

Замена переменных в двойных интегралах

Для вычисления двойного интеграла $\iint_R f(x, y) dx dy$ иногда удобнее перейти в другую систему координат.

Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Замена переменных в двойном интеграле описывается формулой

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dx dy,$$

где выражение $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ представляет собой так называемый *якобиан* преобразования

$(x, y) \rightarrow (u, v)$, а S – *образ* области интегрирования R , который можно найти с помощью подстановки $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ в определение области R . Отметим, что в приведенной выше формуле $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$

означает абсолютное значение соответствующего определителя.

В предположении, что преобразование $(x, y) \rightarrow (u, v)$ является взаимно-однозначным, соотношение между якобианами прямого и обратного преобразования координат записывается в виде

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \right|$$

при условии, что знаменатель нигде не равен 0.

Итак, замена переменных в двойном интеграле производится с помощью следующих трех шагов:

1. Найти образ S в новой системе координат (u, v) для исходной области интегрирования R ;
2. Вычислить якобиан преобразования $(x, y) \rightarrow (u, v)$ и записать дифференциал в новых переменных $dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$;
3. Заменить в подынтегральном выражении исходные переменные x и y , выполнив, соответственно, подстановки $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$.

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint_R (y - x) dx dy$, в котором область определения R ограничена прямыми $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + 2$, $y = -\frac{x}{3} + 4$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 1. Для упрощения интеграла выполним замену переменных. Полагая $u = y - x$, $v = y + \frac{x}{3}$, получаем

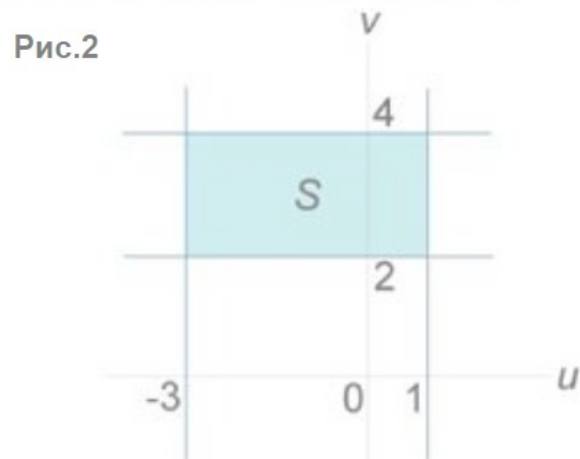
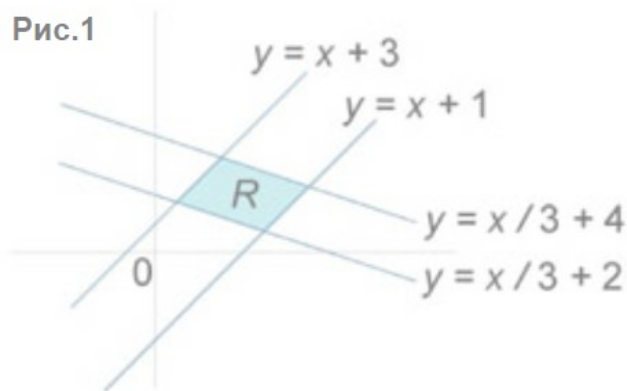
$$y = x + 1, \Rightarrow y - x = 1, \Rightarrow u = 1,$$

$$y = x - 3, \Rightarrow y - x = -3, \Rightarrow u = -3,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 2, \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2, \Rightarrow v = 2,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 4, \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 4, \Rightarrow v = 4.$$

Следовательно, образ S области R имеет вид прямоугольника, как показано на рисунке 2.



Определим якобиан данного преобразования. Сначала вычислим определитель обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y+\frac{x}{3})}{\partial x} & \frac{\partial(y+\frac{x}{3})}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда якобиан равен

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \right| = \left| \frac{1}{-\frac{4}{3}} \right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, дифференциал преобразуется следующим образом:

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \frac{3}{4} dudv.$$

В новых переменных (u, v) интеграл вычисляется намного легче:

$$\begin{aligned} \iint_R (y-x) dxdy &= \iint_S \left(u \cdot \frac{3}{4} dudv \right) = \frac{3}{4} \int_{-3}^1 u du \int_2^4 dv = \frac{3}{4} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_{-3}^1 \cdot v \Big|_2^4 \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) \cdot (4-2) = -6. \end{aligned}$$

