ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки*. Требуется найти скорость движения точки.

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$

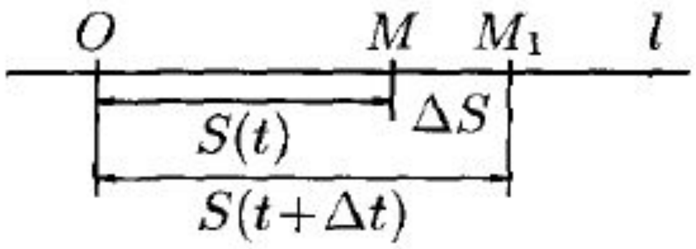


Рис 127

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

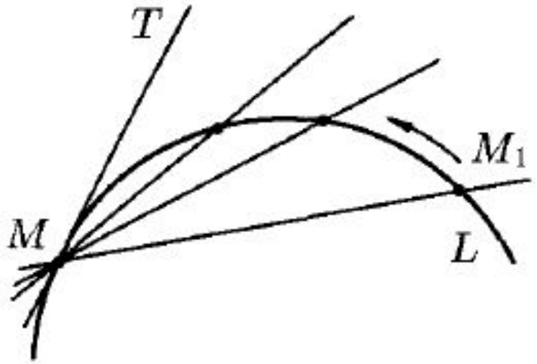
Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис.).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей*.

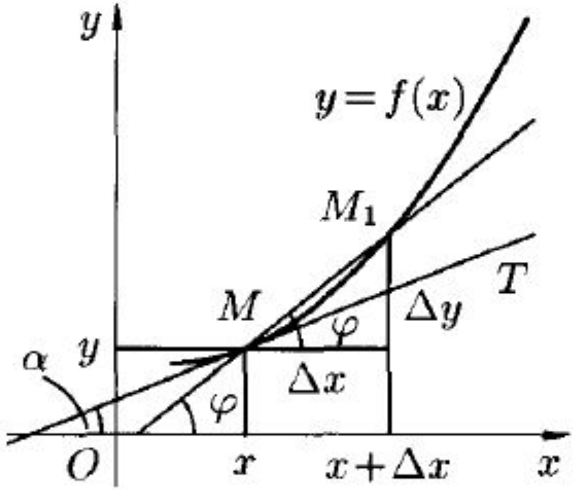
Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.



***Касательной к данной кривой в данной точке** M* называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1.

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x;y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен



$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

К нахождению пределов вида (20.1) и (20.2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

– если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени t* равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \qquad (3)$$

– если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени t* равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \qquad (4)$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0;0)$ и $M(x;0)$, то *линейная плотность стержня в точке* x есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \qquad (5)$$

Пределы (1)–(5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют *производной*. Эти пределы можно записать так:

$$V = S'_t; \quad \operatorname{tg}\alpha = y'_x; \quad I = Q'_t; \quad V = N'_t; \quad S = m'_x$$

Определение производной; ее механический и геометрический смысл.

Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$.

Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a; b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x, $f'(x)$; y'; $\frac{dy}{dx}$; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием.***

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример 1. Найти производную функции $y = C$, $C = \text{const}$.

Решение:

– Значению x даем приращение Δx;

– находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

– значит, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;

– следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, т. е. $(c)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение:

– Аргументу x даем приращение Δx;

– находим Δy: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

– составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

– находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени* t *есть производная от пути* S *по времени* t. В этом заключается *механический смысл производной.*

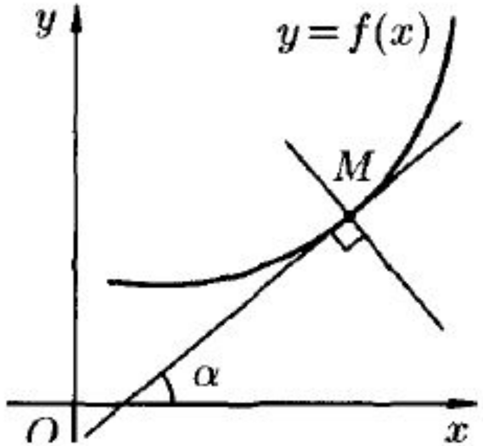
Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная y' есть скорость протекания этого процесса.*** В этом состоит ***физический смысл производной.***

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде

$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k$, т. е. ***производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.*** В этом заключается ***геометрический смысл производной.***

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $(y - y_0 = k(x - x_0))$, можно записать

уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.



Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.*** Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

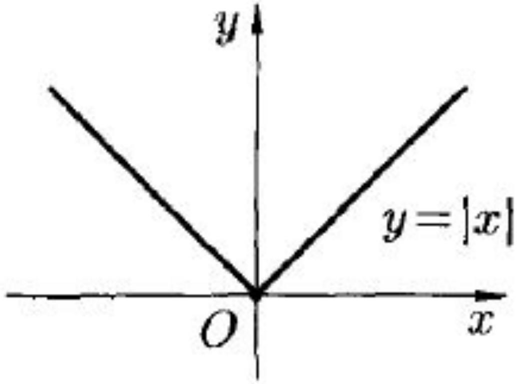
Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.



Обратная теорема неверна. непрерывная функция может не иметь производной Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т е функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0;0)$.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В ıаких случаях говорят, что функция имеет ***односторонние производные*** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a, b), то функция называется ***гладкой***.

Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

Пусть $y = uv$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot u(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad \text{т. е. } (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

При доказательстве теоремы использовалась теорема о связи непрерывности и дифференцируемости: так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то они и непрерывны, поэтому $\Delta v \to 0$ и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можно показать, что:

а) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$;

б) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Теорема 4. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \; v \neq 0.$$

Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(\dot{x}) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x) + \Delta v) v(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} = \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$ т. е. $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Следствие1. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$

Следствие 2. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, где $c = \text{const}$

Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

По условию $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u,$ (.6)

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, поэтому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ где } \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Подставив значение Δu в равенство (20.6), получим

$$\Delta y = y'_u(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т. е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Итак, для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.***

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции.

Теорема 6. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \qquad (7)$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$

И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (7) следуют равенства

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ т. е. } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.*** Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Производные основных элементарных функций

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Дадим аргументу x приращение Δx. Функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = \left(x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right) - x^n =$$

$$= n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n.$$

Тогда $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \cdot + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right) = n \cdot x^{n-1}.$$

Таким образом, $\quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$

формула производной степенной функции справедлива при любом $n \in \mathbb{R}$ (не только натуральном).

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придав аргументу x приращение Δx находим приращение функции Δy: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x.$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Итак, $y' = e^x$, т. е. $(e^x)' = e^x$.

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $a^x = e^{x\ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\cdot(x\cdot\ln a)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x\ln a$.

Пример. Найти производную функции $y = 7^{x^2-4x}$.

Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(x^2-4x)' = 7^{x^2-4x}\cdot\ln 7\cdot(2x-4).$$

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x' = \cos y \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично получаем, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Эту формулу можно получить проще: так как $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) \sim \dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т. е. $y' = \dfrac{1}{x}$ или $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Пример. Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

Решение: $y' = \dfrac{1}{x^4 - 2x^2 + 6} \cdot (x^4 - 2x^2 + 6)' = \dfrac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 6}$.

Производную логарифмической функции $y = \log_a x$ можно найти иначе. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Для функции $y = \sin x$ имеем: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \dfrac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x$,

т. е. $y' = \cos x$ или $(\sin x)' = \cos x$.

Найдем производную функции $y=\cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x,$$ т. е. $(\cos x)'=-\sin x$.

Для нахождения производных функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Проделав аналогичные операции, получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производную функции $y=\cos 2x$.

