Замена переменных в двойных интегралах

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$ иногда удобнее перейти в другую систему координат. Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Замена переменных в двойном интеграле описывается формулой

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_S f\left[x(u,v), y(u,v)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dxdy,$$

где выражение $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ представляет собой так называемый *якобиан* преобразования $(x,y) \to (u,v)$, а S – *образ* области интегрирования R, который можно найти с помощью подстановки $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ в определение области R. Отметим, что в приведенной выше формуле $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ означает абсолютное значение соответствующего определителя.

В предположении, что преобразование $(x, y) \to (u, v)$ является взаимно-однозначным, соотношение между якобианами прямого и обратного преобразования координат записывается в виде

$$\left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| = \left| \left(\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \right)^{-1} \right|$$

при условии, что знаменатель нигде не равен 0.

Итак, замена переменных в двойном интеграле производится с помощью следующих трех шагов:

1. Найти образ S в новой системе координат (u, v) для исходной области интегрирования R;
2. Вычислить якобиан преобразования $(x, y) \to (u, v)$ и записать дифференциал в новых переменных $dxdy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$;
3. Заменить в подынтегральном выражении исходные переменные x и y, выполнив, соответственно, подстановки $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$.

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (y-x)\,dxdy$, в котором область определения R ограничена прямыми $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{x}{3}+2$, $y = -\frac{x}{3}+4$.

Решение.
Область R схематически показана на рисунке 1. Для упрощения интеграла выполним замену переменных. Полагая $u = y - x$, $v = y + \frac{x}{3}$, получаем

$$y = x+1, \;\Rightarrow y - x = 1, \;\Rightarrow u = 1,$$

$$y = x-3, \;\Rightarrow y - x = -3, \;\Rightarrow u = -3,$$

$$y = -\frac{x}{3}+2, \;\Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2, \;\Rightarrow v = 2,$$

$$y = -\frac{x}{3}+4, \;\Rightarrow y + \frac{x}{3} = 4, \;\Rightarrow v = 4.$$

Следовательно, образ S области R имеет вид прямоугольника, как показано на рисунке 2.

Рис.1

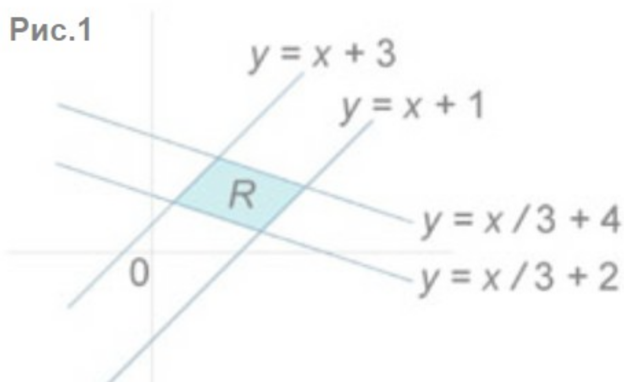
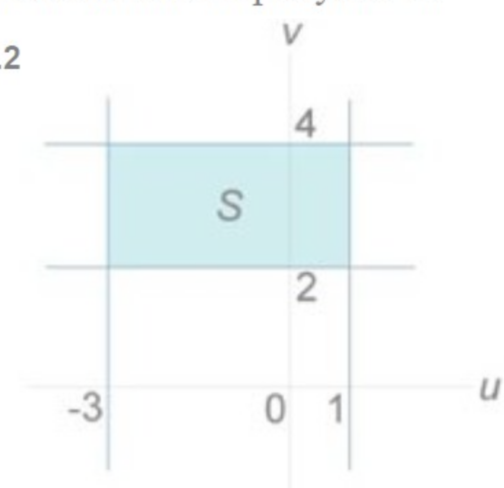


Рис.2



Определим якобиан данного преобразования. Сначала вычислим определитель обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда якобиан равен

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| = \left|\frac{1}{-\frac{4}{3}}\right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, дифференциал преобразуется следующим образом:

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{3}{4}dudv.$$

В новых переменных (u,v) интеграл вычисляется намного легче:

$$\iint\limits_R (y-x)\,dxdy = \iint\limits_S \left(u \cdot \frac{3}{4}dudv\right) = \frac{3}{4}\int\limits_{-3}^{1} udu \int\limits_{2}^{4} dv = \frac{3}{4}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{1} \cdot v|_2^4$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) \cdot (4-2) = -6.$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$, в котором область интегрирования R ограничена прямыми линиями $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 2$.

Решение.

