Производная сложной функции

Было: $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$: $y = F(\varphi(x))$, $y'_x = F'_u \cdot u'_x$
Пусть $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$: $z = f(x(t), y(t))$

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma(x, y) \ , \quad A = \frac{\partial z}{\partial x} \ , \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + B \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\gamma(x, y)\Delta x}{\Delta t \Delta x} \ ; \quad \Delta t \Delta x = \Delta x \Delta t$$

При $\Delta t \to 0$: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot \frac{dx}{dt} + B \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Пусть: $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, т.е.
$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$.

Производная сложной функции многих переменных: *производная внешней функции по каждому из промежуточных аргументов умножается на производную этого промежуточного аргумента по основному аргументу и все такие произведения суммируются.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

"Цепное правило":

$$z = f(u, v, ..., w)\ ;\ \ u = u(x, y)\ ,\ \ v = v(x, y)\ , ...,\ \ w = w(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + ... + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Дифференцирование неявно заданных функций

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ неявно задает функцию $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}[F(x, y, z) = 0]$$

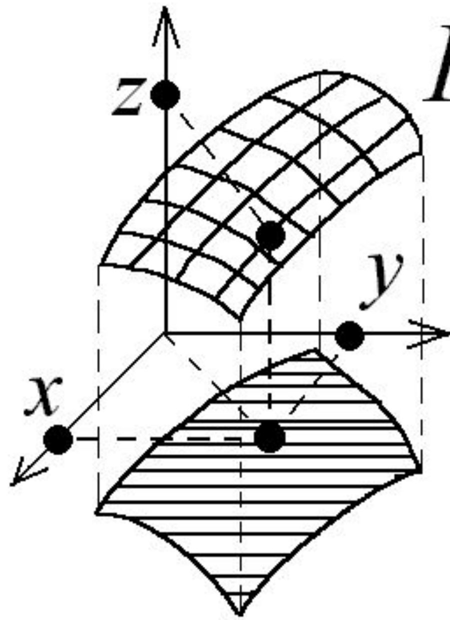
$$F'_x \cdot x'_x + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$$

$$x'_x = 1\ , \quad y'_x = 0$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}\ , \quad F'_z \neq 0$$

В записи $z'_x = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

ничего не сокращается!



Аналогично:

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}\ , \quad F'_z \neq 0$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ
ГРАДИЕНТ

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ скорость изменения функции одной переменной

$z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ скорость изменения функции при изменении x

$z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ скорость изменения функции при изменении y

Пусть заданы: $z = f(x, y)$ и ненулевой вектор $\vec{\ell}$.

Как быстро меняется функция в направлении вектора $\vec{\ell} = \{\ell_1, \ell_2\}$?

$$\vec{\ell_o} \uparrow\uparrow \vec{\ell}\ ; \quad \left|\vec{\ell_o}\right| = 1\ ; \quad \vec{\ell_o} = \left\{ \frac{\ell_1}{|\vec{\ell}|}, \frac{\ell_2}{|\vec{\ell}|} \right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$$

$$M(x,y)\ ,\quad M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)\ ;\quad \overrightarrow{MM_1}=\{\Delta x,\Delta y\}\|\overrightarrow{\ell_o}$$

$$\Delta z = f(M_1) - f(M),\ \frac{\Delta z}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \frac{f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y + \gamma(x,y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= f'_x(M)\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + f'_y(M)\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + \frac{\gamma(x,y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= f'_x(M)\cos\alpha + f'_y(M)\cos\beta + \frac{\gamma(x,y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \to$$

$$\to f'_x(M)\cos\alpha + f'_y(M)\cos\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

производная по направлению – скорость изменения функции в направлении вектора $\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{\ell_o}$

В частности:

$$\boxed{\overrightarrow{\ell} \,\|\, \overrightarrow{\ell_o} = \overrightarrow{i} = \{1,0\} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial x}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\ell} \,\|\, \overrightarrow{\ell_o} = \overrightarrow{j} = \{0,1\} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial y}}$$

т.е. производная по направлению обобщает понятие частной производной функции многих переменных.

Определение. Градиент функции $z = f(x, y)$ есть вектор $\nabla f = \text{grad} f = \overrightarrow{\text{grad} f} = \{f'_x, f'_y\}$

Если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то $\nabla f = \{f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_n}\}$

Свойства градиента

1. $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \nabla f \cdot \overrightarrow{\ell_o} = |\nabla f| \cdot \left|\overrightarrow{\ell_o}\right| \cdot \cos\left(\nabla f \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{\ell_o}\right)$

2. Градиент указывает направление, в котором функция меняется быстрее всего.