Пример 2

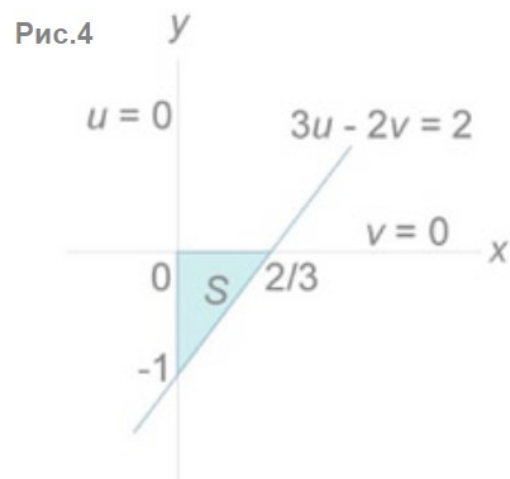
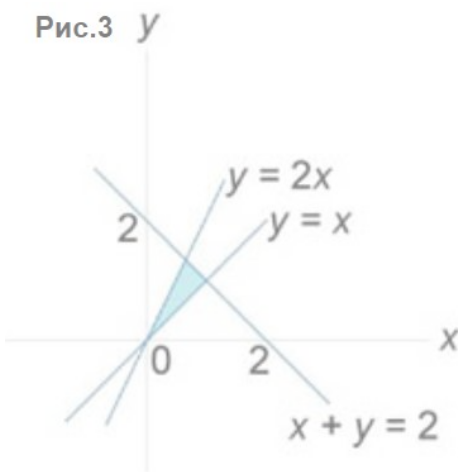
Вычислить двойной интеграл $\iint_R (x + y) dx dy$, в котором область интегрирования R ограничена прямыми линиями $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 2$.

Решение.

Область интегрирования R имеет вид неправильного треугольника и показана на рисунке 3. Чтобы упростить ее, введем новые переменные: $y - x = u$, $y - 2x = v$. Выразим x, y через u, v и определим образ области интегрирования S в новой системе координат. Легко видеть, что

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = 2x, \Rightarrow y - 2x = 0, \Rightarrow v = 0.$$



Заметим, что $u - v = (y - x) - (y - 2x) = x$.

Следовательно, $y = x + u = u - v + u = 2u - v$.

Таким образом, мы получаем $x + y = 2, \Rightarrow u - v + 2u - v = 2, \Rightarrow 3u - 2v = 2$.

Если $v = 0$, то $u = \frac{2}{3}$. Соответственно, если $u = 0$, то $v = -1$. Область S имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок 4 выше).

Уравнение стороны $3u - 2v = 2$ можно переписать в виде $3u - 2v = 2, \Rightarrow v = \frac{3u - 2}{2} = \frac{3}{2}u - 1$.

Найдем якобиан.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 = 1.$$

Следовательно, $dx dy = du dv$ и двойной интеграл становится равным

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \iint_S (u - v + 2u - v) du dv = \iint_S (3u - 2v) du dv = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\int_{\frac{3}{2}u-1}^0 (3u - 2v) dv \right] du \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[(3uv - v^2) \Big|_{v=\frac{3}{2}u-1}^0 \right] du = - \int_0^{\frac{2}{3}} \left[3u \left(\frac{3}{2}u - 1 \right) - \left(\frac{3}{2}u - 1 \right)^2 \right] du \\ &= - \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{2} - 3u - \frac{9u^2}{4} + 3u - 1 \right) du = - \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{4} - 1 \right) du = \left(u - \frac{9}{4} \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint_R dx dy$, где область R ограничена парабололами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 5.

Для упрощения области R сделаем замену переменных.

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}.$$

Образ S области R определяется следующим образом:

$$y^2 = 2x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 2, \Rightarrow u = 2,$$

$$y^2 = 3x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 3, \Rightarrow u = 3,$$

$$xy = 1, \Rightarrow v = 1,$$

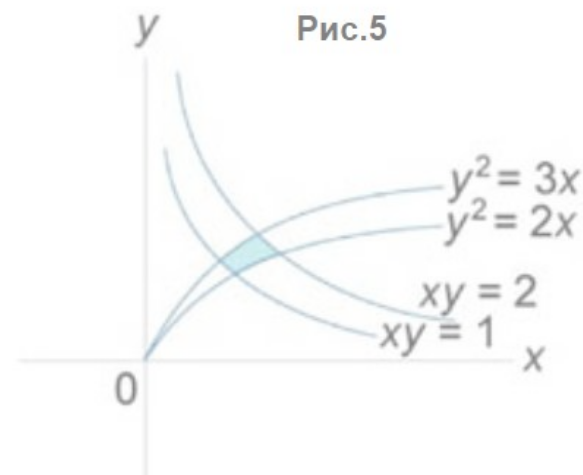
$$xy = 2, \Rightarrow v = 2.$$

Как видно, образ S является прямоугольником. Для нахождения якобиана выразим переменные x, y через u, v .