Область интегрирования R имеет вид неправильного треугольника и показана на рисунке 3. Чтобы упростить ее, введем новые переменные: $y - x = u$, $y - 2x = v$. Выразим x, y через u, v и определим образ области интегрирования S в новой системе координат. Легко видеть, что

$$y = x, \;\Rightarrow y - x = 0, \;\Rightarrow u = 0,$$

$$y = 2x, \;\Rightarrow y - 2x = 0, \;\Rightarrow v = 0.$$

Рис.3

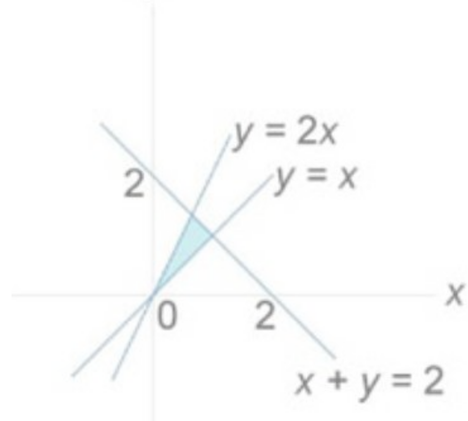
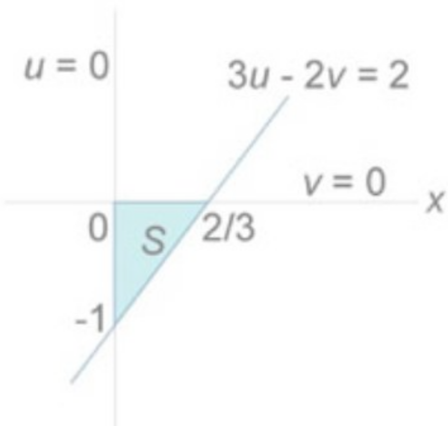


Рис.4



Заметим, что $\quad u - v = (y - x) - (y - 2x) = x.$

Следовательно, $\quad y = x + u = u - v + u = 2u - v.$

Таким образом, мы получаем $\quad x + y = 2, \;\Rightarrow u - v + 2u - v = 2, \;\Rightarrow 3u - 2v = 2.$

Если $v = 0$, то $u = \dfrac{2}{3}$. Соответственно, если $u = 0$, то $v = -1$. Область S имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок 4 выше).

Уравнение стороны $3u - 2v = 2$ можно переписать в виде $\quad 3u - 2v = 2, \;\Rightarrow v = \dfrac{3u - 2}{2} = \dfrac{3}{2}u - 1.$

Найдем якобиан.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 2 = 1.$$

Следовательно, $dxdy = dudv$ и двойной интеграл становится равным

$$\iint\limits_R (x+y)\,dxdy = \iint\limits_S (u-v+2u-v)\,dudv = \iint\limits_S (3u-2v)\,dudv = \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[\int\limits_{\frac{3}{2}u-1}^{0} (3u-2v)\,dv\right] du$$

$$= \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[\left(3uv - v^2\right)\Big|_{v=\frac{3}{2}u-1}^{0}\right] du = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[3u\left(\frac{3}{2}u-1\right) - \left(\frac{3}{2}u-1\right)^2\right] du$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{2} - 3u - \frac{9u^2}{4} + 3u - 1\right) du = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{4} - 1\right) du = \left(u - \frac{9}{4}\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}.$$

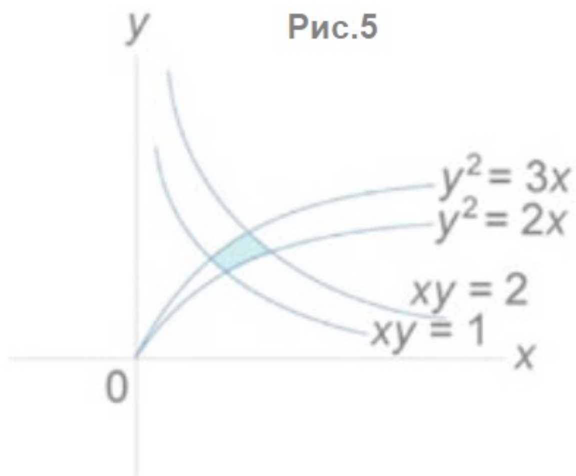
Пример 3

Вычислить интеграл $\iint\limits_R dxdy$, где область R ограничена параболами $y^2=2x$, $y^2=3x$ и гиперболами $xy=1$, $xy=2$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 5.

Рис.5



Для упрощения области R сделаем замену переменных.

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}.$$

Образ S области R определяется следующим образом:

$$y^2 = 2x, \;\Rightarrow \frac{y^2}{x} = 2, \;\Rightarrow u = 2,$$

$$y^2 = 3x, \;\Rightarrow \frac{y^2}{x} = 3, \;\Rightarrow u = 3,$$

$$xy = 1, \;\Rightarrow v = 1,$$

$$xy = 2, \;\Rightarrow v = 2.$$

Как видно, образ S является прямоугольником. Для нахождения якобиана выразим переменные x, y через u, v.

$$u = \frac{y^2}{x}, \;\Rightarrow x = \frac{y^2}{u}, \qquad v = xy, \;\Rightarrow v = \frac{y^2}{u}\cdot y, \;\Rightarrow y^3 = uv.$$

Отсюда следует

$$y = \sqrt[3]{uv} = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}, \qquad x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2v^2}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} = u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}.$$

Находим якобиан данного преобразования.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right) & u^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Соотношение между дифференциалами имеет вид

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|-\frac{1}{3u}\right| dudv = \frac{dudv}{3u}.$$

Теперь легко найти искомый интеграл:

$$\iint\limits_R dxdy = \iint\limits_S \frac{dudv}{3u} = \int\limits_2^3 \frac{du}{3u}\int\limits_1^2 dv = \frac{1}{3}(\ln u)\big|_2^3 \cdot v\big|_2^3 = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2)\cdot(2-1) = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dxdy$, где область R ограничена прямыми $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=2a\ \ (a>0)$.