Решение: $(\cos 2x)'=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2},$$

т. е. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Пример. Найти производные функций:

Решение: 1) $y = \arccos x^2$; $\quad (\arccos x^2)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; $\quad (x \cdot \operatorname{arctg} x)' = x' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$;

3) $y = (1+5x-3x^3)^4$; $((1+5x-3x^3)^4)' = 4(1+5x-3x^3)^3 \cdot (5-9x^2)$;

4) $y = \arccos\sqrt{x}$; $\quad (\arccos\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $y = \log_2^3(3+2^{-x})$. $(\log_2^3(3+2^{-x}))' = 3\log_2^2(3+2^{-x}) \cdot \dfrac{1}{(3+2^{-x})\ln 3} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$.

Замечание: Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$. В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно записать $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = \alpha \cdot e^{\alpha \ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha \cdot \dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, т. е. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Формула остается справедливой и для $x < 0$, если функция $y = x^\alpha$ существует:

$(x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ при всех $x \neq 0$.

Гиперболические функции и их производные

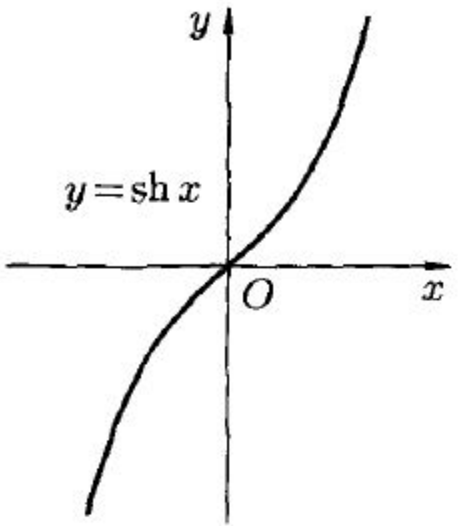
В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

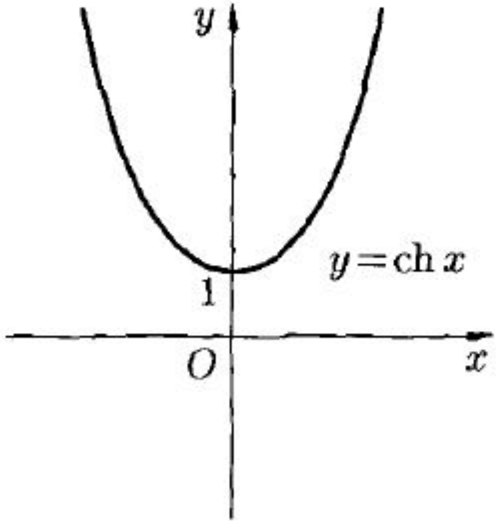
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус;

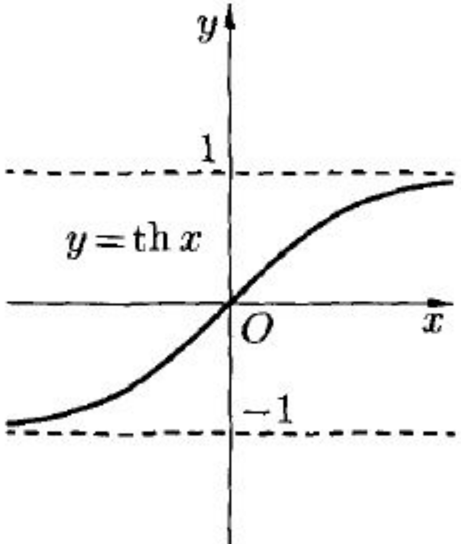
$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус («цепная линия»);

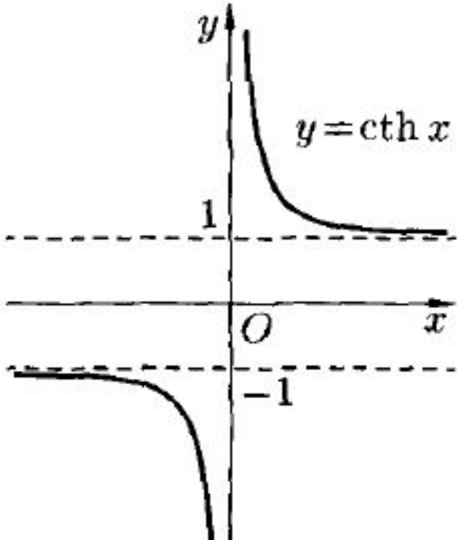
$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ и $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гиперболический тангенс и котангенс, где e — неперово число.

