Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее производные от искомой функции или её дифференциалы.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0$$

Примеры ДУ:

$$6y' - xy = 0$$

$$y''' + 2xy'' = 0$$

$$y'' = 4x$$

$$y' = xe^{y}$$

$$x\,dy = 2y\,dx$$

$$x\,dy = y\ln x\,dx$$

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком ДУ**.

$$xy' - y = 4$$
$$y'' - xy' = 1 + x^2$$
$$y^{(3)} + 2xy'' = 0$$

Решением ДУ называется такая функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество (верное равенство).

$$\boxed{y = cosx}$$ - решение ДУ

$$y'' + y = 0$$

$$y' = -sinx$$
$$y'' = -cosx$$
$$-cosx + cos = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x\end{aligned}}$$

Пример: Показать, что данная функция

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1, C_2 \in R$$

является решением ДУ $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}}$$

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

Т.о. функции вида $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ являются решениями данного ДУ при любом выборе постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = 1 \quad u \quad C_2 = 0: \quad y = \sin x$$

$$C_1 = 0 \quad u \quad C_2 = 2: \quad y = 2\cos x$$

$$C_1 = 3 \quad u \quad C_2 = -1: \quad y = 3\sin x - \cos x$$

Дифференциальные уравнения I порядка

- ДУ I порядка имеет вид $F\left(x, y, y'\right) = 0$

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad dy = f(x, y)\,dx$$

- **Общим решением ДУ** I порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая зависит от одного произвольного постоянного С.

или $\Phi(x, y, C) = 0$ (неявный вид)

- **Частным решением ДУ** I порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$ полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

или $\Phi(x, y, C_0) = 0$ (неявный вид)

Пример: ДУ: $y' = 3x^2$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$y = \int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$$

$\boxed{y = x^3 + C}$ -общее решение $\qquad y' = \left(x^3 + C\right)' = 3x^2$

$$\left.\begin{aligned} C = 2: &\quad y = x^3 + 2 \\ C = -1: &\quad y = x^3 - 1 \\ C = 0: &\quad y = x^3 \end{aligned}\right\} \text{частные решения}$$

$$y' = \left(x^3 + 2\right)' = 3x^2$$

$$y' = \left(x^3 - 1\right)' = 3x^2$$

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$$

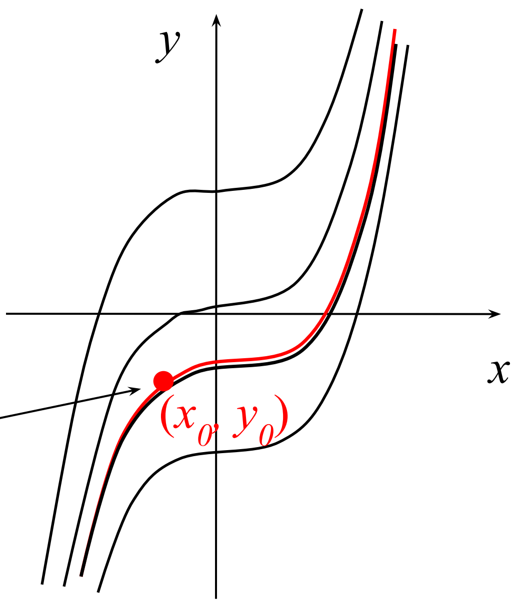
Геометрически:

- Общее решение ДУ $y = \varphi(x, C)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Оху;
- Частное решение ДУ $y = \varphi(x, C_0)$ -одна кривая этого семейства, проходящая через точку (x_0, y_0)

$$y' = 3x^2$$

$y = x^3 + C$ -общее решение

$y = x^3 - 1$ -частное решение



- Условие, что при $x=x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 называется **начальным условием**.

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{или} \qquad y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

- Задача отыскания конкретного частного решения данного ДУ по начальным данным называется **задачей Коши (Cauchy)**.

Пример: Решить задачу Коши: $y' = e^{-3x}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$

$$y = \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$\boxed{\int e^{\kappa x}dx = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa x} + C}$$

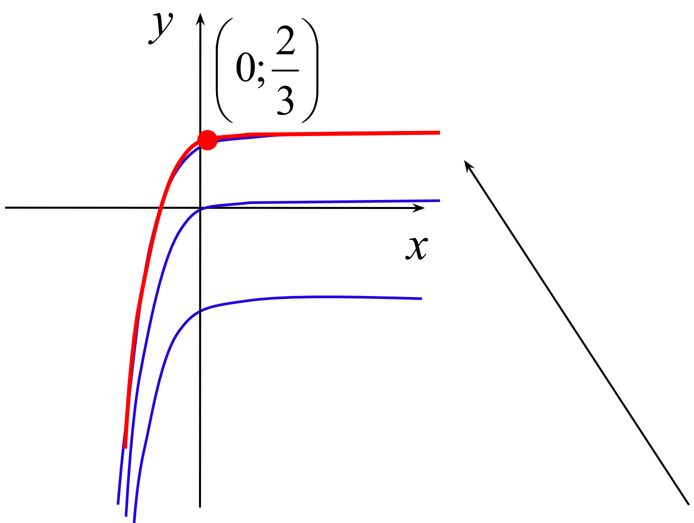
$$\boxed{y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C}$$ -общее решение

Подставим в общее решение начальные условия: $y(0) = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}e^{-3\cdot 0} + C$$

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} + C$$

$$C = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$



$$y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + 1$$ -частное решение

1. ДУ I порядка с разделёнными переменными

- Если каждая часть ДУ представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной, то говорят, что переменные в этом уравнении **разделены**.