Решение.

Область интегрирования R имеет форму параллелограмма и показана на рисунке 6.

Рис.6

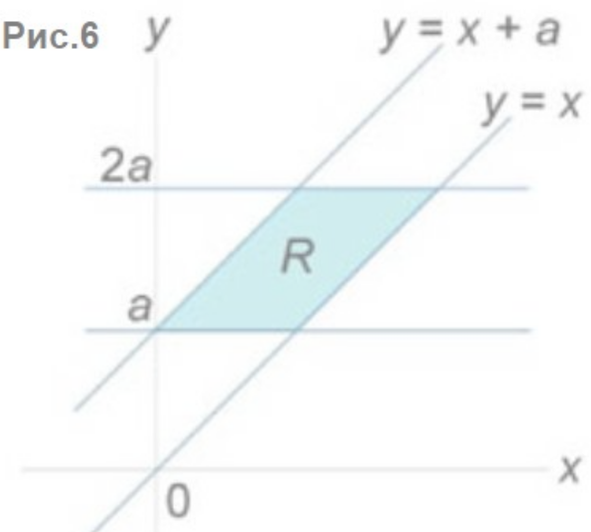
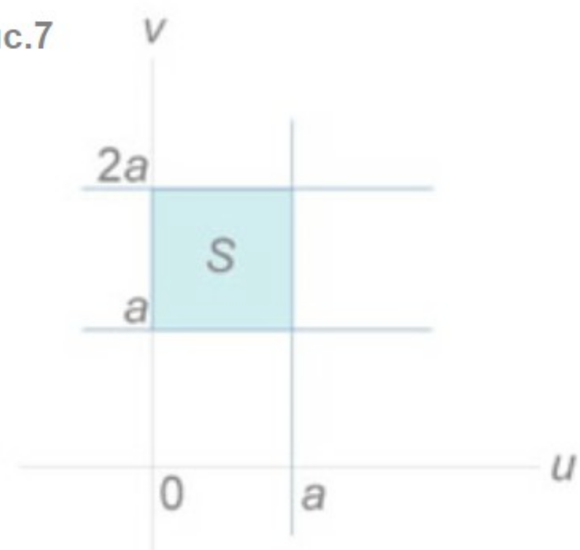


Рис.7



Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} u=y-x \\ v=y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=y-u=v-u \\ y=v \end{cases}.$$

Цель этой замены − упростить область интегрирования R.

Найдем образ S области R в новых координатах (u, v) .

$$y = x, \ \Rightarrow y - x = 0, \ \Rightarrow u = 0,$$

$$y = x + a, \ \Rightarrow y - x = a, \ \Rightarrow u = a,$$

$$y = a, \ \Rightarrow v = a,$$

$$y = 2a, \ \Rightarrow v = 2a.$$

Из рисунка 7 видно, что область S представляет собой прямоугольник. Вычислим якобиан.

$$\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial (v-u)}{\partial u} & \frac{\partial (v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1,$$

так что

$$dxdy = \left|\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)}\right| dudv = |-1| \cdot dudv = dudv.$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл.

$$\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint\limits_S \left[(v-u)^2+v^2\right] dudv = \iint\limits_S \left(v^2-2uv+u^2+v^2\right) dudv$$

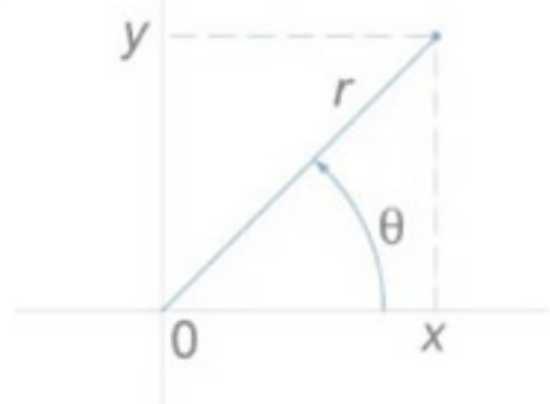
$$= \int\limits_a^{2a} \left[\int\limits_0^a \left(2v^2-2uv+u^2\right) du\right] dv = \int\limits_a^{2a} \left[\left(2v^2u-vu^2+\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{u=0}^{a}\right] dv = \int\limits_a^{2a} \left(2av^2-a^2v+\frac{a^3}{3}\right) dv$$

$$= \left(2a\cdot\frac{v^3}{3}-a^2\cdot\frac{v^2}{2}+\frac{a^3}{3}\cdot v\right)\Bigg|_a^{2a} = \left(\frac{2a}{3}\cdot 8a^3-\frac{a^2}{2}\cdot 4a^2+\frac{a^3}{3}\cdot 2a\right)$$

$$-\left(\frac{2a}{3}\cdot a^3-\frac{a^2}{2}\cdot a^2+\frac{a^3}{3}\cdot a\right) = \frac{7a^4}{2}.$$