На рисунках показаны графики гиперболических функций.









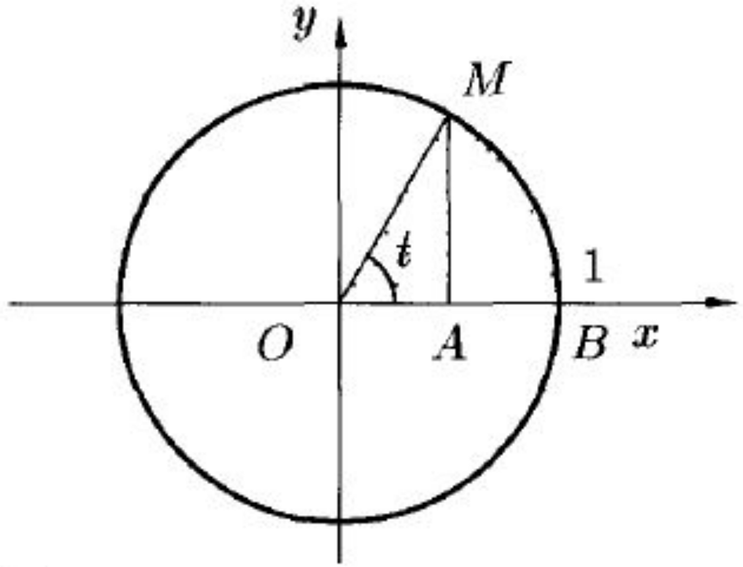
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \qquad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y; \qquad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}; \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Все эти формулы вытекают из определения гиперболических функций. Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Геометрическая интерпретация гиперболических функций аналогична интерпретации тригонометрических функций

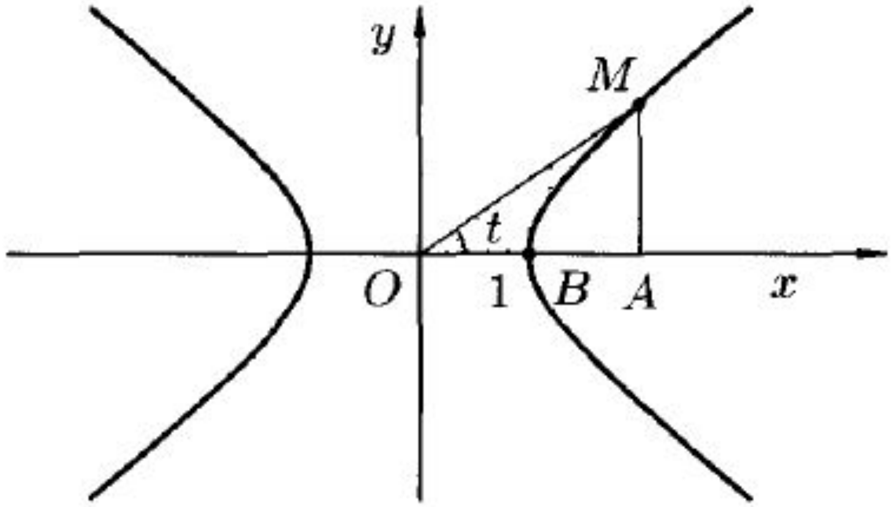


Параметрические уравнения

$x = \cos t$ и $y = \sin t$

определяют окружность $x^2 + y^2 = 1$,

причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$



Параметрические уравнения

$x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяют гиперболу

$x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$

Найдем производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ т. е. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ т. е. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Таблица производных

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Неявно заданная функция

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция *задана в явном виде* (явная функция).

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x;y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x;y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: ***достаточно продифференцировать это уравнение по*** x***, рассматривая при этом*** y ***как функцию*** x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'. Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (1)$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (1) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \qquad (2)$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (1), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$. получаем $\boxed{y'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}.}$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x = \dfrac{2}{3t}$.