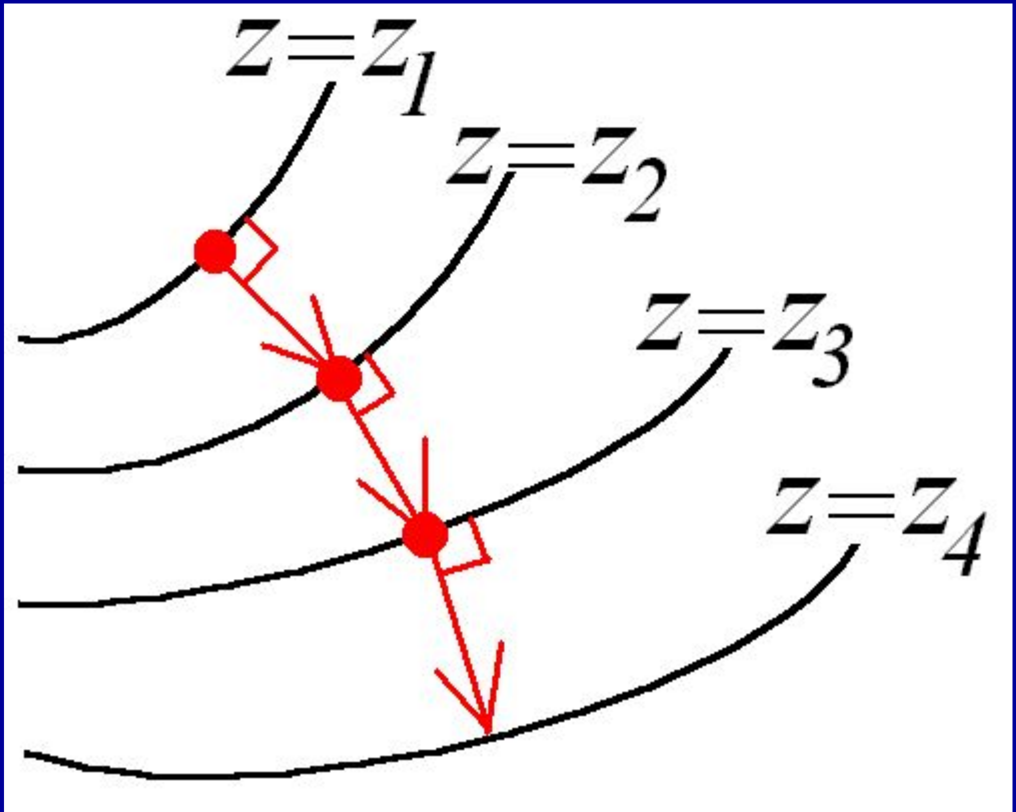
$$\nabla f \uparrow\uparrow \overrightarrow{\ell_o} \iff \cos\left(\nabla f \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{\ell_o}\right) = 1\ ;$$

$$\nabla f \uparrow\downarrow \overrightarrow{\ell_o} \iff \cos\left(\nabla f \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{\ell_o}\right) = -1$$

3. Градиент перпендикулярен линиям уровня функции (линиям, на которых значение функции постоянно).

$$\nabla f \perp \overrightarrow{\ell_o} \iff \cos\left(\nabla \widehat{f, \overrightarrow{\ell_o}}\right) = 0$$

Методы градиентного спуска – методы нахождения локальных экстремумов функции многих переменных.



Частные производные высших порядков

$$z = x^2 y + e^x \sin y \ ; \quad z'_x = 2xy + e^x \sin y \ , \quad z'_y = x^2 + e^x \cos y$$

$$z''_{xx} = 2y + e^x \sin y \ , \quad z''_{xy} = 2x + e^x \cos y$$

$$z''_{yx} = 2x + e^x \cos y \ , \quad z''_{yy} = -e^x \sin y$$

В частности

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Обозначения

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ ; \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \ ; \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Теорема об изменении порядка дифференцирования. *Если у функции* $z = f(x, y)$ *в некоторой точке* M *и в ее окрестности существуют и непрерывны смешанные производные второго порядка* z''_{xy} *и* z''_{yx}*, то они совпадают:*

