ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

- Основополагающие результаты по теории фильтрации были получены А.Н. Кол- могоровым и Н. Винером (1941 г.). Ими рассматривались только стационарные слу- чайные процессы. В дальнейшем результаты были обобщены и на классы нестацио-
нарных процессов.
Перейдем к изложению основных положений теории фильтров Колмогорова–Винера.
Рассмотрим линейную систему, представленную на рисунке 1

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

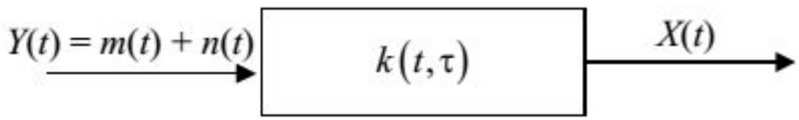


Рисунок 1 - К постановке задачи фильтрации

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Заданы взаимно некоррелированные центрированные нестационарные случайные
процессы в виде функций времени m t( ) и n t( ) с корреляционными функциями

$$\begin{cases} R_{mm}(t_1,t_2) = M\left[m(t_1)m(t_2)\right]; \\ R_{nn}(t_1,t_2) = M\left[n(t_1)n(t_2)\right]. \end{cases}$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

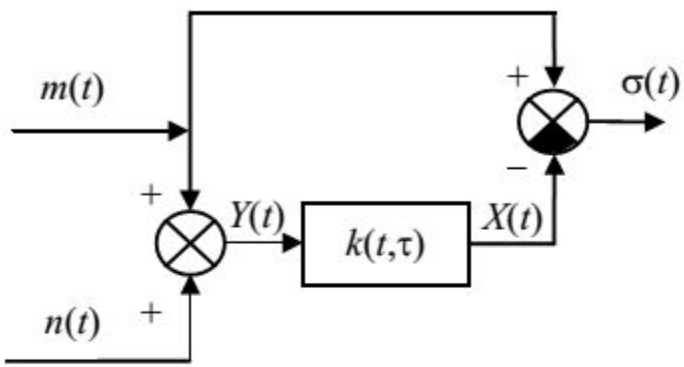
- *Требуется найти ИПФ $k(t^*$, т)* *фильтра, оптимальным образом выделяющего*
  реализацию случайного процесса $m(t)$ в виде некоторого процесса $X(t)$ в условиях,
  когда на вход поступает аддитивная смесь полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$.
  Критерием оптимальности является минимум среднеквадратической ошибки (СКО)

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

$$M\left[\sigma^2(t)\right] = \min,$$

где $\sigma(t) = m(t) - X(t)$.

Структурная схема, поясняющая постановку задачи фильтрации в классе линей-
ных систем, представлена на рисунке 2.



К постановке задачи фильтрации

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

- Найдем уравнение, определяющее ИПФ оптимальной, в указанном выше смысле, системы. Положим, что при $t = 0$ фильтр имеет нулевые начальные условия; тогда сигнал ошибки σ(*t*) определяется зависимостью

$$\sigma(t) = m(t) - \int_0^t k(t_1, \tau) Y(\tau)\, d\tau.$$

Для квадрата ошибки можно записать выражение

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

- Для квадрата ошибки можно записать выражение

$$\sigma^2(t) = m^2(t) - 2\int_0^t k(t,\tau)Y(\tau)m(t)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^t k(t,\tau_1)k(t,\tau_2)Y(\tau_1)Y(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

После осреднения по множеству получим

$$M\left[\sigma^2(t)\right] = D_{mm}(t) - 2\int_0^t k(t,\tau)R_{Ym}(\tau,t)\,d\tau + \int_0^t\int_0^t k(t,\tau_1)k(t,\tau_2)R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Предположим, что

$$k(t,\tau) = k^*(t,\tau) + \gamma\Delta k(t,\tau),$$

т.е. ИПФ *k t*(, т) отличается от оптимальной ИПФ *k(t**,
т) на некоторую функцию γΔ т*k (t*)

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Тогда из предыдущих двух формул следует

$$M\left[\sigma^2(t)\right] = D_{mm}(t) - 2\int_0^t k^*(t,\tau) R_{Ym}(\tau,t)\,d\tau + \int_0^t\int_0^t k^*(t,\tau_1) k^*(t,\tau_2) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 -$$
$$-2\gamma\int_0^t \Delta k(t,\tau) R_{Ym}(\tau,t)\,d\tau + 2\gamma\int_0^t\int_0^t k^*(t,\tau_1)\Delta k(t,\tau_2) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+\gamma^2\int_0^t\int_0^t \Delta k(t,\tau_1)\Delta k(t,\tau_2) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2,$$

или, что то же самое,

$$M\left[\sigma^2(t)\right] = \bar{\sigma}^2_{\min}(t) - 2\gamma\left[\int_0^t \Delta k(t,\tau) R_{Ym}(\tau,t)\,d\tau - \right.$$
$$\left.-\int_0^t\int_0^t k^*(t,\tau_1)\Delta k(t,\tau_2) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right] + \gamma^2 E^2(t); \qquad 18$$

здесь

$$E^2(t) = \int_0^t\int_0^t \Delta k(t,\tau_1)\Delta k(t,\tau_2) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \qquad 19$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

— существенно неотрицательная величина, являющаяся математическим ожиданием квадрата интеграла $M\left[\int\limits_0^t \Delta k(t,\tau) Y(\tau)\, d\tau\right]^2$.