$$u = \frac{y^2}{x}, \Rightarrow x = \frac{y^2}{u}, \quad v = xy, \Rightarrow v = \frac{y^2}{u} \cdot y, \Rightarrow y^3 = uv.$$

Отсюда следует

$$y = \sqrt[3]{uv} = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2 v^2}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$



Находим якобиан данного преобразования.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right) & u^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.\end{aligned}$$

Соотношение между дифференциалами имеет вид

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \left| -\frac{1}{3u} \right| dudv = \frac{dudv}{3u}.$$

Теперь легко найти искомый интеграл:

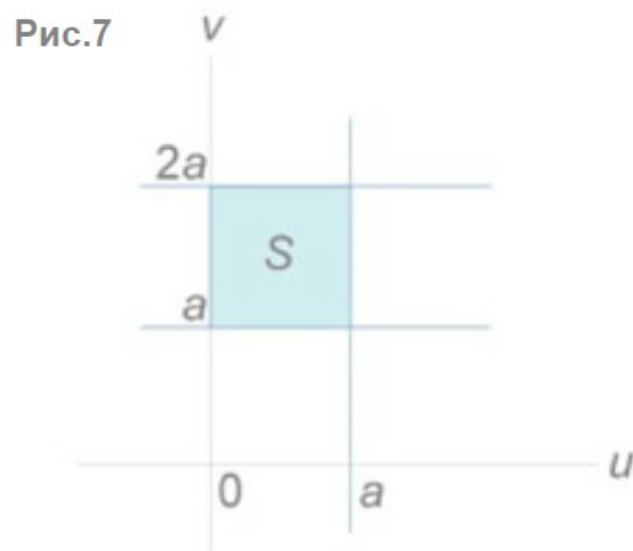
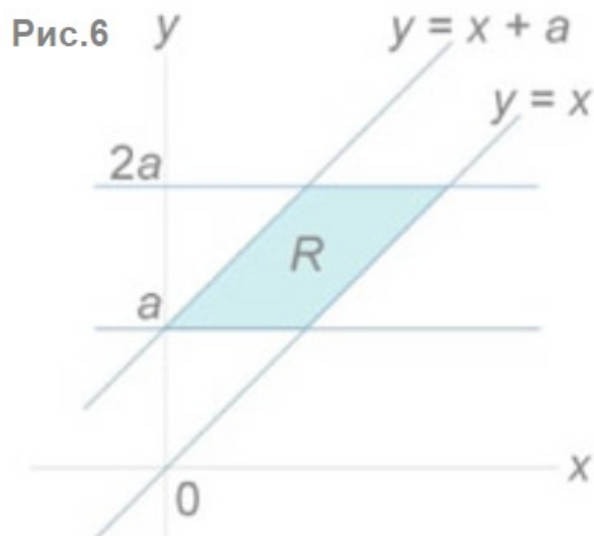
$$\iint_R dxdy = \iint_S \frac{dudv}{3u} = \int_2^3 \frac{du}{3u} \int_1^2 dv = \frac{1}{3} (\ln u) \Big|_2^3 \cdot v \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 3 - \ln 2) \cdot (2 - 1) = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$, где область R ограничена прямыми $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 2a$ ($a > 0$).

Решение.

Область интегрирования R имеет форму параллелограмма и показана на рисунке 6.



Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = y - u = v - u \\ y = v \end{cases}.$$

Цель этой замены – упростить область интегрирования R .

Найдем образ S области R в новых координатах (u, v) .

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = x + a, \Rightarrow y - x = a, \Rightarrow u = a,$$

$$y = a, \Rightarrow v = a,$$

$$y = 2a, \Rightarrow v = 2a.$$

Из рисунка 7 видно, что область S представляет собой прямоугольник. Вычислим якобиан.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(v-u)}{\partial u} & \frac{\partial(v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1,$$

так что

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = |-1| \cdot dudv = dudv.$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл.

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_S [(v - u)^2 + v^2] dudv = \iint_S (v^2 - 2uv + u^2 + v^2) dudv \\ &= \int_a^{2a} \left[\int_0^a (2v^2 - 2uv + u^2) du \right] dv = \int_a^{2a} \left[\left(2v^2u - vu^2 + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{u=0}^a \right] dv = \int_a^{2a} \left(2av^2 - a^2v + \frac{a^3}{3} \right) dv \\ &= \left(2a \cdot \frac{v^3}{3} - a^2 \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{a^3}{3} \cdot v \right) \Big|_a^{2a} = \left(\frac{2a}{3} \cdot 8a^3 - \frac{a^2}{2} \cdot 4a^2 + \frac{a^3}{3} \cdot 2a \right) \\ &\quad - \left(\frac{2a}{3} \cdot a^3 - \frac{a^2}{2} \cdot a^2 + \frac{a^3}{3} \cdot a \right) = \frac{7a^4}{2}.\end{aligned}$$

Двойные интегралы в полярных координатах

Одним из частных случаев замены переменных является переход из декартовой в *полярную систему координат* (рисунок 1).

