Решение уравнений, содержащих модули

Определение модуля $|a| = \begin{cases} a, если\ a \geq 0, \\ -a, если\ a < 0. \end{cases}$

Свойства модуля

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0.$$

$$|x^2| = |x|^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{x^2 y} = |x|\sqrt{y}$$

Геометрический смысл модуля

- Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки х числовой оси до начала отсчёта – точки О.

$$\xrightarrow{\;0 \qquad x\;} x \qquad\qquad \xrightarrow{\;x \qquad 0\;} x$$

- $|x-a|$ есть расстояние между точками х и а числовой оси.

$$\xrightarrow{\;0 \qquad x \qquad a\;} x \qquad \xrightarrow{\;x \qquad 0 \qquad a\;} x \qquad \xrightarrow{\;a \qquad x \qquad 0\;} x$$

Типы уравнений с модулями

$|f(x)|=a$,
где
a – действительное число

$|f(x)|=|g(x)|$

$|f(x)|=g(x)$

Уравнения,
содержащие несколько
модулей
$|f(x)|+|g(x)|+\ldots+|s(x)|=h(x)$

Решение уравнения $|f(x)|=a$

1) Если $a > 0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

2) Если $a=0$, то $f(x)=0$.

3) Если $a<0$,
то уравнение не имеет корней.

Решение уравнений |f(x)|=|g(x)|.

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

Решение уравнений |f(x)|=g(x).

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Решение уравнений, содержащих несколько модулей

1. Находим значения переменной, при которых значения модулей равны 0.

2. Полученные значения разбивают координатную прямую на промежутки, в каждом из которых раскрываем модули и решаем полученные уравнения.

3. Решением исходного уравнения является объединение всех полученных корней решаемых уравнений.