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Из предыдущей формулы следует, что для того, чтобы

$$M\left[\sigma^2(t)\right] = \min,$$

необходимо выполнение условия

$$\int_0^t \Delta k(t,\tau) R_{Ym}(\tau,t)\, d\tau - \int_0^t \int_0^t k^*(t,\tau_1) \Delta k(t,\tau_2) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = 0. \qquad .20$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Это условие легко получить, используя положение вариационного исчисления,
согласно которому необходимым условием экстремума функции

$$M\left[\sigma^2(t)\right]$$

является соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{M\left[\sigma^2(t)\right]\right\}_{\gamma=0}=0. \qquad 21$$

Подставляя (18) в (21), находим (20)

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Можно показать, что уравнение (3.20) является также и достаточным условием
минимума среднеквадратической ошибки. Действительно, поскольку

$$M\left[\sigma^2(t)\right] = \overline{\sigma}^2_{\min}(t) + \gamma^2 E^2(t),$$

то так как $\gamma^2 E^2(t) > 0,$ следовательно, $M\left[\sigma^2(t)\right] > \overline{\sigma}^2_{\min}(t)$

и, очевидно, функция *k t** ( ), т действительно определяет фильтр, обеспечивающий минимальную СКО.

Перепишем (20) в виде

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

$$\int_0^t \Delta k(t,\tau)\left[R_{Ym}(\tau,t)-\int_0^t k^*(t,\tau_1)R_{YY}(\tau_1,\tau)d\tau_1\right]d\tau=0,\ \ 0\le\tau\le t. \quad 23]$$

Поскольку $\int_0^t \Delta k(t,\tau)Z(\tau)d\tau=0$ тогда и только тогда, когда $Z(\tau)\equiv 0,$ то

$$R_{Ym}(\tau,t)=\int_0^t k^*(t,\tau_1)R_{YY}(\tau_1,\tau)d\tau_1. \quad .24]$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Полученное *интегральное уравнение 1-го рода* (3.24) *определяет оптимальную*
ИПФ фильтра, обеспечивающего воспроизведение полезного сигнала m
t( ) *с минимальной СКО*.
Уравнение (24) *называется уравнением Винера–Хопфа,* которое часто записывается в виде

$$\int_0^t k(t,\tau_1) R_{YY}(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 = R_{Ym}(t,\tau_2), \quad 0 \le \tau_1, \tau_2 \le t, \quad t \in [0,\infty). \tag{25}$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Подробно рассмотрим случай, когда $m(t)$ и $n(t)$ — стационарные стохастические процессы.

1. *Заданы взаимно не коррелированные СП в виде функций времени* $m(t)$ *и* $n(t)$ *с КФ* $R_{mm}(\tau)$, $R_{nn}(\tau)$, *СПл* $S_{mm}(\omega)$ *и* $S_{nn}(\omega)$; $m(t)$ *и* $n(t)$ *— стационарные, эргодические, центрированные случайные функции.*
2. *Требуется найти ИПФ* $k^*(\tau)$ *фильтра, оптимальным образом выделяющего реализацию СП* $m(t)$ *в виде некоторого сигнала* $X(t)$ *в условиях, когда на его вход поступает аддитивная смесь* $m(t)+n(t)$.
3. *Критерием оптимальности является минимум СКО* $\sigma(t)=m(t)-X(t)$, *т.е.*

$$M\left[\sigma^2(t)\right]=\overline{\sigma}^2=\min.$$

Для рассматриваемого случая *уравнение Винера–Хопфа имеет вид*

$$R_{Ym}(\tau)=\int_0^\infty k^*(u)R_{YY}(\tau-u)\,du \quad \text{при} \quad \tau\geq 0, \qquad (26)$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Причем корреляционная функция сигнала, определяемая
по формуле

$$R_{YY}(\tau) = R_{mm}(\tau) + R_{nn}(\tau); \qquad (27)$$

$R_{Ym}(\tau)$ взаимная корреляционная функция сигнала на входе *Y* (t) и полезного входного сигнала *m*(t).

