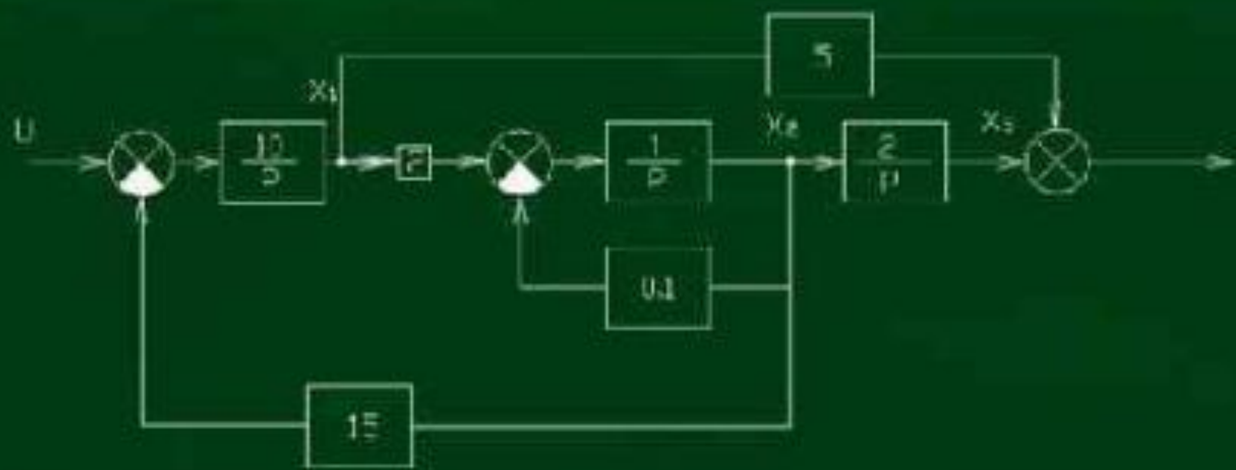
$$\frac{dz}{dt} = -4z - 3y + 2\frac{dx}{dt} + x =$$

$$= -4z - 3y + 2\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}u\right) + x =$$

$$= -4z - 3y - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}u + x =$$

$$= -4z - 3y + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}u$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -3 & -4 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} px_1 = 10(U - 15x_2) \\ px_2 = -0{,}1x_2 + 2x_1 \\ px_3 = 2x_2 \\ y = 5x_1 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -150 & 0 \\ 2 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$