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

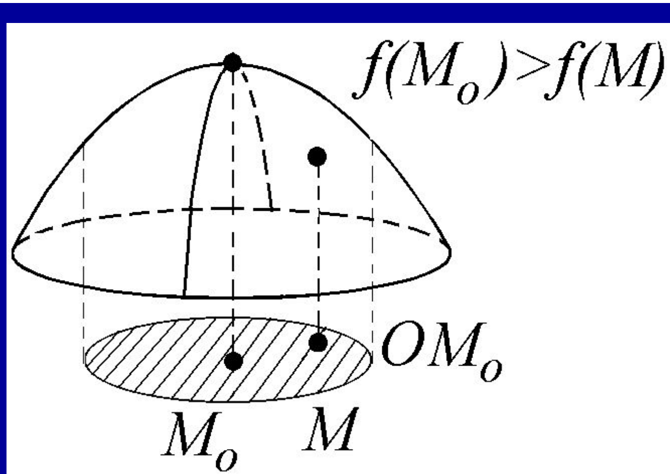
Производные произвольного порядка:

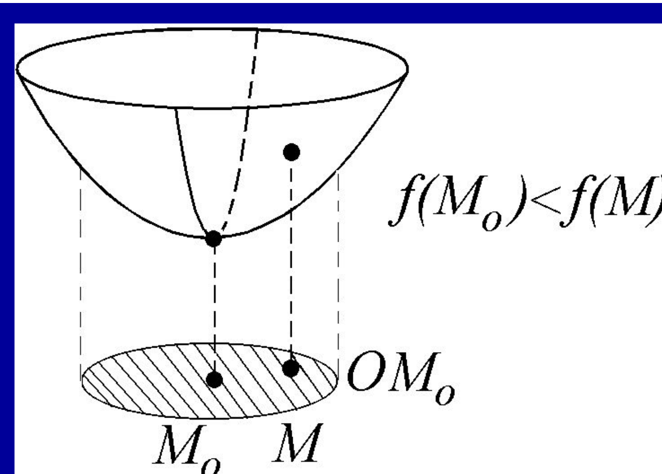
$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

Локальные экстремумы функции двух переменных

Определение. Точка $M_o(x_o, y_o)$ называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность OM_o, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности, отличных от M_o, выполняется неравенство