Перепишем (26) в виде (после преобразования по Фурье)

$$S_{Ym}(s)\Big|_{s=j\omega} = W^*(s)S_{YY}(s)\Big|_{s=j\omega};$$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

откуда найдем

$$W^*(j\omega) = \frac{S_{Ym}(j\omega)}{S_{YY}(j\omega)} \text{ — оптимальная ПФ;}$$

$$k^*(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W^*(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \text{ — оптимальная ИПФ.}$$

Оптимальная ИПФ, определяемая этой формулой, будет отлична от нуля для отрицательных значений τ (рис. 3.17)

Такая система физически нереализуема. Однако приближенное построение фильтра
возможно (рис. 3.18).

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

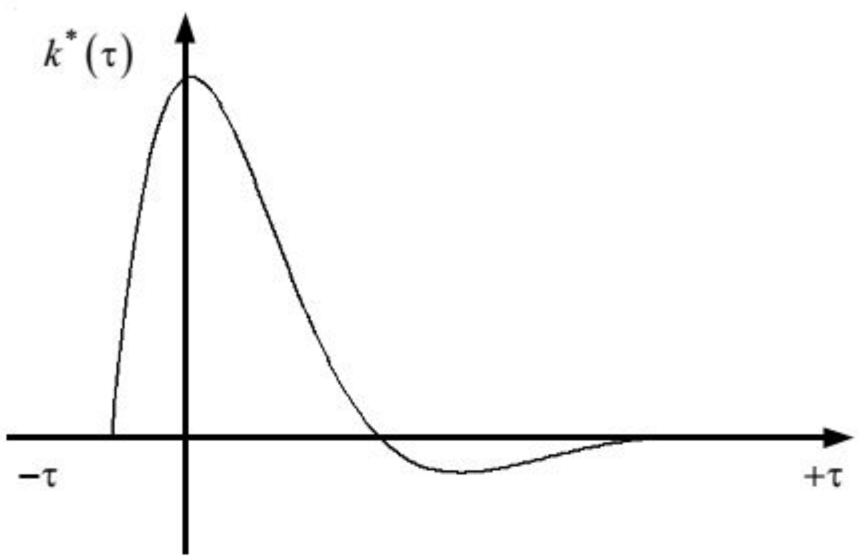


Рис. 3.17. График $k^*(\tau)$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

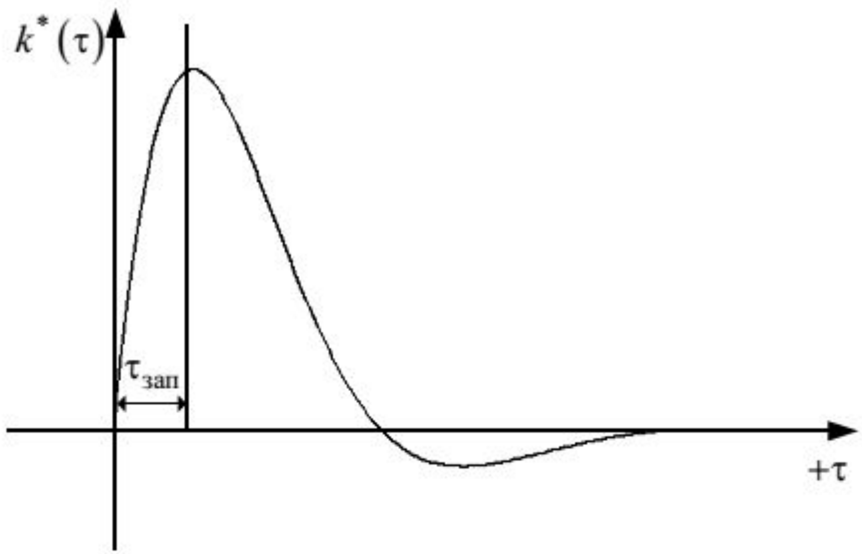


Рис. 3.18. Приближенная ИПФ $\tilde{k}^*(\tau)$

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Рассмотрим теперь решение задачи о построении оптимального фильтра с учетом условия его физической осуществимости [120].

Решение уравнения (3.26) наиболее просто осуществляется в частотной области. Преобразуем уравнение (3.26) к виду

$$R_{Ym}(\tau) = \int_0^\infty k^*(u) R^*_{YY}(\tau - u)\,du = q(\tau), \tag{3.29}$$

где $q(\tau)$ — некоторая функция, равная нулю при $\tau \geq 0$. Условие $q(\tau) \equiv 0$ при $\tau \geq 0$ приводит к тому, что функция $Q(j\omega) \leftrightarrow q(\tau)$ не может содержать полюсов в верхней полуплоскости плоскости ω (все полюсы находятся в нижней полуплоскости).