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

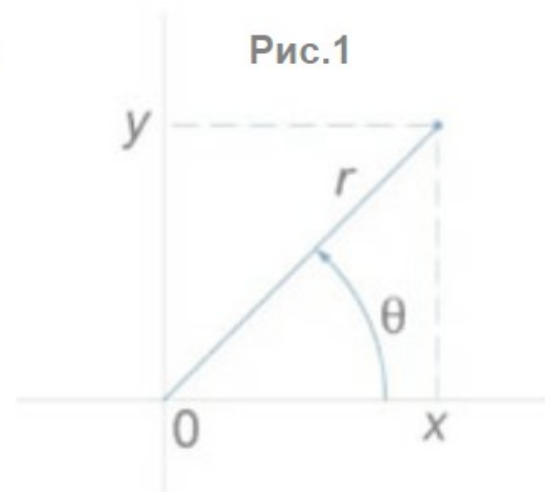
Якобиан такого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \cdot \sin \theta = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Следовательно, дифференциальный элемент в полярных координатах будет равен

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| drd\theta = r drd\theta.$$

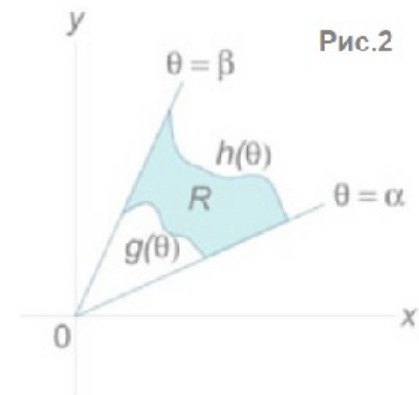


Пусть область интегрирования R в полярных координатах определяется следующим образом (рисунок 2):

$$0 \leq g(\theta) \leq r \leq h(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad \text{где } \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

Тогда двойной интеграл в полярных координатах описывается формулой

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

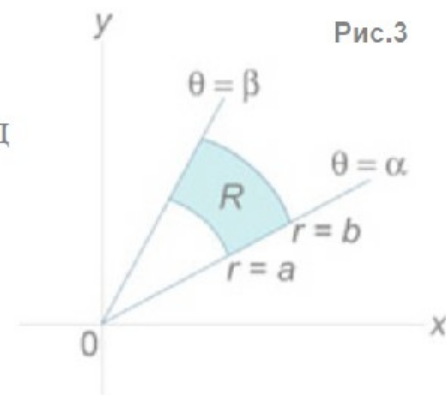


Будем называть *полярным прямоугольником* область интегрирования, показанную на рисунке 3 и удовлетворяющую условиям

$$0 \leq a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad \text{где } \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

В этом случае формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



Будьте внимательны, чтобы не пропустить сомножитель (якобиан) r в правой части этой формулы!

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint_R (x^2 + y^2) dydx$, преобразовав его в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой сектор $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ круга радиусом $r = \sqrt{3}$.

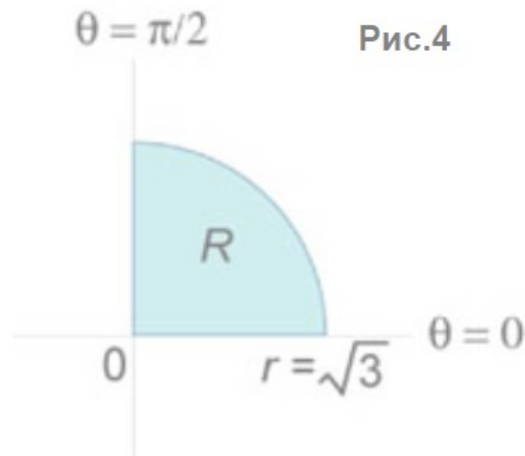
Решение.

Область R в полярных координатах описывается множеством $R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ (рисунок 4). Применяя формулу

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

получаем

$$\iint_R (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr = \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$



Пример 2

Вычислить интеграл $\iint_R xydydx$, в котором область интегрирования R представляет собой кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 5$.

