

# **Лабораторная работа 3**

## **Математические модели электромеханических объектов управления**

## Математическое описание в пространстве состояний

Матрично-векторная математическая модель (МВММ) строится на основе системы дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gv & (1) \longrightarrow \text{уравнение состояний} \\ y = Cx + Du + Hv & (2) \longrightarrow \text{уравнение наблюдений} \end{cases}$$

$x, u, v, y$  - вектора  $A, B, C, D, G, H$  - матрицы

$A \rightarrow n \times n$  - системная матрица (характеризует фундаментальные свойства объекта или системы,  $n$  – размерность объекта)

$B \rightarrow n \times m$  - матрица управлений ( $m$  – количество управляющих входов)

$G \rightarrow n \times r$  - матрица возмущений ( $r$  – количество возмущающих входов)

$C \rightarrow p \times n$  - матрица выходов (показывает взаимосвязь между переменными состояния и выходами,  $p$  – количество выходов)

$D \rightarrow p \times m$  - матрица взаимосвязей управлений с выходами

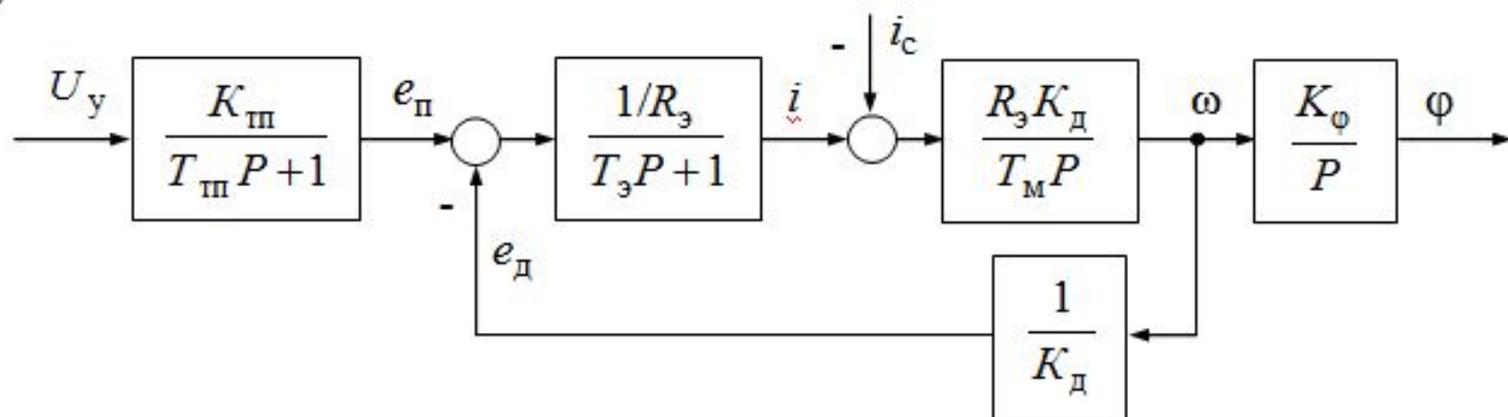
$H \rightarrow p \times r$  - матрица взаимосвязей возмущений с выходами

## Построение МВ ММ по структурной схеме.

### *Алгоритм построения:*

- 1) Исходная математическая модель, представленная в графической форме преобразуется к структуре, содержащей только элементарные звенья нулевого или первого порядков (ПЗ или ИЗ).
- 2) На выходах динамических звеньев первого порядка назначаются переменные состояния  $x_i$ ; выходы звеньев нулевого порядка не обозначаются (они входят в МВ ММ в качестве коэффициентов).  
Формируются сигналы на входах динамических звеньев, согласно полученной на первых этапах структуре, при этом участвуют как назначенные переменные состояния, так и сумматоры и звенья нулевого порядка.
- 3) Составляется система операторных алгебраических уравнений, после применения обратного преобразования Лапласа она преобразуется в систему дифференциальных уравнений в форме Коши, по которой строится МВ ММ.
- 4)

a)



$$\begin{cases} \dot{\phi} = K_{\varphi} \cdot \omega ; \\ \dot{\omega} = \frac{R_3 K_d}{T_M} (i - i_c); \\ \dot{i} = \frac{1}{T_3} \left[ \frac{1}{R_3} (E_n - \frac{1}{K_d} \omega) - i \right]; \\ \dot{E}_n = \frac{1}{T_m} (K_m U_y(kT) - E_n) . \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + BU + CF,$$

где  $X = [\varphi, \omega, i, E_n]^T$  – вектор состояния;  $U = [U_y]$  – вектор управления;  $F = [i_c]$  – вектор возмущения.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = K_\varphi \cdot \omega; \\ \dot{\omega} = \frac{R_s K_A}{T_m} (i - i_c); \\ i = \frac{1}{T_s} \left[ \frac{1}{R_s} (E_n - \frac{1}{K_A} \omega) - i \right]; \\ \dot{E}_n = \frac{1}{T_m} (K_m U_y(kT) - E_n) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_s K_A}{T_m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_s T_s K_A} & -\frac{1}{T_s} & \frac{1}{R_s T_s} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} =$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_m}{T_m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{R_s K_A}{T_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \frac{k_e \cdot W}{p} \rightarrow p \cdot \varphi = k_e \cdot W \rightarrow \frac{d}{dt} \varphi = k_e \cdot W$$