Необходимо помнить, что условие физической реализуемости состоит в требовании равенства нулю ИПФ при $\tau < 0$ (рис. 3.19):

$$k(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau < 0.$$

Но *это может иметь место лишь тогда*, *когда соответствующая передаточная функция* $W^*(s)$ *имеет все левые полюсы и*, *значит*, *все верхние полюсы частотной характеристики* $W^*(j\omega)$ (см. рис. 3.20 и 3.21).

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

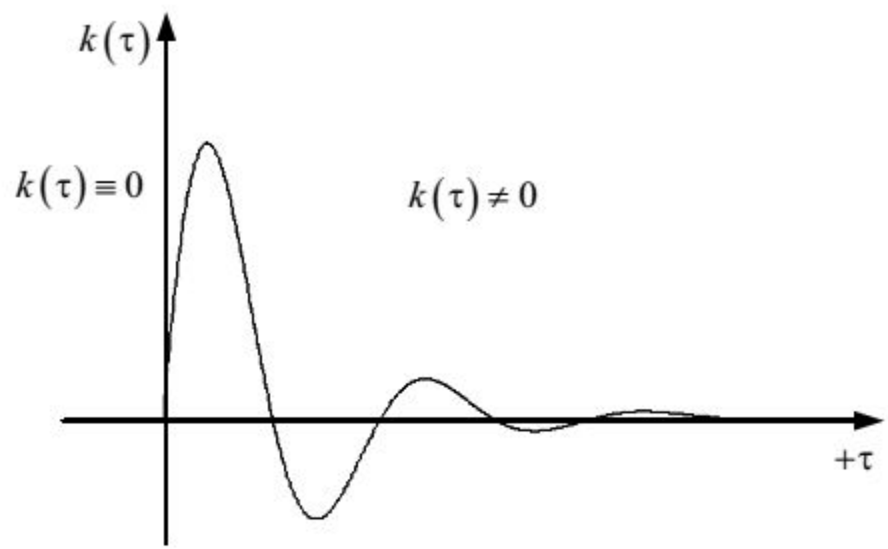


Рис. 3.19. ИПФ физически реализуемой системы

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

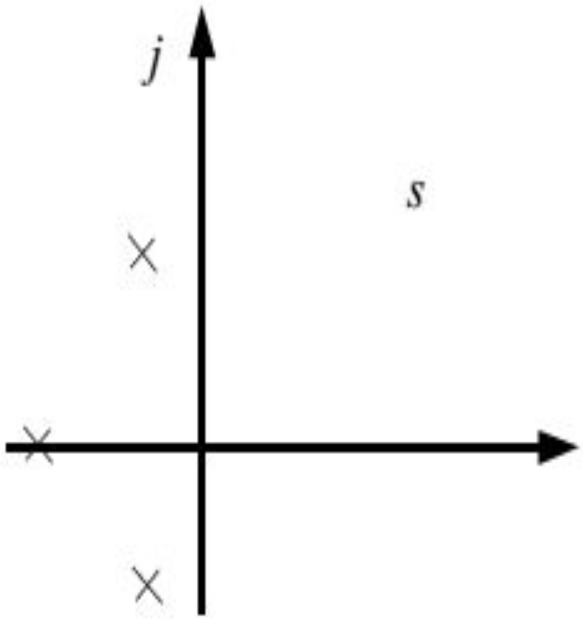


Рис. 3.20. Плоскость *s*

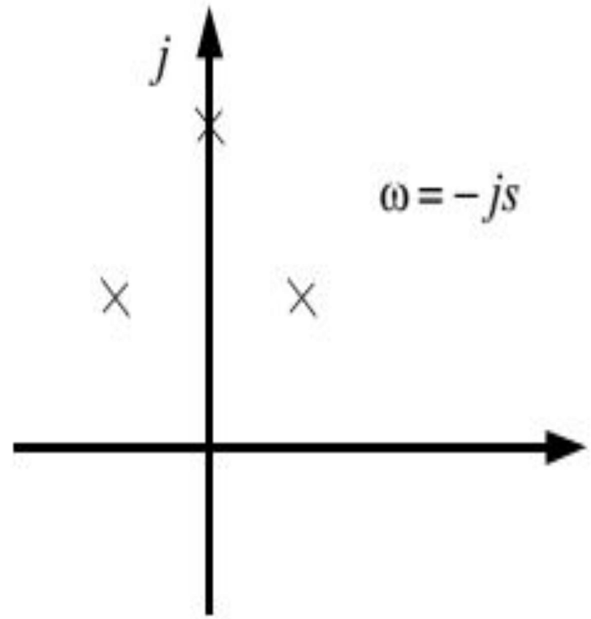


Рис. 3.21. Плоскость ω

ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА