



ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O . Это расстояние зависит от истекшего времени t , т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки*. Требуется найти скорость движения точки.

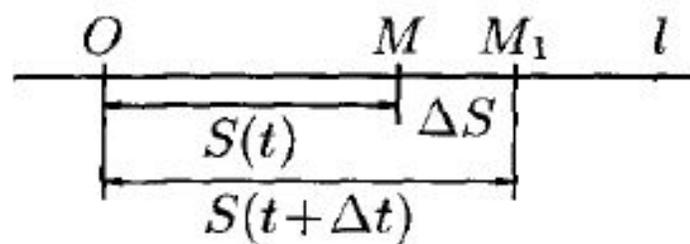


Рис 127

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt :

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Средняя скорость зависит от значения Δt : чем меньше Δt , тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t .

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или *мигновенной скоростью*). Обозначив эту скорость через V , получим

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M , то в момент времени $t + \Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1 , где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$

Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис.).

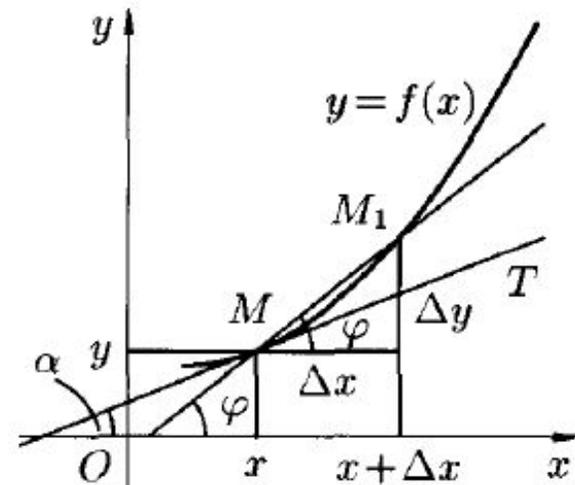
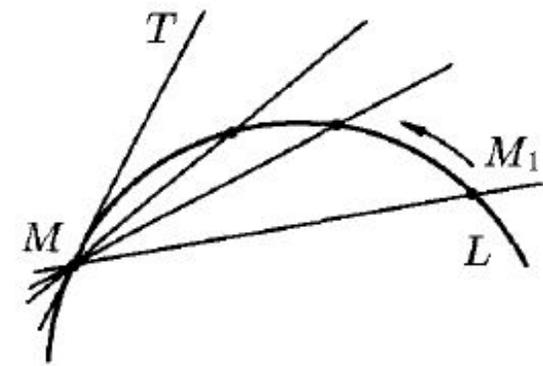
Прямую MM_1 , проходящую через эти точки, называют *секущей*.

Пусть точка M_1 , двигаясь вдоль кривой L , неограниченно приближается к точке M . Тогда секущая, поворачиваясь около точки M , стремится к некоторому предельному положению MT .

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1 , проходящей через точку M , когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M .

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x; y)$ не вертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол касательной с осью Ox .

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис.). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox . На рисунке видно, что угловой коэффициент



секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 , поворачиваясь около точки M , переходит в касательную. Угол $\varphi \rightarrow \alpha$, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

К нахождению пределов вида (20.1) и (20.2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

– если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t , то *сила тока в момент времени t* равна

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \quad (3)$$

– если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t , то *скорость химической реакции в момент времени t* равна

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \quad (4)$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0; 0)$ и $M(x; 0)$, то *линейная плотность стержня в точке x* есть

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \quad (5)$$

Пределы (1)–(5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют *производной*. Эти пределы можно записать так:

$$V = S'_t; \quad \operatorname{tg} \alpha = y'_x; \quad I = Q'_t; \quad V = N'_t; \quad S = m'_x$$

Определение производной; ее механический и геометрический смысл.

Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$.

Проведем следующие операции:

- аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx : $x + \Delta x \in (a; b)$;
- найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
- составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x , $f'(x)$; y' ; $\frac{dy}{dx}$; y'_x .

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример 1. Найти производную функции $y = C$, $C = \text{const}$.

Решение:

- Значению x даем приращение Δx ;
- находим приращение функции Δy : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;
- значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$;
- следовательно, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$, т. е. $(c)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение:

- Аргументу x даем приращение Δx ;
- находим Δy : $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;
- составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
- находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t . В этом заключается механический смысл производной.*

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то **производная y' есть скорость протекания этого процесса**. В этом состоит **физический смысл производной**.

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде

$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$, т. е. **производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x** . В этом заключается **геометрический смысл производной**.

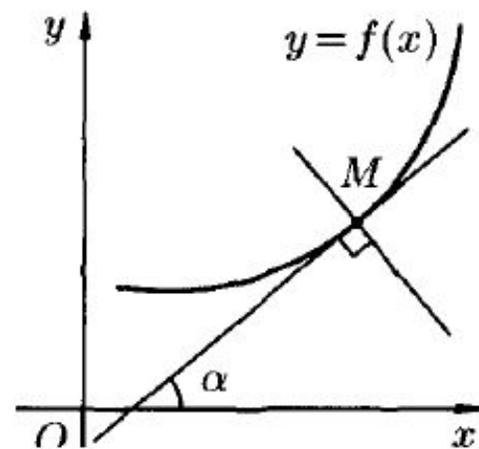
Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении ($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать

уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью к кривой**. Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$



Поэтому уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$
(если $f'(x_0) \neq 0$).

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x .

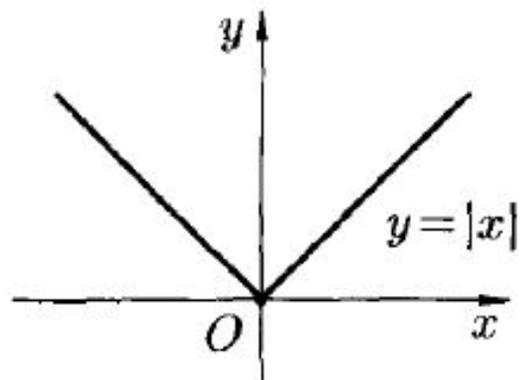
Следовательно, существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции,

имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Переходя к пределу, при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. А это и

означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x .



Обратная теорема неверна. непрерывная функция может не иметь производной. Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \quad \text{В таких случаях говорят,}$$

что функция имеет **односторонние производные** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a, b) , то функция называется *гладкой*.

Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

Пусть $y = uv$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot u(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad \text{т. е. } (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

При доказательстве теоремы использовалась теорема о связи непрерывности и дифференцируемости: так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то они и непрерывны, поэтому $\Delta v \rightarrow 0$ и $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Можно показать, что:

а) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$;

б) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Теорема 4. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0.$

Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x) + \Delta v)v(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ т. е. } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Следствие 1. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$

Следствие 2. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, где $c = \text{const}$

Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема 5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x , которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

По условию $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно

малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$, (6)

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$.

Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$,

поэтому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ где } \beta \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Подставив значение Δu в равенство (20.6), получим

$$\Delta y = y'_u (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha (u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т. е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Итак, для нахождения производной сложной функции надо **производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.**

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции.

Теорема 6. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \quad (7)$$

Если $\Delta y \rightarrow 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \rightarrow 0$.

И так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (7) следуют равенства

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ т. е. } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Таким образом, **производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.** Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Производные основных элементарных функций

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Дадим аргументу x приращение Δx . Функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left(x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n \right) - x^n = \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n.\end{aligned}$$

Тогда
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$
$$= n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = n \cdot x^{n-1}.$$

Таким образом, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

формула производной степенной функции справедлива при любом $n \in \mathbb{R}$ (не только натуральном).

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придав аргументу x приращение Δx , находим приращение функции Δy : $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью $e^x - 1 \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Итак, $y' = e^x$, т. е. $(e^x)' = e^x$.

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $a^x = e^{x \ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример. Найти производную функции $y = 7^{x^2 - 4x}$.

Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = (7^{x^2 - 4x})' = 7^{x^2 - 4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2 - 4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4).$$

**Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$**

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$,
 $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x' = \cos y \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Аналогично получаем, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Эту формулу
можно получить проще: так как $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x =$
 $= \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т. е. $y' = \frac{1}{x}$ или $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}. \quad \text{Таким образом, } (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

Решение: $y' = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 6} \cdot (x^4 - 2x^2 + 6)' = \frac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 6}$.

Производную логарифмической функции $y = \log_a x$ можно найти иначе. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Для функции $y = \sin x$ имеем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, получаем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x$,

т. е. $y' = \cos x$ или $(\sin x)' = \cos x$.

Найдем производную функции $y = \cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) = -\sin x, \quad \text{т. е. } (\cos x)' = -\sin x.$$

Для нахождения производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Проведем аналогичные операции, получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \cos 2x$.

Решение: $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2},$$

$$\text{т. е. } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример. Найти производные функций:

Решение: 1) $y = \arccos x^2$; $(\arccos x^2)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; $(x \cdot \operatorname{arctg} x)' = x' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$;

3) $y = (1 + 5x - 3x^3)^4$; $((1 + 5x - 3x^3)^4)' = 4(1 + 5x - 3x^3)^3 \cdot (5 - 9x^2)$;

4) $y = \arccos \sqrt{x}$; $(\arccos \sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $y = \log_2^3(3 + 2^{-x})$. $(\log_2^3(3 + 2^{-x}))' = 3 \log_2^2(3 + 2^{-x}) \cdot \frac{1}{(3 + 2^{-x}) \ln 3} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$.

Замечание: Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$.

В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно записать $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = \alpha \cdot e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \text{т. е. } (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Формула остается справедливой и для $x < 0$, если функция $y = x^\alpha$ существует:

$$(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{при всех } x \neq 0.$$

Гиперболические функции и их производные

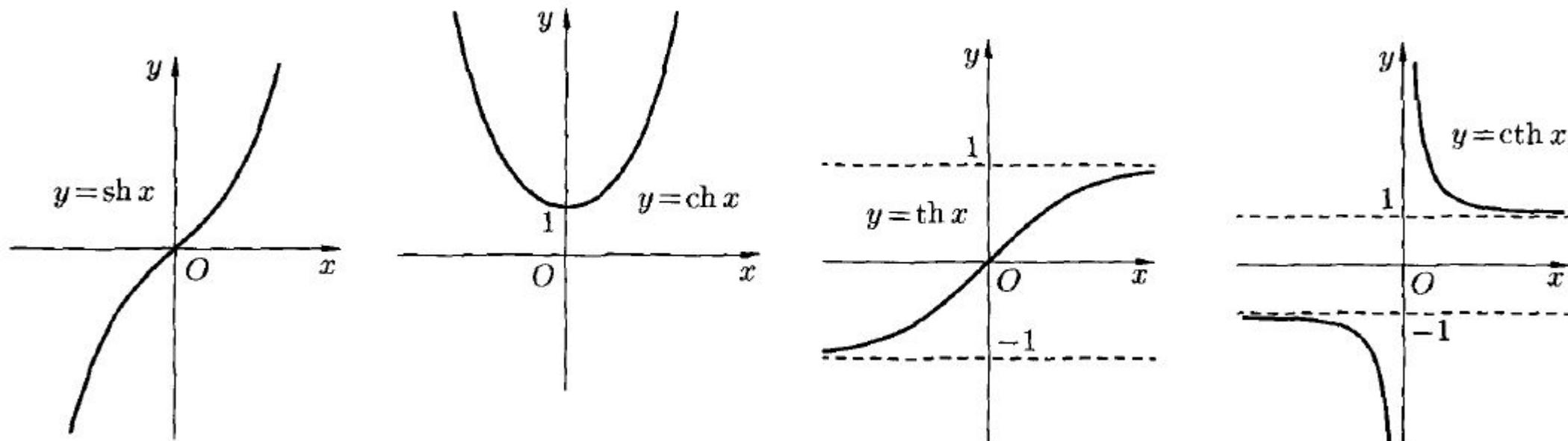
В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус;}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус («цепная линия»);}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ и } \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — гиперболический тангенс и котангенс, где } e \text{ — неперово число.}$$

На рисунках показаны графики гиперболических функций.



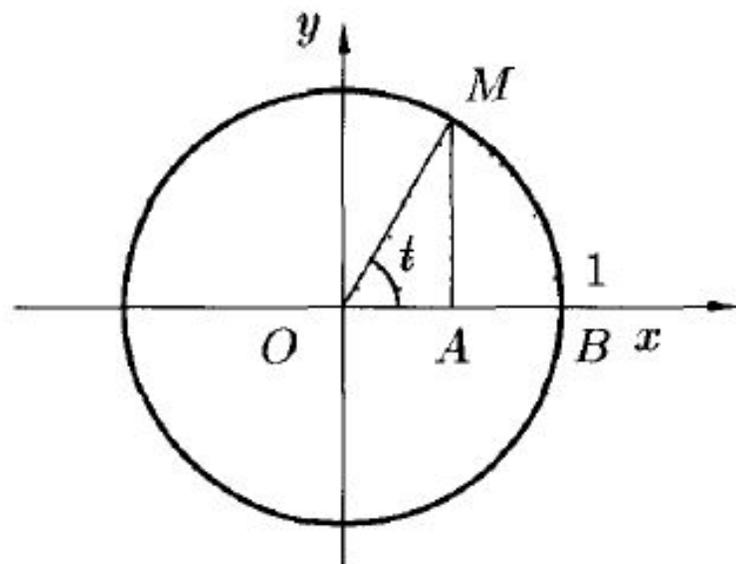
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1; & \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; & \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y; & \operatorname{th}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}; & \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \end{aligned}$$

Все эти формулы вытекают из определения гиперболических функций.

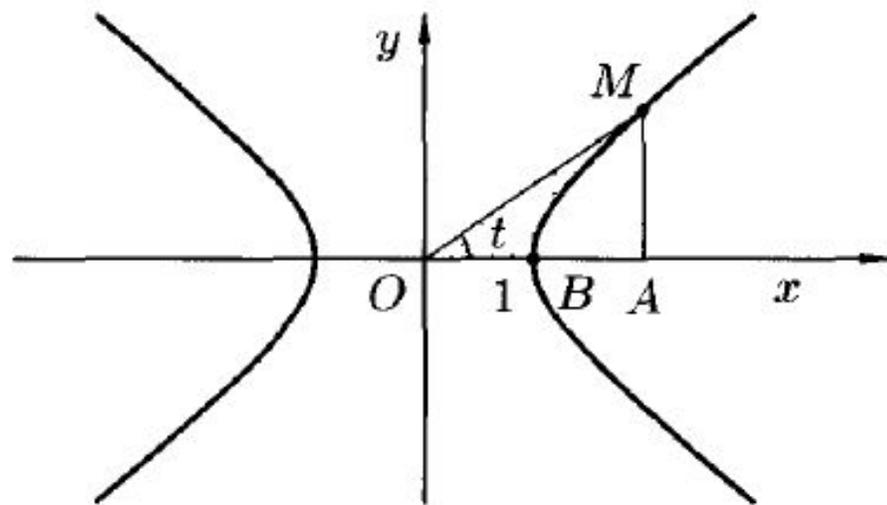
Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Геометрическая интерпретация гиперболических функций
аналогична интерпретации тригонометрических функций



Параметрические уравнения
 $x = \cos t$ и $y = \sin t$
определяют окружность $x^2 + y^2 = 1$,
причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$



Параметрические уравнения
 $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяют гиперболу
 $x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$

Найдем производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ т. е. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ т. е. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \end{aligned}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Таблица производных

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0;$

2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;

14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;

16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ

Неявно заданная функция

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , то функция задана в явном виде (явная функция).

Под **неявным заданием** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешенного относительно y .

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y : **достаточно продифференцировать это уравнение по x , рассматривая при этом y как функцию x** , и полученное затем уравнение разрешить относительно y' . Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y .

Пример. Найти производную функции y , заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (1)$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x , считая, что функции (1) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \quad (2)$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (1), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ получаем $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$, т. е. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x .

Пример. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x .

Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \frac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x = \frac{2}{3t}$.

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x .

Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y'_x = \frac{2}{3t}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат про дифференцировать.

Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

Пример. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x - 1)^3} \cdot e^x}{(x + 5)^3}.$$

Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования.

Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование.

Логарифмируем функцию $\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4} \ln(x - 1) + x - 3 \ln(x + 5)$.

Дифференцируем это равенство по x :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x^2 + 2} \cdot 2x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} + 1 - 3 \cdot \frac{1}{x + 5}. \quad \text{Выражаем} \quad y' = y \left(\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x - 1)} + 1 - \frac{3}{x + 5} \right),$$

$$y' = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x - 1)^3} \cdot e^x}{(x + 5)^3} \cdot \left(\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x - 1)} + 1 - \frac{3}{x + 5} \right)$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая **степенно-показательная функция** $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$; заданные дифференцируемые функции от x . Найдем производную этой функции:

$$\ln y = v \cdot \ln u, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u', \quad \Rightarrow \quad y' = y \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right),$$

т. е. $y' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right)$, или $\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'}$.

Сформулируем правило запоминания формулы $\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'}$.

производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение: Пользуясь формулой, получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2 + 1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2.$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' (или $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{dy'}{dx}$). Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' (или $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, \dots). Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n -го порядка (или n -й производной) называется производная от производной $(n - 1)$ порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right),$$

.....

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 13\right).$$

Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y' , найдем производную первого порядка (первую производную).

Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y' .

Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y .

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример. Найти y''' , если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x : $2x + 2y \cdot y' = 0$.

Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}$, т. е.

$$y'' = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \quad (\text{так как } x^2 + y^2 = 1),$$

$$\text{следовательно, } y''' = -\frac{-1 \cdot 3y^2 \cdot y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}.$$

Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически

Из определения второй производной и равенства следует, что $y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$,

т. е.
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \dots$$

Пример. Найти вторую производную функции
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Решение: По формуле

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда по формуле
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$.

Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции.

можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых

: $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \rightarrow 0$.

При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx ,

так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая

функция более высокого порядка, чем Δx : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют *главной частью приращения* функции Δy .

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Дифференциал dy называют также **дифференциалом первого порядка**.

Найдем дифференциал независимой переменной x , т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому можно записать так: $dy = f'(x)dx$,

иными словами, **дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.**

Из формулы $dy = f'(x)dx$, следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Теперь обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx .

Пример. Найти дифференциал функции $f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x)$.

Решение: По формуле $dy = f'(x) dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))' dx = (6x - 2 \cos(1 + 2x)) dx.$$

Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$

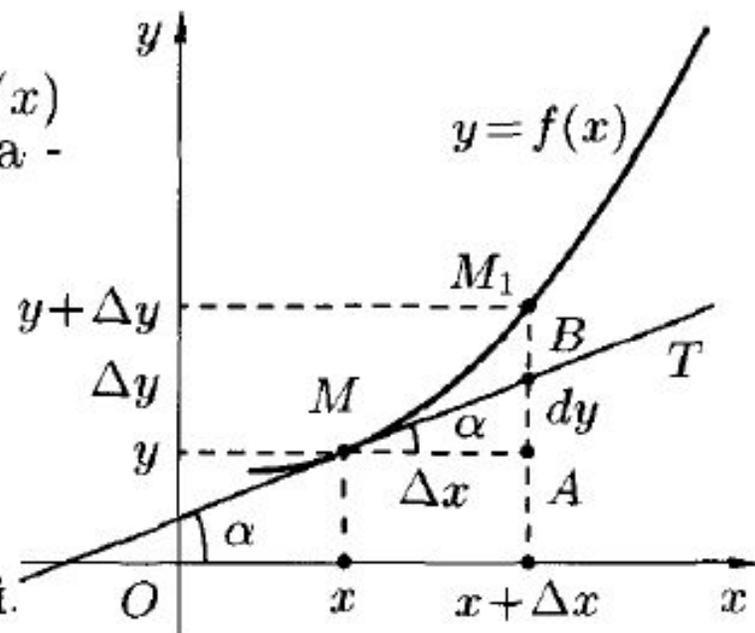
На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$.

Из прямоугольного треугольника MA_1B имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x). \text{ Поэтому } AB = f'(x) \cdot \Delta x.$$



Сравнивая полученный результат с формулой $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, получаем $dy = AB$, т. е. **дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx .** В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x) dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y = c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy = c' dx = 0 \cdot dx = 0$.

Теорема. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами

$$\begin{aligned}d(u + v) &= du + dv, & d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0), \\d(uv) &= v \cdot du + u \cdot dv,\end{aligned}$$

Докажем, например, вторую формулу. По определению дифференциала имеем:

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = v \cdot u' dx + u \cdot v' dx = v du + u dv.$$

Теорема. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx , получаем $y'_x dx = y'_u u'_x dx$. Но $y'_x dx = dy$ и $u'_x dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du.$$

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют **инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала**.

Формула $dy = y'_x \cdot dx$ по внешнему виду совпадает с формулой $dy = y'_u \cdot du$, но между ними есть принципиальное отличие: в первой формуле x — независимая переменная, следовательно, $dx = \Delta x$, во второй формуле u есть функция от x , поэтому, вообще говоря, $du \neq \Delta u$.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(\cos u) = (\cos u)'_u \cdot du = -\sin u \cdot du$.

Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv;$

2. $d(u \cdot v) = v du + u dv$, в частности, $d(cu) = c \cdot du;$

3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c dv}{v^2};$

7. $d(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du;$

8. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$, в частности, $d(e^u) = e^u \cdot du;$

9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$, в частности, $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du;$

10. $d(\sin u) = \cos u du;$

11. $d(\cos u) = -\sin u du;$

12. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u} du;$

13. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u} du;$

14. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$

15. $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$

16. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2} du;$

17. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2} du;$

4. $dy = y'_x dx$, если $y = f(x);$

5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x);$

6. $dc = 0;$

18. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u du;$

19. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u du;$

20. $d(\operatorname{th} u) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} du;$

21. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} du.$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx , получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy,$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx .

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула $\Delta y \approx dy$, широко применяется в вычислительной практике.

Подставляя в равенство $\Delta y \approx dy$, значения Δy и dy , получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{или}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Формула используется для вычислений приближенных значений функций.

Пример. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0,001$.

Решение: Применяем формулу: $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$$dy|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0,001 = 10 \cdot 0,001 = 0,01. \quad \text{Итак, } \Delta y \approx 0,01.$$

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy :

$$\begin{aligned} \Delta y &= ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2); \end{aligned}$$

$$\Delta y|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,001}} = 0,001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0,001 + 0,001^2 - 2) = 0,010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна $|\Delta y - dy| = |0,010006 - 0,01| = 0,000006$.

Пример . Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,05$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. По формуле имеем:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1,05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0,05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1,05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810.$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x — независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x) dx$ есть также функция x ; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2f(x)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x , то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) dx) = (f'(x) dx)' \cdot dx = f''(x) dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т. е. $d^2y = f''(x) dx^2$. Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x) dx^2) = f'''(x)(dx)^3.$$

И, вообще, дифференциал n -го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка: $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Отсюда находим, что $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$. В частности, при $n = 1, 2, 3$ соответственно получаем:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3},$$

т. е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Отметим, что все приведенные выше формулы справедливы только, если x — независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x — **функция от какой-то другой независимой переменной**, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам.

Пример. Найти d^2y , если $y = e^{3x}$ и x — независимая переменная.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле $d^2y = f''(x) dx^2$.

$$\text{имеем } d^2y = 9e^{3x} dx^2.$$

Пример. Найти d^2y , если $y = x^2$ и $x = t^3 + 1$ и t — независимая переменная.

Решение: Используем формулу $d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) \cdot d^2x$.

так как $y' = 2x$, $y'' = 2$, $dx = 3t^2 dt$, $d^2x = 6t dt^2$, то

$$\begin{aligned} d^2y &= 2dx^2 + 2x \cdot 6t dt^2 = 2(3t^2 dt)^2 + 2(t^3 + 1)6t dt^2 = \\ &= 18t^4 dt^2 + 12t^4 dt^2 + 12t dt^2 = (30t^4 + 12t) dt^2. \end{aligned}$$

Другое решение: $y = x^2$, $x = t^3 + 1$. Следовательно, $y = (t^3 + 1)^2$.

Тогда по формуле $d^2y = f''(x) dx^2$.

$$d^2y = y'' \cdot dt^2, \quad \text{т. е. } d^2y = (30t^4 + 12t) dt^2.$$