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

В этом случае уравнение достаточно проинтегрировать:

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C$$

Пример: Решить ДУ $x\,dx + y\,dy = 0$

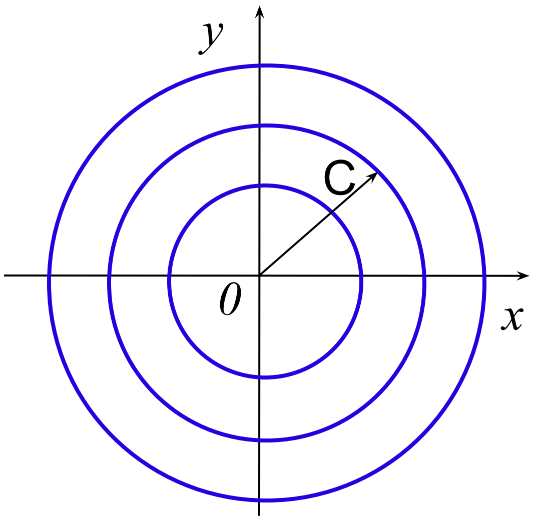
$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1}$$

общее решение: $\underline{y^2 = -x^2 + C}$

$$y\,dy = -x\,dx$$

или $\underline{y^2 + x^2 = C}$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$



$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \qquad \Big|\cdot 2$$

$$y^2 = -x^2 + \underbrace{2C}_{C}$$

Геометрически: получили семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом С.

2. ДУ I порядка с разделяющимися переменными

- Уравнения, в которых переменные разделяются, называются **ДУ с разделяющимися переменными**.

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0$$

где $M_1(x),\quad M_2(x),\quad N_1(y),\quad N_2(y)$

некоторые функции.

Пример: Найти общее и частное решение ДУ

$$x\,dy = y\,dx, \quad y(5) = 10$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

$$x\,dy = y\,dx \quad \Big| \cdot \frac{1}{xy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x \end{array}}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln|xC|$$

$$|y| = |Cx|$$

$$y = \pm Cx \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Итак, общее решение ДУ: $y = Cx$

2) Найдём частное решение ДУ, если $y(5) = 10$

Подставим эти начальные условия в общее решение ДУ и найдем С:

$$\left.\begin{aligned} &10 = 5 \cdot C \\ &C = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad y = 2x$$

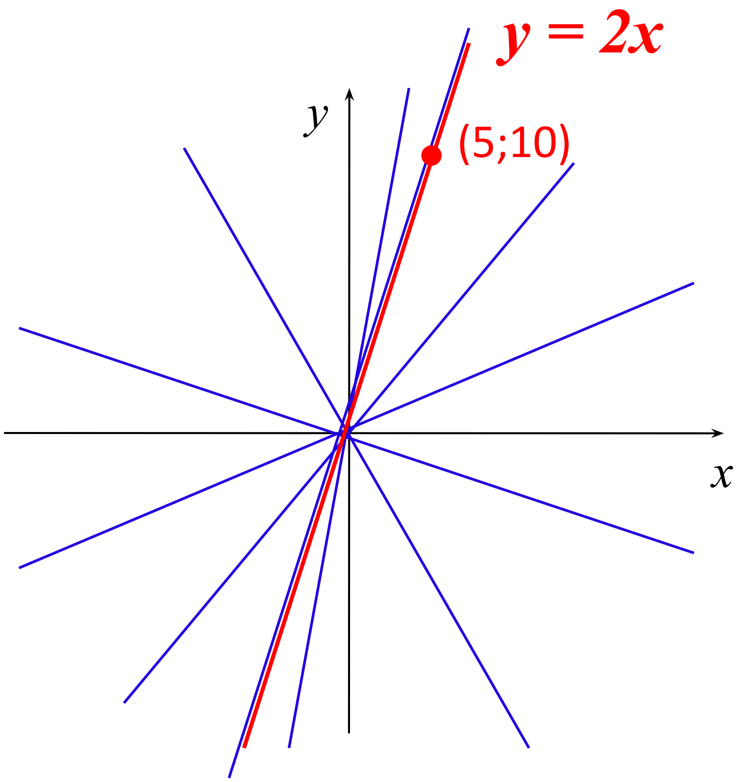
- частное решение ДУ.

$$y = Cx$$

Ответ: общее решение $y = Cx$

частное решение $y = 2x$

Геометрическ и:



общее решение $y = Cx$

частное решение $y = 2x$

Пример: Решить задачу Коши $ydy = -2x^2dx$

$$y(3) = 0$$

$$\int ydy = \int -2x^2dx$$

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1}$$

$$\frac{y^2}{2} = -2\frac{x^3}{3} + C \quad \Big| \cdot 2$$

$$y^2 = -\frac{4}{3}x^3 + C \cdot 2$$

$$y^2 = -\frac{4}{3}x^3 + C$$

$$0 = \pm\sqrt{-\frac{4}{3} \cdot 3^3 + C}$$

$$0 = \pm\sqrt{-36 + C}$$

$$C = 36$$

$$\boxed{\begin{gathered} y^2 + \frac{4}{3}x^3 = C \\ y = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}x^3 + C} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} y^2 + \frac{4}{3}x^3 = 36 \\ y = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}x^3 + 36} \end{gathered}}$$

Пример: Найти общее решение ДУ $3xdy = (y+1)dx$

$$3xdy = (y+1)dx \,\Big|\cdot \frac{1}{3x(y+1)}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{3x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x \end{array}}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{3x}$$

$$y+1 = x^{\frac{1}{3}} \cdot C$$

$$\ln(y+1) = \frac{1}{3}\ln x + C$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \cdot C - 1$$

$$\ln(y+1) = \ln x^{\frac{1}{3}} + \ln C$$

$$\ln(y+1) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot C\right)$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{x} \cdot C - 1}$$