$$f(x_o, y_o) > f(x, y) \qquad \left(f(x_0, y_0) < f(x, y) \right)$$



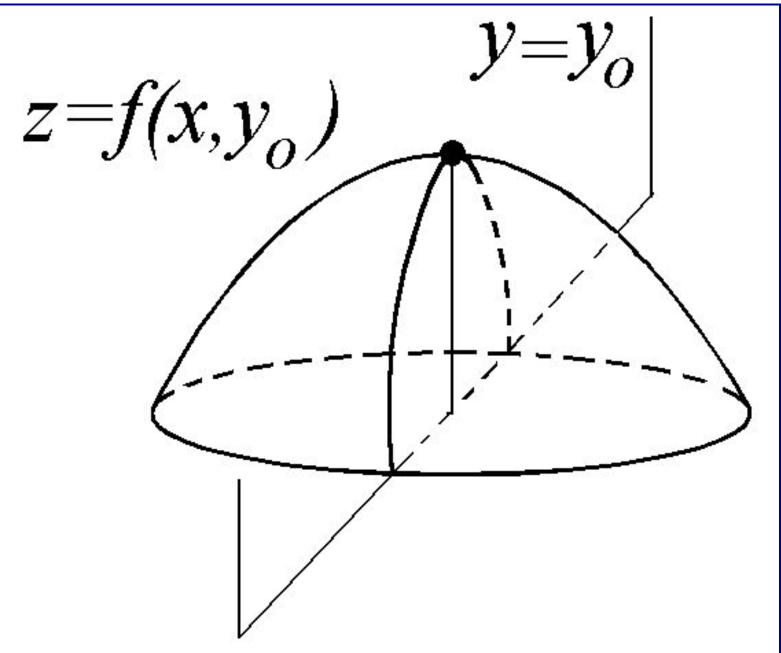


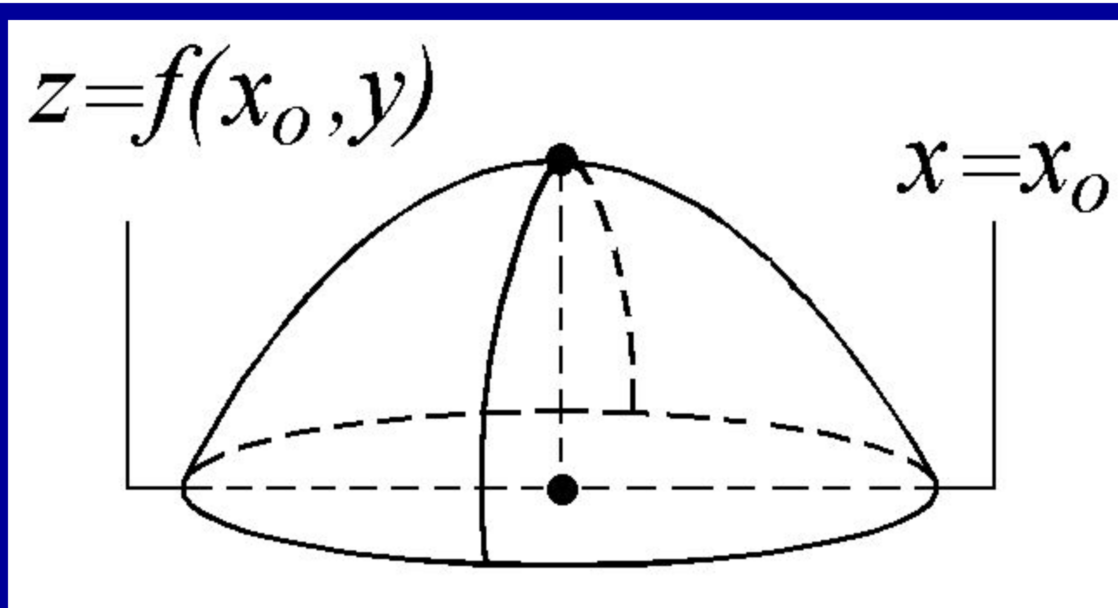
Точки локального максимума и локального минимума называются **точками экстремума** функции $z = f(x, y)$, а значения функции в этих точках – ее **экстремумами**.

Необходимые и достаточные условия локального экстремума

Теорема. Необходимые условия локального экстремума. *Если у функции $z = f(x, y)$ в точке $M_o(x_o, y_o)$ локальный экстремум, то в этой точке частные производные $z'_x(M_o)$ и $z'_y(M_o)$ равны нулю:*

$$f'_x(x_o, y_o) = 0\ , \quad f'_y(x_o, y_o) = 0$$



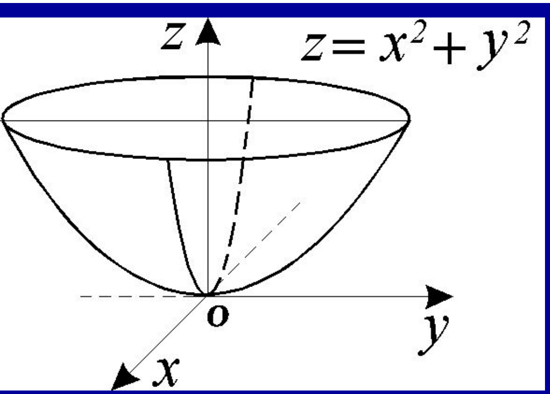


Определение. Точки, в которых частные производные $z'_x(M_o)$ и $z'_y(M_o)$ равны нулю, называются точками: **подозрительными на экстремум**, **критическими**, **стационарными**.

Только в таких точках может быть локальный экстремум, но не в каждой критической точке он имеется!

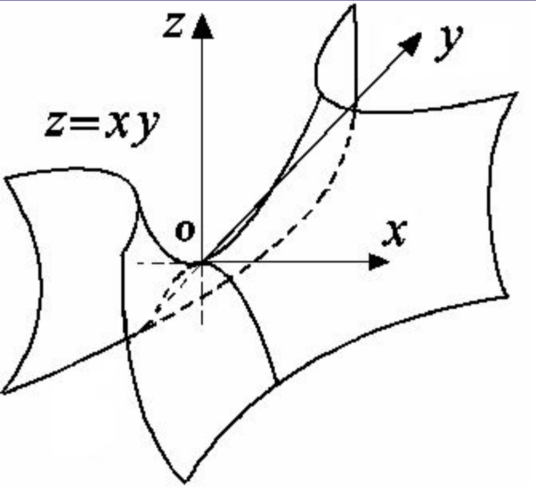
Примеры.

$$z = x^2 + y^2\ ,\ z'_x = 2x\ ,\quad z'_y = 2y\ ;\qquad x_o = y_o = 0$$



Локальный минимум

$$z = xy\ ,\ z'_x = y\ ,\quad z'_y = x\ ;\qquad x_o = y_o = 0$$



Экстремума нет!

