

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

- Основополагающие результаты по теории фильтрации были получены А.Н. Колмогоровым и Н. Винером (1941 г.). Ими рассматривались только стационарные случайные процессы. В дальнейшем результаты были обобщены и на классы нестационарных процессов.  
Перейдем к изложению основных положений теории фильтров Колмогорова–Винера.  
Рассмотрим линейную систему, представленную на рисунке 1

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

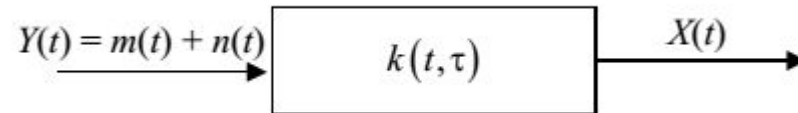


Рисунок 1 - К постановке задачи  
фильтрации

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

*Заданы взаимно некоррелированные центрированные нестационарные случайные процессы в виде функций времени  $m(t)$  и  $n(t)$  с корреляционными функциями*

$$\begin{cases} R_{mm}(t_1, t_2) = M[m(t_1)m(t_2)]; \\ R_{nn}(t_1, t_2) = M[n(t_1)n(t_2)]. \end{cases}$$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

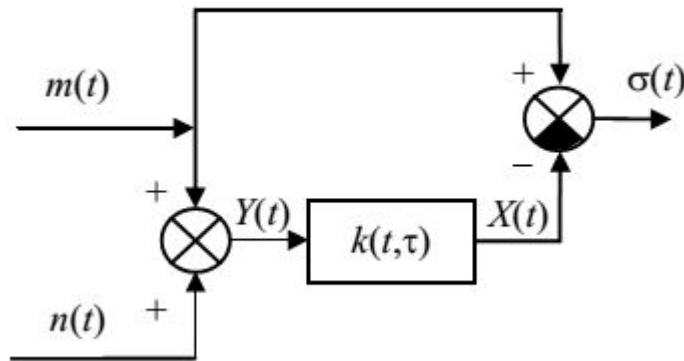
- *Требуется найти ИПФ  $k(t^*, \tau)$  фильтра, оптимальным образом выделяющего реализацию случайного процесса  $m(t)$  в виде некоторого процесса  $X(t)$  в условиях, когда на вход поступает аддитивная смесь полезного сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$ .  
Критерием оптимальности является минимум среднеквадратической ошибки (СКО)*

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

$$M[\sigma^2(t)] = \min,$$

где  $\sigma(t) = m(t) - X(t)$ .

Структурная схема, поясняющая постановку задачи фильтрации в классе линейных систем, представлена на рисунке 2.



К постановке задачи фильтрации

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

- Найдем уравнение, определяющее ИПФ оптимальной, в указанном выше смысле, системы. Положим, что при  $t = 0$  фильтр имеет нулевые начальные условия; тогда сигнал ошибки  $\sigma(t)$  определяется зависимостью

$$\sigma(t) = m(t) - \int_0^t k(t, \tau) Y(\tau) d\tau.$$

Для квадрата ошибки можно записать выражение

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова–Винера

- Для квадрата ошибки можно записать выражение

$$\sigma^2(t) = m^2(t) - 2 \int_0^t k(t, \tau) Y(\tau) m(t) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^t k(t, \tau_1) k(t, \tau_2) Y(\tau_1) Y(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

После осреднения по множеству получим

$$M[\sigma^2(t)] = D_{mm}(t) - 2 \int_0^t k(t, \tau) R_{Ym}(\tau, t) d\tau + \int_0^t \int_0^t k(t, \tau_1) k(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Предположим, что

$$k(t, \tau) = k^*(t, \tau) + \gamma \Delta k(t, \tau),$$

т.е. ИПФ  $k(t, \tau)$  отличается от оптимальной ИПФ  $k(t^*, \tau)$  на некоторую функцию  $\gamma \Delta k(t, \tau)$



# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Тогда из предыдущих двух формул следует

$$\begin{aligned}
 M[\sigma^2(t)] = & D_{mm}(t) - 2 \int_0^t k^*(t, \tau) R_{Ym}(\tau, t) d\tau + \int_0^t \int_0^t k^*(t, \tau_1) k^*(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\
 & - 2\gamma \int_0^t \Delta k(t, \tau) R_{Ym}(\tau, t) d\tau + 2\gamma \int_0^t \int_0^t k^*(t, \tau_1) \Delta k(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \gamma^2 \int_0^t \int_0^t \Delta k(t, \tau_1) \Delta k(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,
 \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}
 M[\sigma^2(t)] = & \bar{\sigma}_{\min}^2(t) - 2\gamma \left[ \int_0^t \Delta k(t, \tau) R_{Ym}(\tau, t) d\tau - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \int_0^t k^*(t, \tau_1) \Delta k(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] + \gamma^2 E^2(t);
 \end{aligned}$$

18

здесь

$$E^2(t) = \int_0^t \int_0^t \Delta k(t, \tau_1) \Delta k(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

19

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова–ВИНЕРА

— существенно неотрицательная величина, являющаяся математическим ожиданием квадрата интеграла  $M \left[ \int_0^t \Delta k(t, \tau) Y(\tau) d\tau \right]^2$ .

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова–ВИНЕРА

Из предыдущей формулы следует, что для того, чтобы

$$M[\sigma^2(t)] = \min,$$

необходимо выполнение условия

$$\int_0^t \Delta k(t, \tau) R_{Ym}(\tau, t) d\tau - \int_0^t \int_0^t k^*(t, \tau_1) \Delta k(t, \tau_2) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 0.$$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова–Винера

Это условие легко получить, используя положение вариационного исчисления, согласно которому необходимым условием экстремума функции

$$M[\sigma^2(t)]$$

является соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ M[\sigma^2(t)] \right\}_{\gamma=0} = 0.$$

21

Подставляя (18) в (21), находим (20)

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА

Можно показать, что уравнение (3.20) является также и достаточным условием

минимума среднеквадратической ошибки. Действительно, поскольку

$$M[\sigma^2(t)] = \bar{\sigma}_{\min}^2(t) + \gamma^2 E^2(t),$$

то так как  $\gamma^2 E^2(t) > 0$ , следовательно,  $M[\sigma^2(t)] > \bar{\sigma}_{\min}^2(t)$

и, очевидно, функция  $k t^*(\cdot)$ , т действительно определяет фильтр, обеспечивающий минимальную СКО.

Перепишем (20) в виде

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА

$$\int_0^t \Delta k(t, \tau) \left[ R_{Ym}(\tau, t) - \int_0^t k^*(t, \tau_1) R_{YY}(\tau_1, \tau) d\tau_1 \right] d\tau = 0, \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad 23$$

Поскольку  $\int_0^t \Delta k(t, \tau) Z(\tau) d\tau = 0$  тогда и только тогда, когда  $Z(\tau) \equiv 0$ , то

$$R_{Ym}(\tau, t) = \int_0^t k^*(t, \tau_1) R_{YY}(\tau_1, \tau) d\tau_1. \quad 24$$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА

Полученное *интегральное уравнение 1-го рода (3.24) определяет оптимальную ИПФ фильтра, обеспечивающего воспроизведение полезного сигнала  $m(t)$  с минимальной СКО.*  
Уравнение (24) называется *уравнением Винера–Хопфа*, которое часто записывается в виде

$$\int_0^t k(t, \tau_1) R_{YY}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 = R_{Ym}(t, \tau_2), \quad 0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq t, \quad t \in [0, \infty). \quad (25)$$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова–ВИНЕРА

Подробно рассмотрим случай, когда  $m(t)$  и  $n(t)$  — стационарные стохастические процессы.

1. *Заданы взаимно не коррелированные СП в виде функций времени  $m(t)$  и  $n(t)$  с КФ  $R_{mm}(\tau)$ ,  $R_{nn}(\tau)$ , СПл  $S_{mm}(\omega)$  и  $S_{nn}(\omega)$ ;  $m(t)$  и  $n(t)$  — стационарные, эргодические, центрированные случайные функции.*
2. *Требуется найти ИПФ  $k^*(\tau)$  фильтра, оптимальным образом выделяющего реализацию СП  $m(t)$  в виде некоторого сигнала  $X(t)$  в условиях, когда на его вход поступает аддитивная смесь  $m(t)+n(t)$ .*
3. *Критерием оптимальности является минимум СКО  $\sigma(t) = m(t) - X(t)$ , т.е.*

$$M[\sigma^2(t)] = \bar{\sigma}^2 = \min.$$

Для рассматриваемого случая уравнение Винера–Хопфа имеет вид

$$R_{Ym}(\tau) = \int_0^{\infty} k^*(u) R_{YY}(\tau - u) du \quad \text{при } \tau \geq 0, \quad (26)$$



# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА

Причем корреляционная функция сигнала, определяемая по формуле

$$R_{YY}(\tau) = R_{mm}(\tau) + R_{nn}(\tau); \quad (27)$$

$R_{Ym}(\tau)$  взаимная корреляционная функция сигнала на входе  $Y(t)$  и полезного входного сигнала  $m(t)$ .