Двойные интегралы в полярных координатах

Рис.1



Одним из частных случаев замены переменных является переход из декартовой в *полярную систему координат* (рисунок 1).

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta.$$

Якобиан такого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot r\cos\theta - \left(-r\sin\theta\right)\cdot\sin\theta = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r.$$

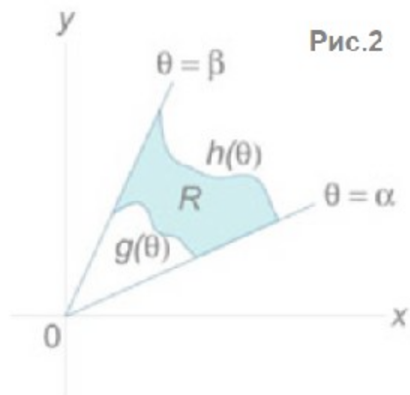
Следовательно, дифференциальный элемент в полярных координатах будет равен

$$dxdy = \left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}\right| drd\theta = rdrd\theta.$$

Пусть область интегрирования R в полярных координатах определяется следующим образом (рисунок 2):

$$0 \le g(\theta) \le r \le h(\theta), \ \ \alpha \le \theta \le \beta, \text{ где } \ \beta - \alpha \le 2\pi.$$

Рис.2



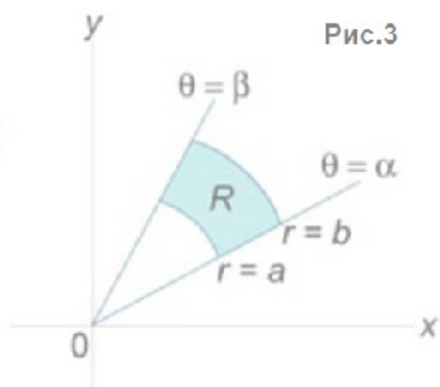
Тогда двойной интеграл в полярных координатах описывается формулой

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta.$$

Будем называть *полярным прямоугольником* область интегрирования, показанную на рисунке 3 и удовлетворяющую условиям

$$0 \le a \le r \le b, \ \ \alpha \le \theta \le \beta, \text{ где } \ \beta - \alpha \le 2\pi.$$

Рис.3



В этом случае формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta.$$

Будьте внимательны, чтобы не пропустить сомножитель (якобиан) r в правой части этой формулы!

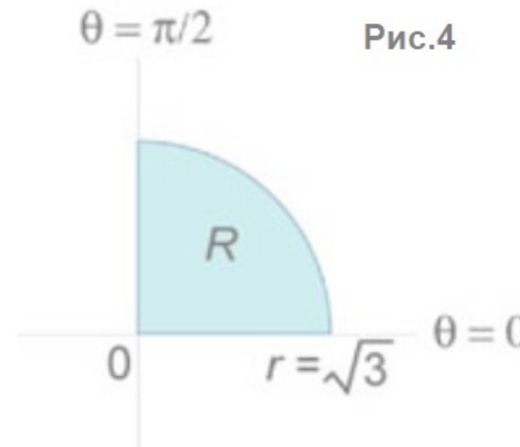
Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right) dydx$, преобразовав его в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой сектор $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ круга радиусом $r=\sqrt{3}$.

Решение.

Область R в полярных координатах описывается множеством $R=\left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ (рисунок 4). Применяя формулу

Рис.4



$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta,$$

получаем

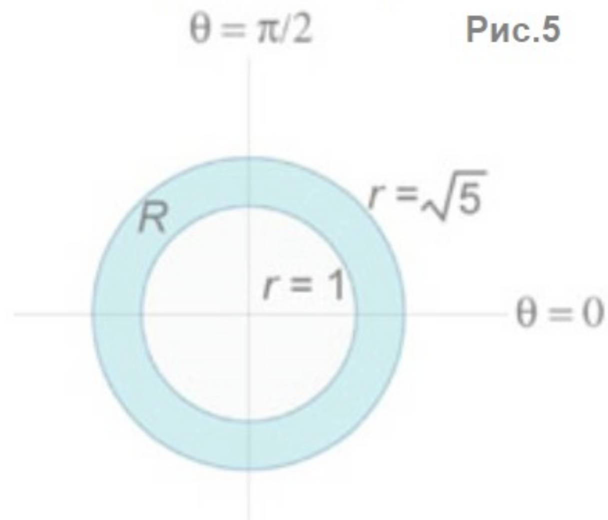
$$\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right) dydx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) rdrd\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^3 dr = \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\iint\limits_R xydydx$, в котором область интегрирования R представляет собой кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=5$.

Решение.
В полярных координатах область интегрирования R является полярным прямоугольником (рисунок 5):

Рис.5



$$R=\left\{(r,\theta)\mid 1\le r\le\sqrt{5},0\le\theta\le 2\pi\right\}.$$

Тогда, используя формулу

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy=\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta,$$

находим значение интеграла

$$\iint\limits_R xydydx=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\sqrt{5}} r\cos\theta r\sin\theta rdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int\limits_1^{\sqrt{5}} r^3dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\int\limits_1^{\sqrt{5}} r^3dr$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=\frac{1}{4}(-\cos 4\pi+\cos 0)\cdot\frac{1}{4}(25-1)=\frac{1}{4}(-1+1)\cdot 6=0.$$

Пример 3

Найти интеграл $\iint\limits_R \sin\theta dr d\theta$, где область интегрирования R ограничена кардиоидой $r = 1 + \cos\theta$ (рисунок 6).

Решение.
Данный интеграл уже записан в полярных координатах. Выражая его через повторный интеграл, получаем:

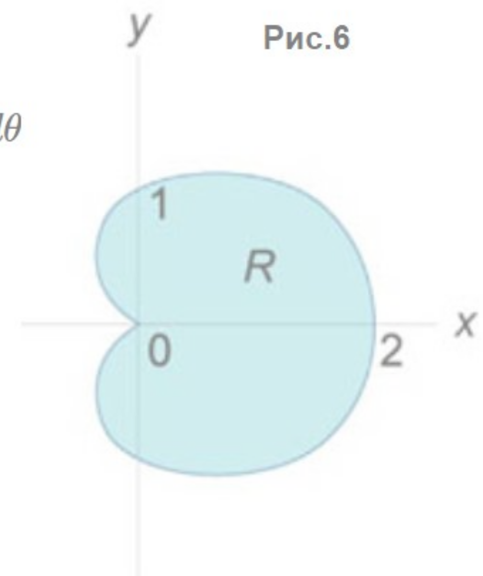
$$\iint\limits_R \sin\theta dr d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1+\cos\theta} \sin\theta dr d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{1+\cos\theta} dr\right]\sin\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left[r|_0^{1+\cos\theta}\right]\sin\theta d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi}(\sin\theta + \cos\theta\sin\theta)\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\sin\theta d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2} d\theta$$

$$= (-\cos\theta)|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 - \frac{1}{4}\cos 4\pi + \frac{1}{4}\cos 0$$

$$= -\cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{\tfrac{1}{4}} + \cancel{\tfrac{1}{4}} = 0.$$

Рис.6



Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right) dxdy$ в круге $x^2+y^2=2x$.

Решение.
Область интегрирования R показана на рисунке 7.

Рис.7

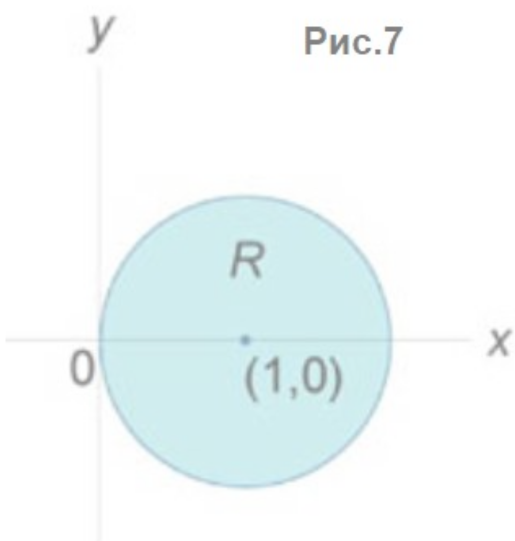
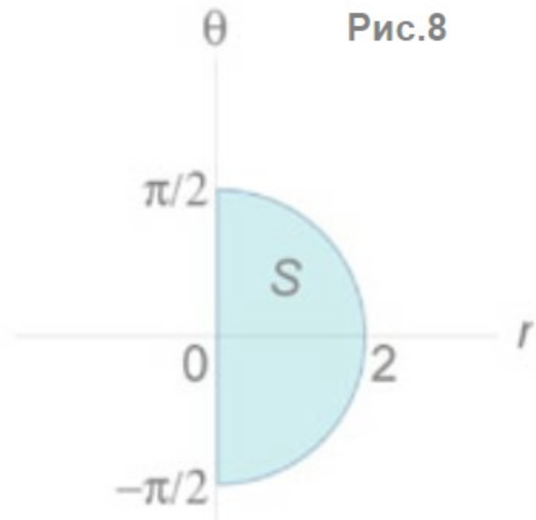