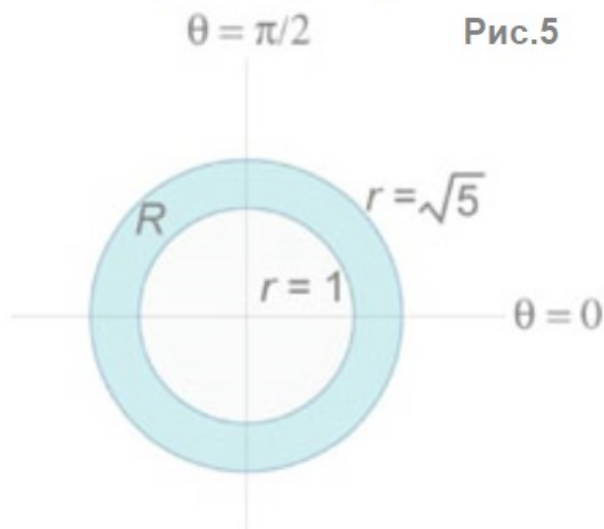
Решение.

В полярных координатах область интегрирования R является полярным прямоугольником (рисунок 5):

$$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Тогда, используя формулу

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$



находим значение интеграла

$$\begin{aligned} \iint_R xydydx &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} r \cos \theta r \sin \theta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_1^{\sqrt{5}} r^3 dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{5}} r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{4} (-\cos 4\pi + \cos 0) \cdot \frac{1}{4} (25 - 1) = \frac{1}{4} (-1 + 1) \cdot 6 = 0. \end{aligned}$$

Пример 3

Найти интеграл $\iint_R \sin \theta drd\theta$, где область интегрирования R ограничена кардиоидой $r = 1 + \cos \theta$ (рисунок 6).

Решение.

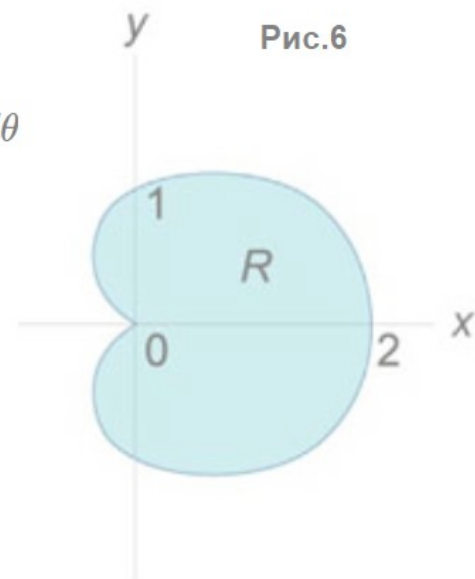
Данный интеграл уже записан в полярных координатах. Выражая его через повторный интеграл, получаем:

$$\iint_R \sin \theta drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} \sin \theta drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1+\cos \theta} dr \right] \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r \Big|_0^{1+\cos \theta} \right] \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \cos \theta \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta$$

$$= (-\cos \theta) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 - \frac{1}{4} \cos 4\pi + \frac{1}{4} \cos 0$$

$$= -1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

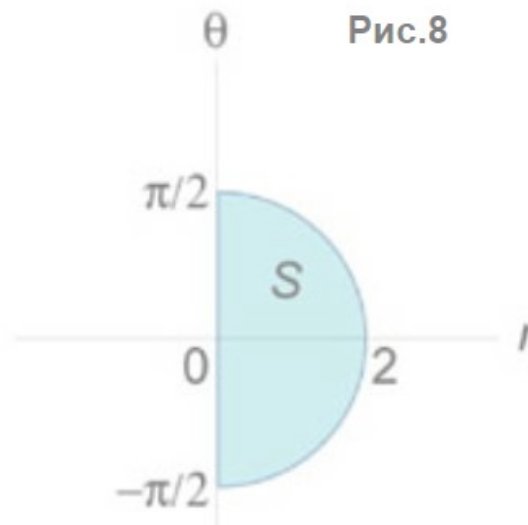
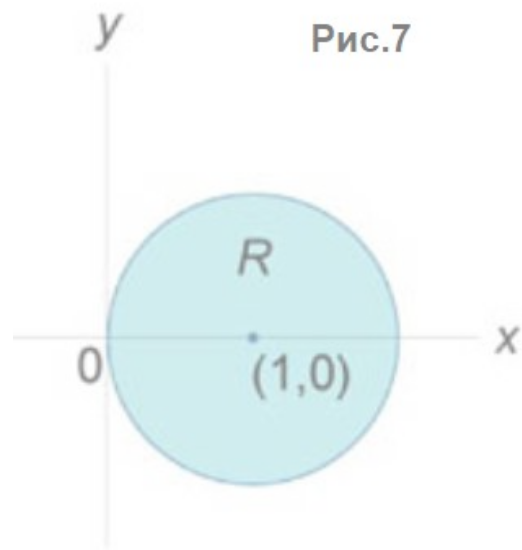


Пример 4

Вычислить интеграл $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ в круге $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение.