В этом *можно* убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x.

Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y = \dfrac{2}{3t}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать.
Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием.*

Пример. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования.
Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование.
Логарифмируем функцию $\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$
Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем $y' = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right),$

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right)$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая ***степенно-показательная функция*** $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y = v \cdot \ln u, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u', \quad \Longrightarrow \quad y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right),$$

т. е.

$$y' = u^v\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right), \quad \text{или} \quad \boxed{(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.}$$

Сформулируем правило запоминания формулы $\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.}$

производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение: Пользуясь формулой , получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2+1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2.$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' $\left(\text{или } f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \frac{dy'}{dx}\right)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' $\left(\text{или } f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\right)$. Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.}$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

. . . .

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 13\right).$$

Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x;y)=0$.
Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную).
Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'.
Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.
Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример. Найти y''', если $x^2+y^2=1$.

Решение: Дифференцируем уравнение $x^2+y^2-1=0$ по x: $2x+2y\cdot y'=0$.
Отсюда $y'=-\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y''=-\frac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}$, т. е.

$$y''=-\frac{y-x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}\ (\text{так как } x^2+y^2=1),$$

следовательно, $y'''=-\frac{-1\cdot 3y^2\cdot y'}{y^6}=\frac{3}{y^4}\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{3x}{y^5}.$

Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически

Из определения второй производной и равенства следует, что $y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$,

т. е. $\boxed{y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}.}$ Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \ldots$$

Пример . Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение: По формуле

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда по формуле $\boxed{y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}.}$ $\quad y''_{xx} = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \dfrac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\dfrac{1}{\sin^3 t}.$

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$.

Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$.

При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка***.

Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому можно записать так: $\boxed{dy = f'(x)dx,}$

иными словами, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Из формулы $\boxed{dy = f'(x)dx,}$ следует равенство $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Теперь обозначение производной $\dfrac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

***Пример*.** Найти дифференциал функции $f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x)$.

Решение: По формуле $dy = f'(x)\,dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))'\,dx = (6x - 2\cos(1 + 2x))\,dx.$$

Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

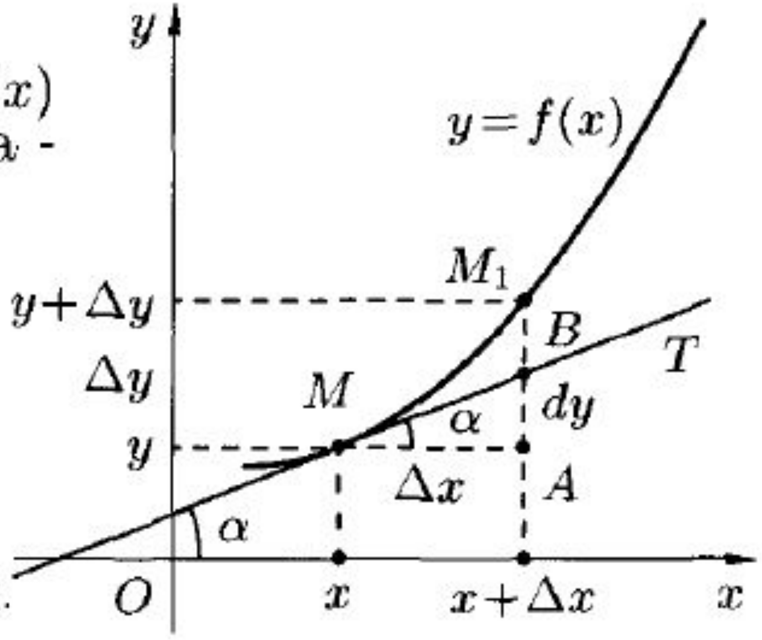
Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x;y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$

На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$.

Из прямоугольного треугольника MAB имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$.



Сравнивая полученный результат с формулой $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. , получаем $dy = AB$, т. е. ***дифференциал функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x ***равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда*** x ***получит приращение*** Δx.