Рис.8



Преобразуем уравнение окружности следующим образом:

$$x^2+y^2=2x,\ \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1,\ \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1.$$

Подставляя $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, найдем уравнение окружности в полярных координатах.

$$x^2+y^2=2x,\ \Rightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=2r\cos\theta,\ \Rightarrow r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2r\cos\theta,\ \Rightarrow r=2\cos\theta.$$

Образ S области интегрирования R показан на рисунке 8. После перехода к полярным координатам вычисляем двойной интеграл.

$$\iint_R \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_S \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) rdrd\theta = \iint_S r^3 drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\theta} r^3 dr\right] d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{2\cos\theta}\right] d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \left(\frac{3}{2}\theta+\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\frac{1}{8}\sin 2\pi\right) - \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\sin\pi-\frac{1}{8}\sin 2\pi\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 5

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ посредством преобразования в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой круг $x^2+y^2 \le \pi^2$.

Решение.

Область интегрирования R представлена на рисунке 9.

Рис.9

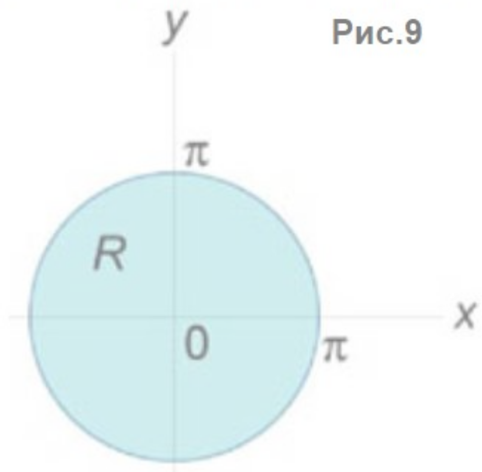
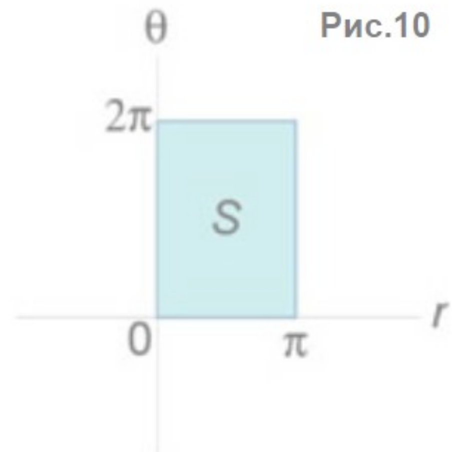


Рис.10



Образ S данной области описывается множеством $\{S=(r,\theta)\,|\,0\le r\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi\}$ и показан на рисунке 10. Запишем исходный двойной интеграл в полярных координатах.

$$I = \iint\limits_R \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_S \sin\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\,rdrd\theta = \iint\limits_S r\sin r drd\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} r\sin r dr$$
$$= 2\pi\int\limits_0^{\pi} r\sin r dr.$$

Вычислим последний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = \left.(uv)\right|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Пусть $u = r$, $dv = \sin r dr$. Тогда $du = dr$, $v = \int \sin r dr = -\cos r$. Следовательно,

$$I = 2\pi\int\limits_0^{\pi} r\sin r dr = 2\pi\left[\left.(-r\cos r)\right|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}(-\cos r)\,dr\right] = 2\pi\left[\left.(-r\cos r)\right|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos r dr\right]$$
$$= 2\pi\left[\left.(-r\cos r)\right|_0^{\pi} + \left.(\sin r)\right|_0^{\pi}\right] = 2\pi\left.(\sin r - r\cos r)\right|_0^{\pi} = 2\pi\left[(\sin\pi - \pi\cos\pi) - (\sin 0 - 0\cdot\cos 0)\right]$$
$$= 2\pi\cdot\pi = 2\pi^2.$$

Геометрические приложения двойных интегралов

Площадь плоской фигуры

Если $f(x,y)=1$ в интеграле $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$, то двойной интеграл равен площади области интегрирования R.

Площадь области типа I (элементарной относительно оси Oy) (рисунок 1) выражается через повторный интеграл в виде

$$A=\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)}dydx.$$

Аналогично, площадь области типа II (элементарной относительно оси Ox) (рисунок 2) описывается формулой

$$A=\int\limits_c^d\int\limits_{p(y)}^{q(y)}dxdy.$$

Рис.1

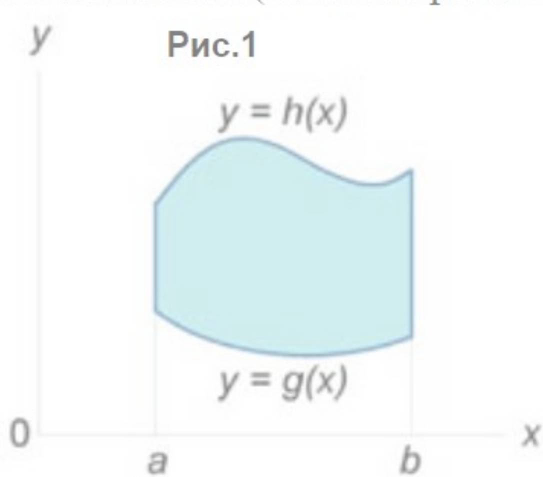
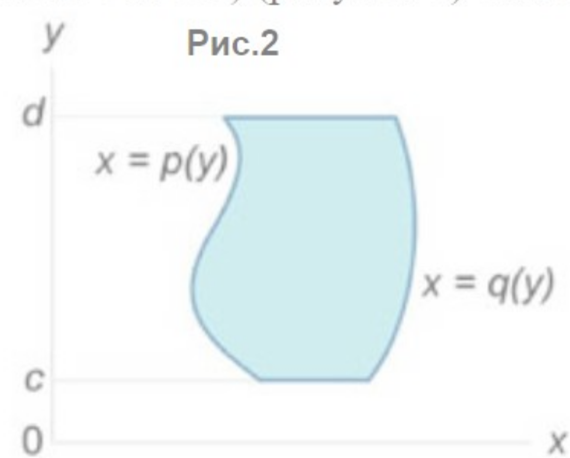


Рис.2



Объем тела

Если $f(x,y)>0$ в области интегрирования R, то объем цилиндрического тела с основанием R, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, выражается формулой

$$V=\iint_R f(x,y)\,dA.$$

В случае, когда R является областью типа I, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, объем тела равен

$$V=\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Для области R типа II, ограниченной графиками функций $y=c$, $y=d$, $x=p(y)$, $x=q(y)$, объем соответственно равен

$$V=\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

Если в области R выполняется неравенство $f(x,y)\geq g(x,y)$, то объем цилиндрического тела между поверхностями $z_1=g(x,y)$ и $z_2=f(x,y)$ с основанием R равен

$$V=\iint_R\left[f(x,y)-g(x,y)\right]dA.$$

Площадь поверхности

Предположим, что поверхность задана функцией $z = g(x, y)$, имеющей область определения R. Тогда площадь такой поверхности над областью R определяется формулой

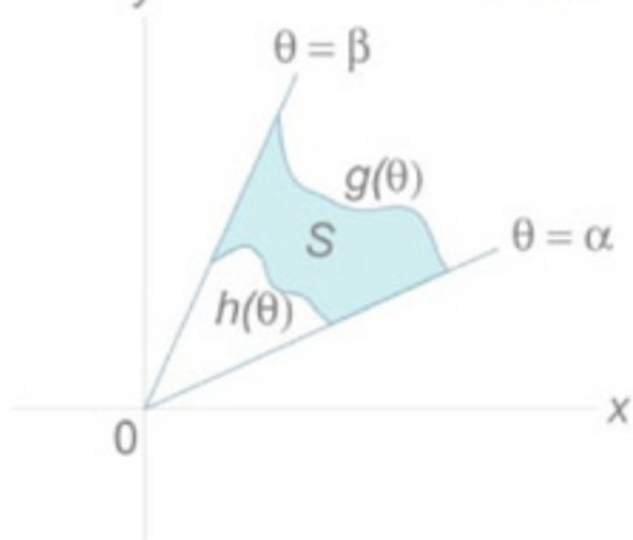
$$S = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

при условии, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны всюду в области R.

Площадь и объем в полярных координатах

Пусть S является областью, ограниченной линиями $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r = h(\theta)$, $r = g(\theta)$ (рисунок 3). Тогда площадь этой области определяется формулой

Рис.3



$$A = \iint\limits_R dA = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta.$$

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(r, \theta)$ с основанием S, выражается в полярных координатах в виде

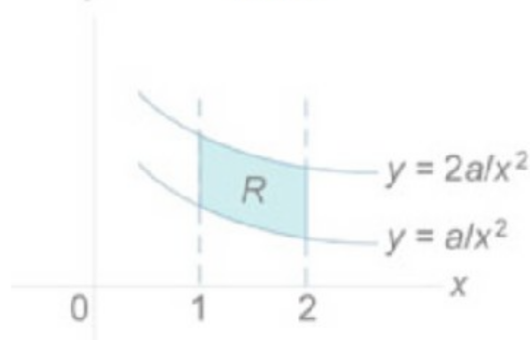
$$V = \iint\limits_S f(r, \theta)\, r dr d\theta.$$

Пример 1

Найти площадь области R, ограниченной гиперболами $y = \frac{a^2}{x}$, $y = \frac{2a^2}{x}$ $(a > 0)$ и вертикальными прямыми $x = 1$, $x = 2$.

Решение.
Область R схематически показана на рисунке 4. Используя формулу для площади области I типа

Рис.4



$$A = \iint\limits_R dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} dydx,$$

получаем

$$A = \iint\limits_R dxdy = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} dy \right] dx = \int\limits_1^2 \left[y|_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} \right] dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x} \right) dx = a^2 \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$= a^2 (\ln 2 - \ln 1) = a^2 \ln 2.$$

Пример 2

Вычислить площадь области R, ограниченной линиями $y^2 = a^2 - ax$, $y = a + x$.

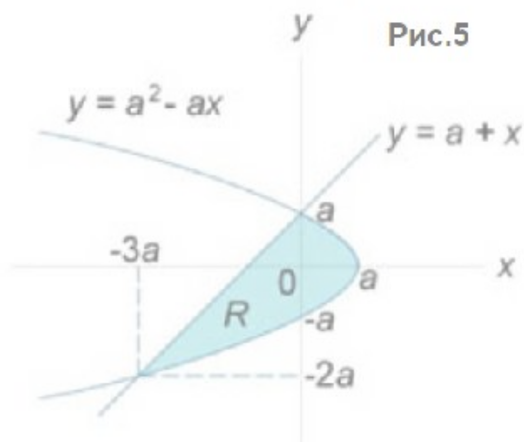
Решение.

Сначала определим точки пересечения двух заданных линий.

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = a^2 - ax \\ y = a + x \end{array} \right., \Rightarrow (a+x)^2 = a^2 - ax, \Rightarrow a^2 + 2ax + x^2 = a^2 - ax, \Rightarrow x^2 + 3ax = 0,$$

$$\Rightarrow x(x+3a) = 0, \Rightarrow x_{1,2} = 0; \; -3a.$$

Рис.5



Следовательно, координаты точек пересечения равны

$$x_1 = 0, \; y_1 = a + 0 = a,$$

$$x_2 = -3a, \; y_2 = a - 3a = -2a.$$

Область R представлена на рисунке 5. Будем рассматривать ее как область типа II.

Для вычисления площади преобразуем уравнения границ:

$$y^2 = a^2 - ax, \Rightarrow ax = a^2 - y^2, \Rightarrow x = a - \frac{y^2}{a},$$

$$y = a + x, \Rightarrow x = y - a.$$

Получаем

$$A=\iint\limits_R dxdy=\int\limits_{-2a}^{a}\left[\int\limits_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}}dx\right]dy=\int\limits_{-2a}^{a}\left[\int\limits_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}}dx\right]dy=\int\limits_{-2a}^{a}\left[x\Big|_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}}\right]dy$$

$$=\int\limits_{-2a}^{a}\left[a-\frac{y^2}{a}-(y-a)\right]dy=\int\limits_{-2a}^{a}\left(2a-\frac{y^2}{a}-y\right)dy=\left(2ay-\frac{y^3}{3a}-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}$$

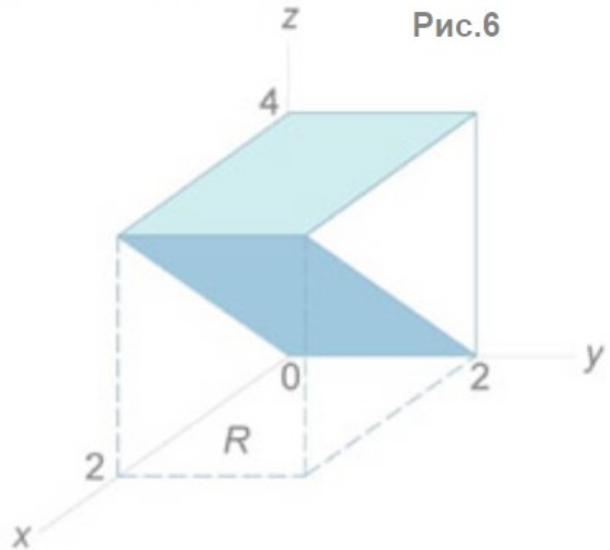
$$=\left(2a^2-\frac{a^3}{3a}-\frac{a^2}{2}\right)-\left(-4a^2+\frac{8a^3}{3a}-\frac{4a^2}{2}\right)=\frac{9a^2}{2}.$$

Пример 3

Найти объем тела в первом октанте, ограниченного плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = x$, $z + x = 4$.

Рис.6

Решение.
Данное тело показано на рисунке 6.



Из рисунка видно, что основание R является квадратом. Для заданных x, y значение z изменяется от $z = x$ до $z = 4 - x$. Тогда объем равен

$$V = \iint\limits_R [(4-x)-x]\,dxdy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^2 (4-2x)\,dy\right] dx = \int\limits_0^2 \left[(4y - 2xy)\Big|_{y=0}^{2}\right] dx = \int\limits_0^2 (8-4x)\,dx$$

$$= \left(8x - 2x^2\right)\Big|_0^2 = 16 - 8 = 8.$$