Область интегрирования R показана на рисунке 7.



Преобразуем уравнение окружности следующим образом:

$$x^2 + y^2 = 2x, \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1, \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Подставляя $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, найдем уравнение окружности в полярных координатах.

$$x^2 + y^2 = 2x, \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2r \cos \theta, \Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2r \cos \theta, \Rightarrow r = 2 \cos \theta.$$

Образ S области интегрирования R показан на рисунке 8. После перехода к полярным координатам вычисляем двойной интеграл.

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_S (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \iint_S r^3 dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2 \cos \theta} r^3 dr \right] d\theta \\
&= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{2 \cos \theta} \right] d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta \\
&= \left(\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \pi + \frac{1}{8} \sin 2\pi \right) - \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \pi - \frac{1}{8} \sin 2\pi \right) \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

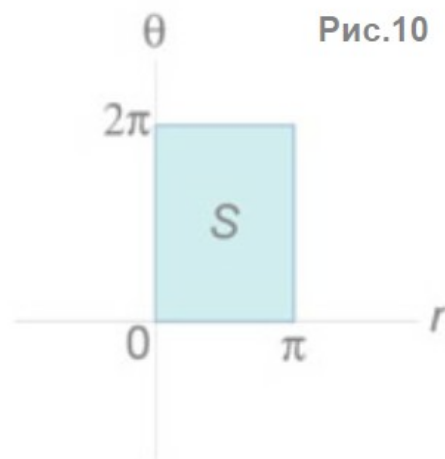
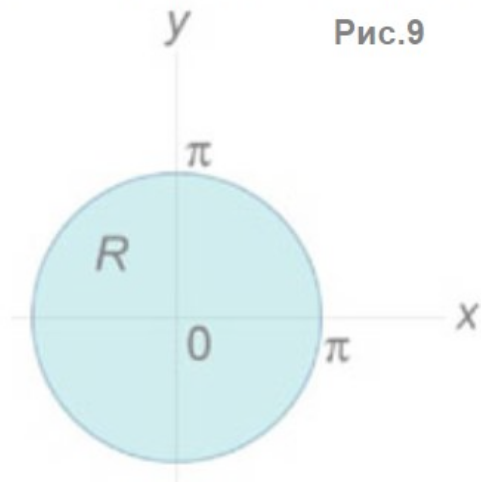
Пример 5

Вычислить двойной интеграл $\iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ посредством преобразования в полярные координаты.

Область интегрирования R представляет собой круг $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

Решение.

Область интегрирования R представлена на рисунке 9.



Образ S данной области описывается множеством $\{S = (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ и показан на рисунке 10. Запишем исходный двойной интеграл в полярных координатах.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_S \sin \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} r dr d\theta = \iint_S r \sin r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r \sin r dr \\
 &= 2\pi \int_0^\pi r \sin r dr.
 \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пусть $u = r$, $dv = \sin r dr$. Тогда $du = dr$, $v = \int \sin r dr = -\cos r$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi \int_0^\pi r \sin r dr = 2\pi \left[(-r \cos r)|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos r) dr \right] = 2\pi \left[(-r \cos r)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos r dr \right] \\
 &= 2\pi \left[(-r \cos r)|_0^\pi + (\sin r)|_0^\pi \right] = 2\pi (\sin r - r \cos r)|_0^\pi = 2\pi [(\sin \pi - \pi \cos \pi) - (\sin 0 - 0 \cdot \cos 0)] \\
 &= 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

Геометрические приложения двойных интегралов

Площадь плоской фигуры

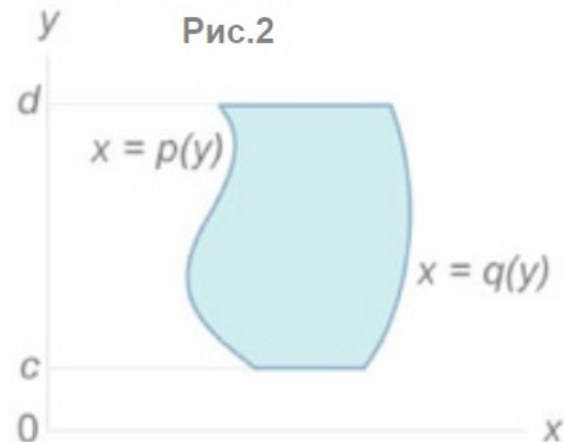
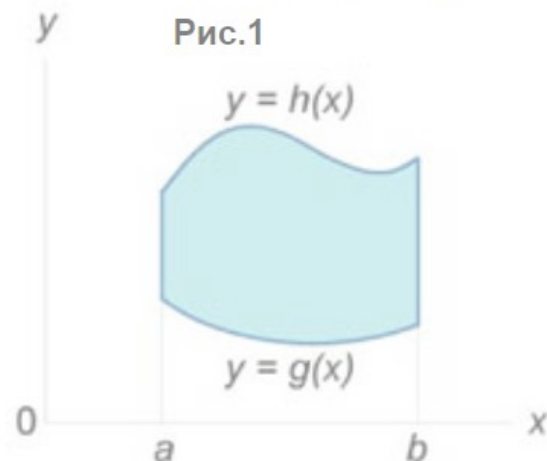
Если $f(x, y) = 1$ в интеграле $\iint_R f(x, y) dx dy$, то двойной интеграл равен площади области интегрирования R .