$$\varphi = k_e \cdot W$$

$$W = (i - i_c) \cdot \frac{R_2 \cdot K_A}{T_M \cdot p} \Rightarrow p \cdot W = (i - i_c) \cdot \frac{R_2 \cdot K_A}{T_M}$$

$$\dot{W} = (i - i_c) \frac{R_2 \cdot K_A}{T_M}$$

$$\dot{W} = \frac{i \cdot R_2 \cdot K_A}{T_M} - \frac{i_c \cdot R_2 \cdot K_A}{T_M}$$

$$i = (E_n - E_d) \cdot \frac{1}{R_2} \rightarrow i \cdot T_{ap} + i = (E_n - E_d) \cdot \frac{1}{R_2}$$

$$T_3 \frac{d}{dt} i = (E_n - E_d) \cdot \frac{1}{R_2} - i$$

$$\dot{i} = \left( \left( E_n - \frac{1 \cdot W}{R_2} \right) \cdot \frac{1}{R_2} - i \right) \cdot \frac{1}{T_3}$$

$$\dot{i} = \frac{1}{T_3} \left( \frac{1}{R_2} (E_n - \frac{1 \cdot W}{R_2}) - i \right)$$

$$\dot{i} = \frac{1}{T_3} \left( \frac{1}{R_2} E_n - \frac{1}{T_3 R_2 K_A} W - \frac{1}{T_3} i \right)$$

$$E_n = U_y(xT) \cdot \frac{K_M}{T_M \cdot p + 1} \rightarrow p E_n \cdot T_M + E_n = U_y(xT) \cdot K_M$$

$$\dot{E}_n = \frac{1}{T_M} (K_M U_y(xT) - E_n)$$

$$\dot{E}_n = \frac{1}{T_M} (K_M \cdot U_y(xT) - E_n)$$

$$\dot{E}_n = \frac{U_y(xT) \cdot K_M}{T_M} - \frac{E_n}{T_M}$$

best cost.  
 1 - can help  
 4 - can help

02G  
 24

$$T_{MC} = T_T = 2 T_{MT} \\
 K_c = 5 \cdot 10 / \text{WM}$$

Пример

Дан объект управления

$$W(p) = \frac{10}{5p^3 + 15p^2 + 20p + 10} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Необходимо построить МВ ММ

$$(5p^3 + 15p^2 + 20p + 10)Y(p) = 10U(p)$$

$$(p^3 + 3p^2 + 4p + 2)Y(p) = 2U(p)$$

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y^{(1)} + 2y = 2u$$

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2u - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

По системе дифференциальных уравнений, описывающих многомерную систему –

$$\begin{cases} 3 \frac{dx}{dt} + x = 2u, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 2 \frac{dx}{dt} + x, \end{cases}$$

полагая векторы состояния и входа –

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{U} = u,$$

записать уравнение состояния в развернутой форме.

*Ответ:*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot u.$$

- ошибка

~~$-\frac{1}{3}X + 0$~~

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}u$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

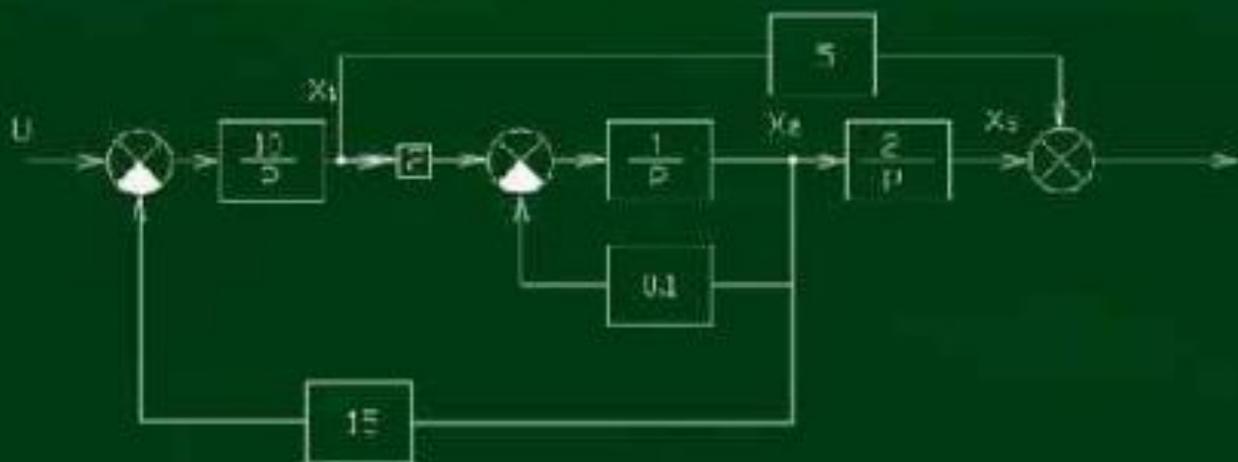
$$\frac{dz}{dt} = -4z - 3y + 2\frac{dx}{dt} + X =$$

$$= -4z - 3y + 2\left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}u\right) + X =$$

$$= -4z - 3y - \frac{2}{3}X + \frac{2}{3}u + X =$$

$$= -4z - 3y + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}u$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -3 & -4 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} px_1 = 10(U - 15x_2) \\ px_2 = -0,1x_2 + 2x_1 \\ px_3 = 2x_2 \\ y = 5x_1 + x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -150 & 0 \\ 2 & -0,1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [5 \ 0 \ 1]$$