

**Решение
дифференциальных
уравнений с
разделяющимися
переменными**

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее производные от искомой функции или её дифференциалы.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ИЛИ

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Примеры ДУ:

$$6y' - xy = 0$$

$$y''' + 2xy'' = 0$$

$$y'' = 4x$$

$$y' = xe^y$$

$$x dy = 2y dx$$

$$x dy = y \ln x dx$$

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком ДУ**.

$$xy' - y = 4$$

$$y'' - xy' = 1 + x^2$$

$$y^{(3)} + 2xy'' = 0$$

Решением ДУ называется такая функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество (верное равенство).

$y = \cos x$ - решение ДУ $y'' + y = 0$

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$-\cos x + \cos = 0$$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

Пример: Показать, что данная функция

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1, C_2 \in R$$

является решением ДУ $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

Т.о. функции вида $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ являются решениями данного ДУ при любом выборе постоянных C_1 и C_2 :

$$C_1 = 1 \quad \text{и} \quad C_2 = 0: \quad y = \sin x$$

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 2: \quad y = 2 \cos x$$

$$C_1 = 3 \quad \text{и} \quad C_2 = -1: \quad y = 3 \sin x - \cos x$$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения I порядка

- ДУ I порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad dy = f(x, y) dx$$

- **Общим решением ДУ** I порядка называется функция $y = f(x, C)$, которая зависит от одного произвольного постоянного C .
 или $\Phi(x, y, C) = 0$ (неявный вид)
 и

- **Частным решением ДУ** I порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$ полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

ил
и $\Phi(x, y, C_0) = 0$ (неявный вид)

Пример: ДУ: $y' = 3x^2$

$$y = \int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$y = x^3 + C$ -общее решение

$$y' = (x^3 + C)' = 3x^2$$

$$C = 2: \quad y = x^3 + 2$$

$$C = -1: \quad y = x^3 - 1$$

$$C = 0: \quad y = x^3$$

частные решения

$$y' = (x^3 + 2)' = 3x^2$$

$$y' = (x^3 - 1)' = 3x^2$$

$$y' = (x^3)' = 3x^2$$

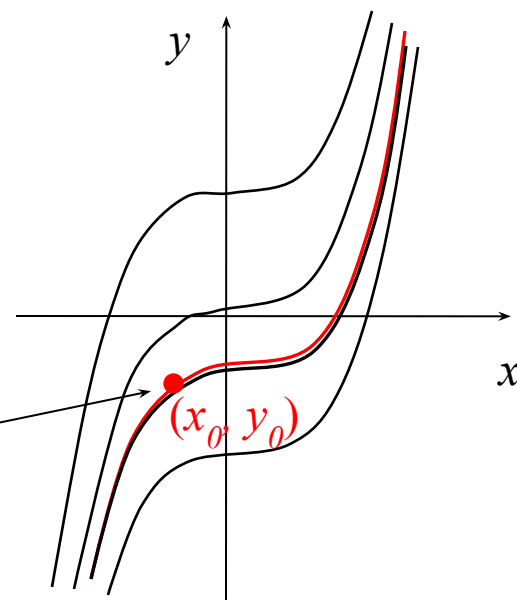
Геометрически:

- Общее решение $Ду = \varphi(x, C)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy ;
- Частное решение $Ду = \varphi(x, C_0)$ - одна кривая этого семейства, проходящая через точку (x_0, y_0)

$$y' = 3x^2$$

$$y = x^3 + C \quad \text{-общее решение}$$

$$y = x^3 - 1 \quad \text{-частное решение}$$



- Условие, что при $x=x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 называется **начальным условием**.

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y \Big|_{x=x_0} = y_0$$

- Задача отыскания конкретного частного решения данного ДУ по начальным данным называется **задачей Коши (Cauchy)**.

Пример: Решить задачу Коши: $y' = e^{-3x}$, $y(0) = \frac{2}{3}$

$$y = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

-общее решение

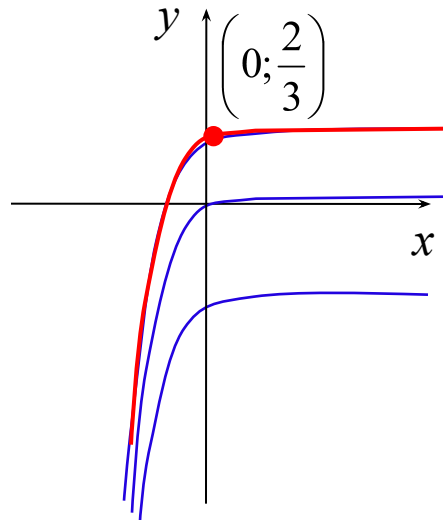
$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

Подставим в общее решение начальные условия: $y(0) = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}e^{-3 \cdot 0} + C$$

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} + C$$

$$C = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$



$$y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + 1$$
 -частное решение

1. ДУ I порядка с разделёнными переменными

- Если каждая часть ДУ представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной, то говорят, что переменные в этом уравнении **разделены**.
$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

В этом случае уравнение достаточно проинтегрировать:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

Пример: Решить ДУ $x dx + y dy = 0$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

общее решение:

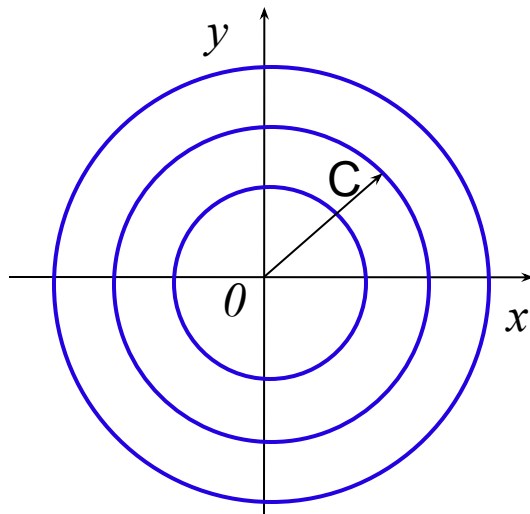
$$y^2 = -x^2 + C$$

$$y dy = -x dx$$

или

$$y^2 + x^2 = C$$

$$\int y dy = -\int x dx$$



$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad | \cdot 2$$

$$y^2 = -x^2 + \underbrace{2C}_C$$

Геометрически: получили семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C .

2. ДУ I порядка с разделяющимися переменными

- Уравнения, в которых переменные разделяются, называются **ДУ с разделяющимися переменными**.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

где $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$

некоторые функции.

Пример: Найти общее и частное решение ДУ

$$x dy = y dx, \quad y(5) = 10$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$x dy = y dx \quad \left| \cdot \frac{1}{xy} \right.$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + C$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\ln |y| = \ln |xC|$$

$$|y| = |Cx|$$

$$y = \pm Cx \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Итак, общее решение ДУ: $y = Cx$

2) Найдём частное решение ДУ, если $y(5) = 10$

Подставим эти начальные условия в общее решение ДУ и найдем C :

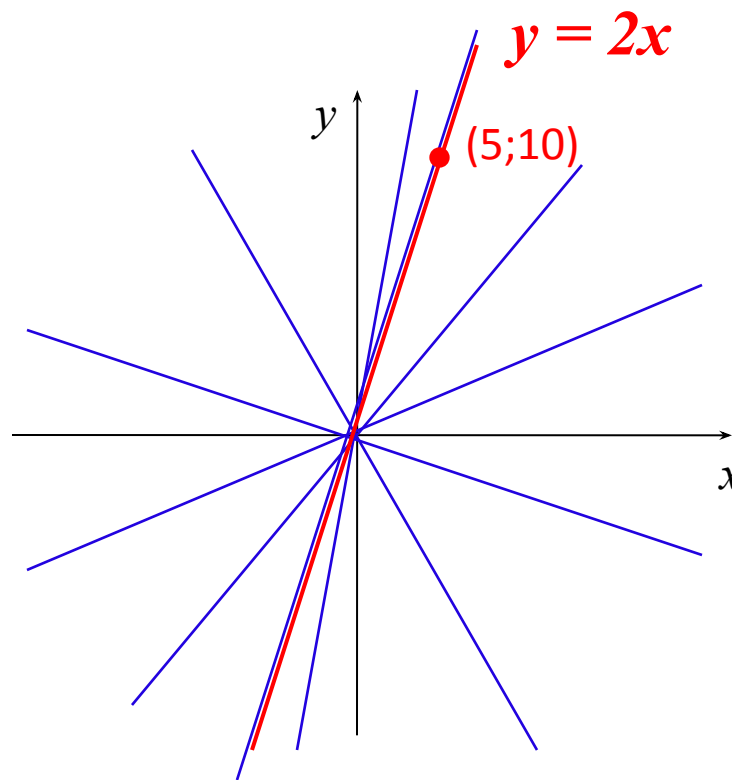
$$\left. \begin{array}{l} 10 = 5 \cdot C \\ C = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2x \text{ - частное решение ДУ.}$$
$$y = Cx$$

Ответ: общее решение $y = Cx$
частное решение

$$y = 2x$$

Геометрическ

и:



общее решение $y = Cx$

частное решение $y = 2x$

Пример: Решить задачу Коши $ydy = -2x^2 dx$

$$\int ydy = \int -2x^2 dx$$

$$y(3) = 0$$

$$\frac{y^2}{2} = -2\frac{x^3}{3} + C \quad | \cdot 2$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$y^2 = -\frac{4}{3}x^3 + C \cdot 2$$

$$0 = \pm \sqrt{-\frac{4}{3} \cdot 3^3 + C}$$

$$y^2 = -\frac{4}{3}x^3 + C$$

$$0 = \pm \sqrt{-36 + C}$$

$$C = 36$$

$$y^2 + \frac{4}{3}x^3 = C$$

$$y^2 + \frac{4}{3}x^3 = 36$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{4}{3}x^3 + C}$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{4}{3}x^3 + 36}$$

Пример: Найти общее решение ДУ $3xdy = (y + 1)dx$

$$3xdy = (y + 1)dx \quad \left| \cdot \frac{1}{3x(y+1)} \right.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{3x}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{3x}$$

$$y + 1 = x^{\frac{1}{3}} \cdot C$$

$$\ln(y + 1) = \frac{1}{3} \ln x + C$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \cdot C - 1$$

$$\ln(y + 1) = \ln x^{\frac{1}{3}} + \ln C$$

$$\ln(y + 1) = \ln \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot C \right)$$

$$y = \sqrt[3]{x} \cdot C - 1$$