Площадь области типа I (элементарной относительно оси Oy) (рисунок 1) выражается через повторный интеграл в виде

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy dx.$$

Аналогично, площадь области типа II (элементарной относительно оси Ox) (рисунок 2) описывается формулой

$$A = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} dx dy.$$



Объем тела

Если $f(x, y) > 0$ в области интегрирования R , то объем цилиндрического тела с основанием R , ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, выражается формулой

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

В случае, когда R является областью типа I , ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, объем тела равен

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Для области R типа II , ограниченной графиками функций $y = c$, $y = d$, $x = p(y)$, $x = q(y)$, объем соответственно равен

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx dy.$$

Если в области R выполняется неравенство $f(x, y) \geq g(x, y)$, то объем цилиндрического тела между поверхностями $z_1 = g(x, y)$ и $z_2 = f(x, y)$ с основанием R равен

$$V = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA.$$

Площадь поверхности

Предположим, что поверхность задана функцией $z = g(x, y)$, имеющей область определения R . Тогда площадь такой поверхности над областью R определяется формулой

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

при условии, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны всюду в области R .

Площадь и объем в полярных координатах

Пусть S является областью, ограниченной линиями $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r = h(\theta)$, $r = g(\theta)$ (рисунок 3).

Тогда площадь этой области определяется формулой

$$A = \iint_R dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta.$$

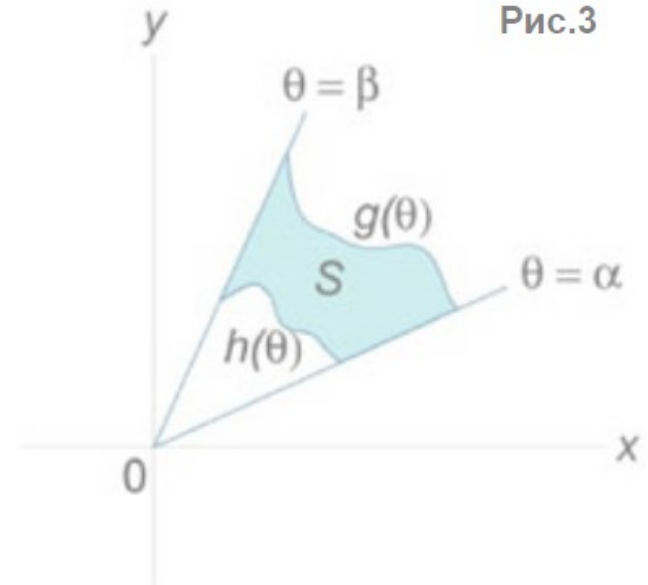


Рис.3

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(r, \theta)$ с основанием S , выражается в полярных координатах в виде

$$V = \iint_S f(r, \theta) r dr d\theta.$$

Пример 1

Найти площадь области R , ограниченной гиперболами $y = \frac{a^2}{x}$, $y = \frac{2a^2}{x}$ ($a > 0$) и вертикальными прямыми $x = 1$, $x = 2$.

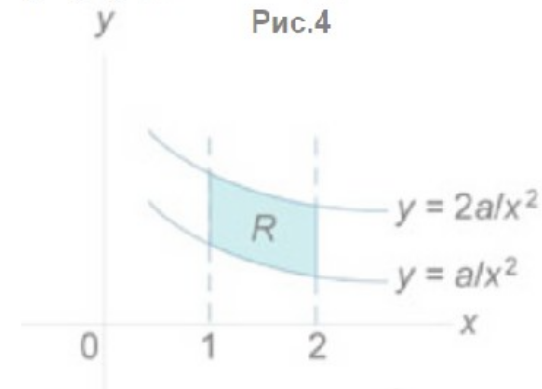
Решение.

Область R схематически показана на рисунке 4. Используя формулу для площади области I типа

$$A = \iint_R dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy dx,$$

получаем

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dx dy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} dy \right] dx = \int_1^2 \left[y \Big|_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} \right] dx = \int_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x} \right) dx = a^2 \int_1^2 \frac{dx}{x} \\ &= a^2 (\ln 2 - \ln 1) = a^2 \ln 2. \end{aligned}$$



Пример 2

Вычислить площадь области R , ограниченной линиями $y^2 = a^2 - ax$, $y = a + x$.

Решение.

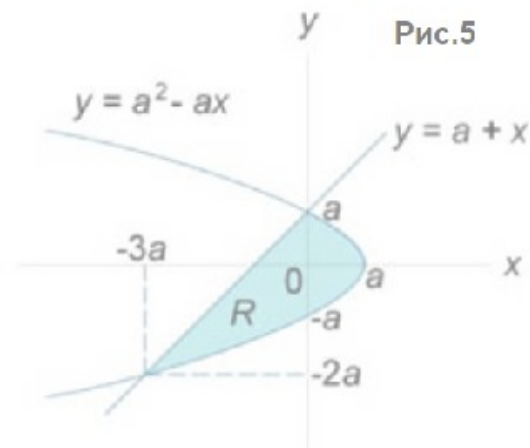
Сначала определим точки пересечения двух заданных линий.

$$\begin{cases} y^2 = a^2 - ax \\ y = a + x \end{cases}, \Rightarrow (a + x)^2 = a^2 - ax, \Rightarrow a^2 + 2ax + x^2 = a^2 - ax, \Rightarrow x^2 + 3ax = 0, \\ \Rightarrow x(x + 3a) = 0, \Rightarrow x_{1,2} = 0; -3a.$$

Следовательно, координаты точек пересечения равны

$$x_1 = 0, \quad y_1 = a + 0 = a,$$

$$x_2 = -3a, \quad y_2 = a - 3a = -2a.$$



Область R представлена на рисунке 5. Будем рассматривать ее как область типа II .

Для вычисления площади преобразуем уравнения границ:

$$y^2 = a^2 - ax, \Rightarrow ax = a^2 - y^2, \Rightarrow x = a - \frac{y^2}{a},$$

$$y = a + x, \Rightarrow x = y - a.$$

Получаем

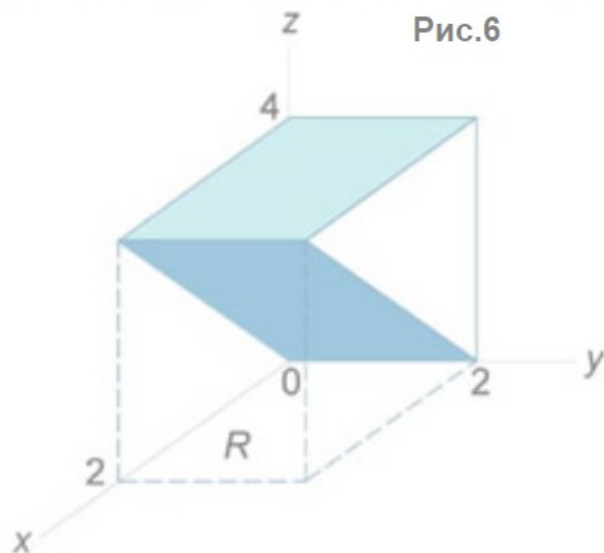
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dx dy = \int_{-2a}^a \left[\int_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right] dy = \int_{-2a}^a \left[\int_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right] dy = \int_{-2a}^a \left[x \Big|_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} \right] dy \\ &= \int_{-2a}^a \left[a - \frac{y^2}{a} - (y - a) \right] dy = \int_{-2a}^a \left(2a - \frac{y^2}{a} - y \right) dy = \left(2ay - \frac{y^3}{3a} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-2a}^a \\ &= \left(2a^2 - \frac{a^3}{3a} - \frac{a^2}{2} \right) - \left(-4a^2 + \frac{8a^3}{3a} - \frac{4a^2}{2} \right) = \frac{9a^2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 3

Найти объем тела в первом октанте, ограниченного плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = x$, $z + x = 4$.

Решение.

Данное тело показано на рисунке 6.



Из рисунка видно, что основание R является квадратом. Для заданных x, y значение z изменяется от $z = x$ до $z = 4 - x$. Тогда объем равен

$$\begin{aligned} V &= \iint_R [(4 - x) - x] dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^2 (4 - 2x) dy \right] dx = \int_0^2 [(4y - 2xy)|_{y=0}^2] dx = \int_0^2 (8 - 4x) dx \\ &= (8x - 2x^2)|_0^2 = 16 - 8 = 8. \end{aligned}$$