Перепишем (26) в виде (после преобразования по Фурье)

$$S_{Ym}(s) \Big|_{s=j\omega} = W^*(s) S_{YY}(s) \Big|_{s=j\omega};$$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА

откуда найдем

$$W^*(j\omega) = \frac{S_{Ym}(j\omega)}{S_{YY}(j\omega)} \text{ — оптимальная ПФ;}$$

$$k^*(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \text{ — оптимальная ИПФ.}$$

Оптимальная ИПФ, определяемая этой формулой, будет отлична от нуля для отрицательных значений  $\tau$  (рис. 3.17)

Такая система физически нереализуема. Однако приближенное построение фильтра возможно (рис. 3.18).

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА– ВИНЕРА

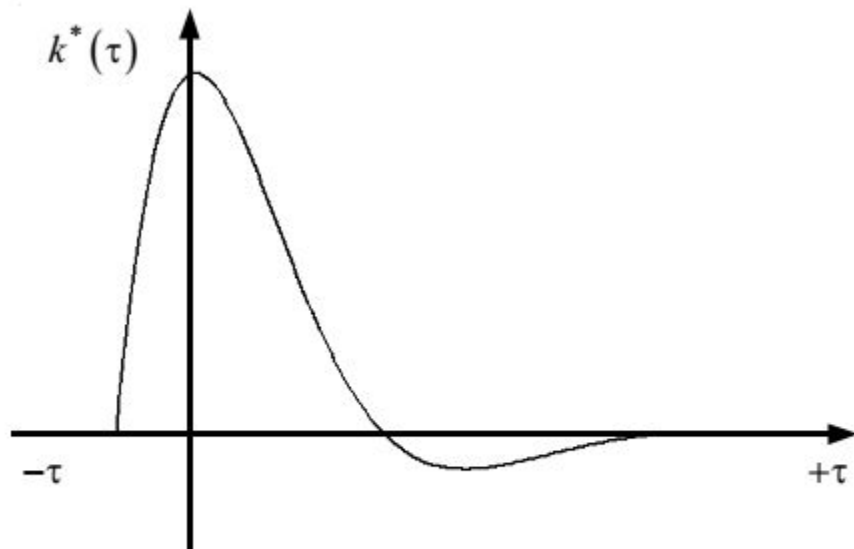


Рис. 3.17. График  $k^*(\tau)$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА– ВИНЕРА

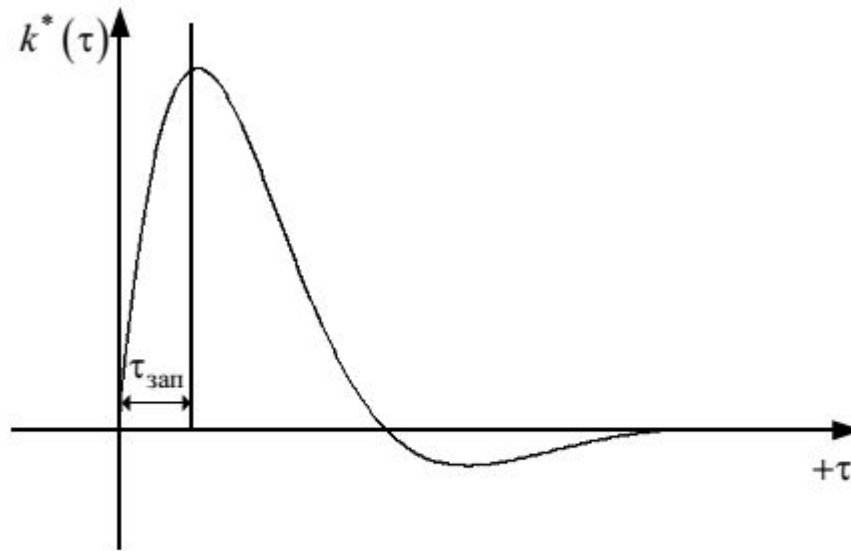


Рис. 3.18. Приближенная ИПФ  $\tilde{k}^*(\tau)$

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА

Рассмотрим теперь решение задачи о построении оптимального фильтра с учетом условия его физической осуществимости [120].

Решение уравнения (3.26) наиболее просто осуществляется в частотной области. Преобразуем уравнение (3.26) к виду

$$R_{Ym}(\tau) = \int_0^{\infty} k^*(u) R_{YY}^*(\tau - u) du = q(\tau), \quad (3.29)$$

где  $q(\tau)$  — некоторая функция, равная нулю при  $\tau \geq 0$ . Условие  $q(\tau) \equiv 0$  при  $\tau \geq 0$  приводит к тому, что функция  $Q(j\omega) \leftrightarrow q(\tau)$  не может содержать полюсов в верхней полуплоскости плоскости  $\omega$  (все полюсы находятся в нижней полуплоскости).

Необходимо помнить, что условие физической реализуемости состоит в требовании равенства нулю ИПФ при  $\tau < 0$  (рис. 3.19):

$$k(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau < 0.$$

Но это может иметь место лишь тогда, когда соответствующая передаточная функция  $W^*(s)$  имеет все левые полюсы и, значит, все верхние полюсы частотной характеристики  $W^*(j\omega)$  (см. рис. 3.20 и 3.21).

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА– ВИНЕРА

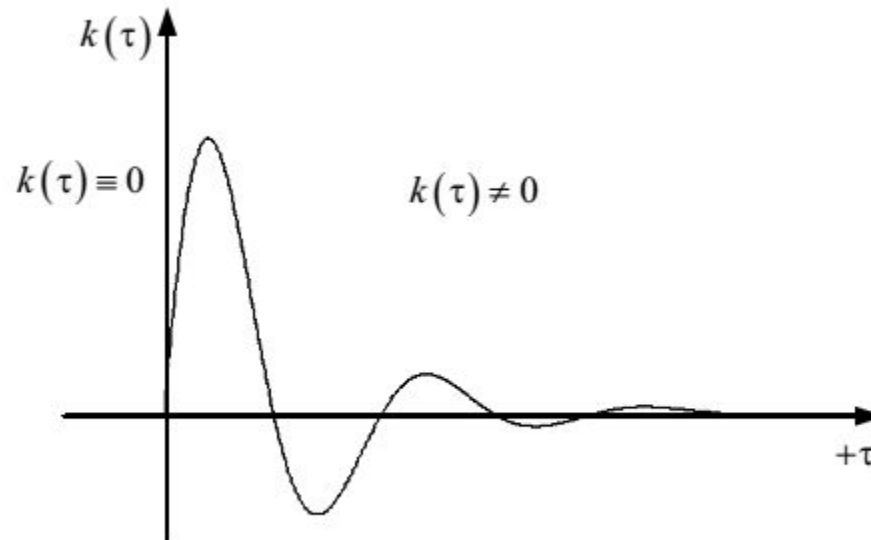


Рис. 3.19. ИПФ физически реализуемой системы

# ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА– ВИНЕРА

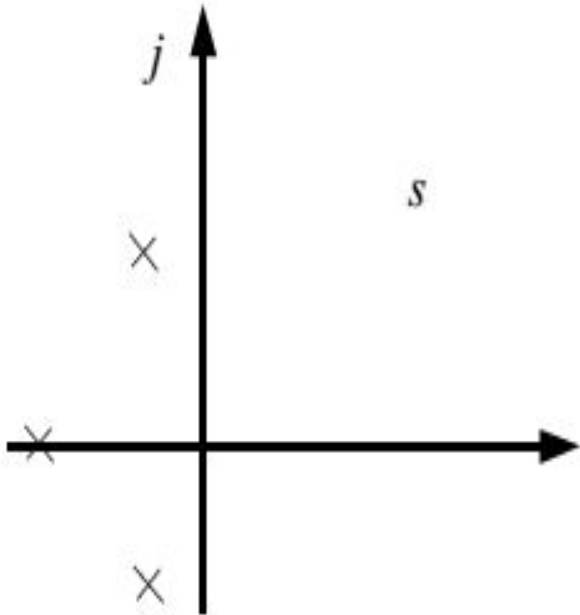


Рис. 3.20. Плоскость  $s$

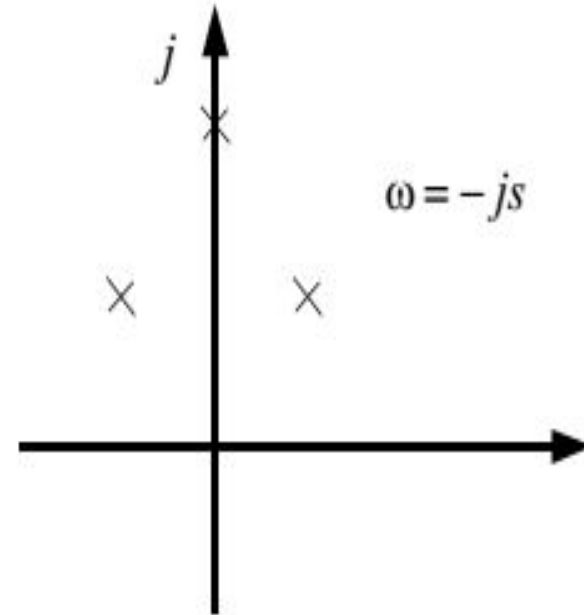


Рис. 3.21. Плоскость  $\omega$

# **ФИЛЬТРЫ КОЛМОГорова– ВИНЕРА**