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x)\,dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y=c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy=c'\,dx=0\cdot dx=0$.

Теорема. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами

$$d(u+v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v\cdot du + u\cdot dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Докажем, например, вторую формулу. По определению дифференциала имеем:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v\cdot u'dx + u\cdot v'dx = v\,du + u\,dv.$$

Теорема. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получаем $y'_x dx = y'_u u'_x dx$. Но $y'_x\, dx = dy$ и $u'_x\, dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du.$$

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.***

Формула $dy = y'_x \cdot dx$ по внешнему виду совпадает с формулой $dy = y'_u \cdot du$, но между ними есть принципиальное отличие: в первой формуле x — независимая переменная, следовательно, $dx = \Delta x$, во второй формуле u есть функция от x, поэтому, вообще говоря, $du \neq \Delta u$.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(\cos u) = (\cos u)'_u \cdot du = -\sin u \cdot du$.

Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$, в частности, $d(cu) = c \cdot du$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c\,dv}{v^2}$;
4. $dy = y'_x\,dx$, если $y = f(x)$;
5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
6. $dc = 0$;
7. $d(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du$;
8. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$, в частности, $d(e^u) = e^u \cdot du$;
9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$, в частности, $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du$;
10. $d(\sin u) = \cos u\,du$;
11. $d(\cos u) = -\sin u\,du$;
12. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$;
13. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u}\,du$;
14. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
15. $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
16. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2}\,du$;
17. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2}\,du$:
18. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u\,du$;
19. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u\,du$;
20. $d(\operatorname{th} u) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$;
21. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\,du$.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha\cdot\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy,$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула $\Delta y \approx dy$, широко применяется в вычислительной практике.

Подставляя в равенство $\Delta y \approx dy$, значения Δy и dy, получим

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x$$

или

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x.}$$

Формула используется для вычислений приближенных значений функций.

Пример. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение: Применяем формулу: $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0{,}001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01.$ Итак, $\Delta y \approx 0{,}01$.

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy:

$$\Delta y = ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) =$$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2);$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0{,}001}} = 0{,}001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна $|\Delta y - dy| = |0{,}010006 - 0{,}01| = 0{,}000006$.

Пример . Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. По формуле $\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.}$ имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1{,}05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}05}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810.$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x — *независимая переменная*. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ есть также функция x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее *вторым дифференциалом* (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2f(x)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)' \cdot dx = f''(x)\,dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т. е. $d^2y = f''(x)\,dx^2$. Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)(dx)^3.$$

И, вообще, дифференциал n-го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Отсюда находим, что $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$. В частности, при $n = 1,\ 2,\ 3$ соответственно получаем:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3},$$

т. е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Отметим, что все приведенные выше формулы справедливы только, если x — независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x — ***функция от какой-то другой независимой переменной***, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам.

Пример. Найти d^2y, если $y = e^{3x}$ и x — независимая переменная.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле $d^2y = f''(x)\,dx^2$.

имеем $d^2y = 9e^{3x}\,dx^2$.

Пример. Найти d^2y, если $y = x^2$ и $x = t^3 + 1$ и t — независимая переменная.

Решение: Используем формулу $d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\cdot d^2x$.

так как $y' = 2x$, $\quad y'' = 2$, $\quad dx = 3t^2\,dt$, $\quad d^2x = 6t\,dt^2$, $\quad$ то

$$d^2y = 2dx^2 + 2x\cdot 6t\,dt^2 = 2(3t^2\,dt)^2 + 2(t^3+1)6t\,dt^2 =$$

$$= 18t^4\,dt^2 + 12t^4\,dt^2 + 12t\,dt^2 = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$

Другое решение: $y = x^2$, $x = t^3 + 1$. Следовательно, $y = (t^3+1)^2$.

Тогда по формуле $d^2y = f''(x)\,dx^2$.

$$d^2y = y''\cdot dt^2, \qquad \text{т. е.} \qquad d^2y = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$