Теорема. Достаточные условия локального экстремума. *Пусть у функции* $z = f(x, y)$ *есть критическая точка* $M_o(x_o, y_o)$, *т.е.* $f'_x(M_o) = f'_y(M_o) = 0$ *и пусть*

$$f''_{xx}(M_o) = A\ , \quad f''_{xy}(M_o) = B\ , \quad f''_{yy}(M_o) = C$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Тогда:

1) если $D > 0$, *то в критической точке локальный экстремум, причем при* $A > 0$ – *минимум, при* $A < 0$ – *максимум;*

2) если $D < 0$, *то в критической точке локального экстремума нет;*

3) если $D = 0$, *то нужно дополнительное исследование.*

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 20.$$

Решение. $z'_x = 2x - y + 9; \quad z'_y = 2y - x - 6$

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2x + 9 \\ 2(2x+9) - x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 9 \\ 3x = -12 \end{cases}; \quad x_o = -4, \ y_o = +1$$

$$z''_{xx} = 2; \quad z''_{xy} = -1; \quad z''_{yy} = 2$$

$$A = z''_{xx}(M_o) = 2; \quad B = z''_{xy}(M_o) = -1; \quad C = z''_{yy}(M_o) = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = \underline{3 > 0}, \quad \underline{A = 2 > 0}$$

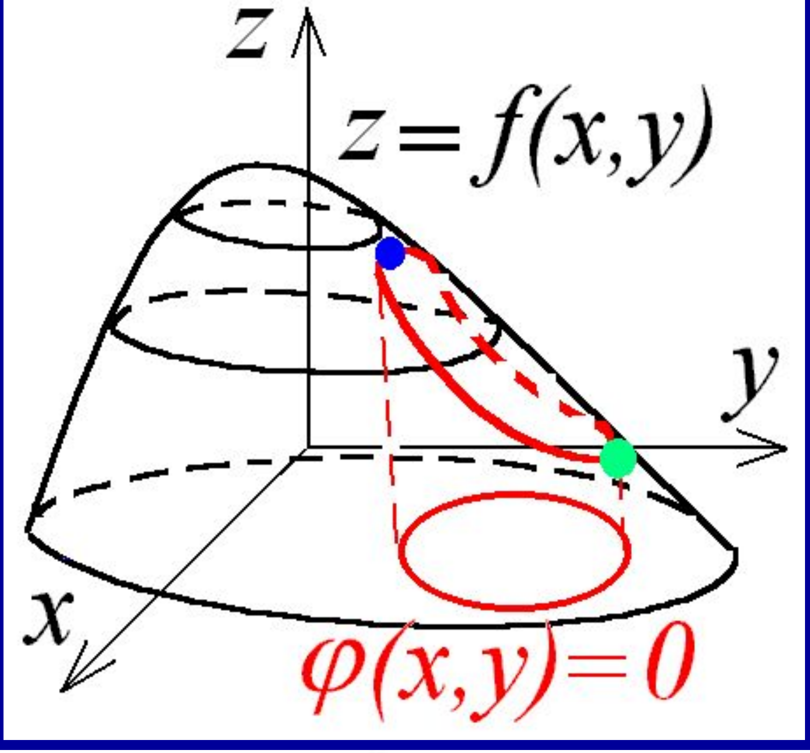
<u>В точке $M_o(x_o = -4, y_o = +1)$ локальный минимум</u>

В точке $M_o(x_o = -4, y_o = +1)$ локальный минимум

$$\min f(x,y) = f(M_o) = f(-4,+1) =$$

$$= (-4)^2 + (+1)^2 - (-4)(+1) + 9(-4) - 6(+1) + 20 =$$

$$= 16 + 1 + 4 - 36 - 6 + 20 = -1$$



Условный экстремум функции двух переменных

Задача. У функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ найти экстремум. Геометрический смысл условного экстремума: "на горе есть тропа; найти на тропе самую высокую и самую низкую точку".

Нахождение условного экстремума

1. $\varphi(x,y)=0 \implies y=\psi(x)$.

У функции одной переменной $z=f(x,\psi(x))$ найти экстремумы.

2. $\varphi(x,y)=0 \implies x=\vartheta(y)$.

У функции одной переменной $z=f(\vartheta(y),y)$ найти экстремумы.

3. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Вводится дополнительная функция F с дополнительной переменной λ – множителем Лагранжа:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

и у функции $F(x,y,\lambda)$ ищется локальный экстремум:

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y) \\ F'_y &= f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y) \\ F'_\lambda &= \varphi(x,y) \end{aligned}$$

Составляется система из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Решение системы $(x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0)$ есть координаты точки, подозрительной на экстремум.

Надо еще проверять достаточные условия.

Метод "работает" при произвольном числе независимых переменных и при произвольном числе дополнительных условий.

Определение. Точка $M_o(x_o, y_o)$ называется точкой **глобального максимума (минимума)** функции $z = f(x, y)$, если для всех точек из области определения функции выполняется неравенство

$$f(x_o, y_o) > f(x, y) \qquad \Big(f(x_0, y_0) < f(x, y) \Big)$$

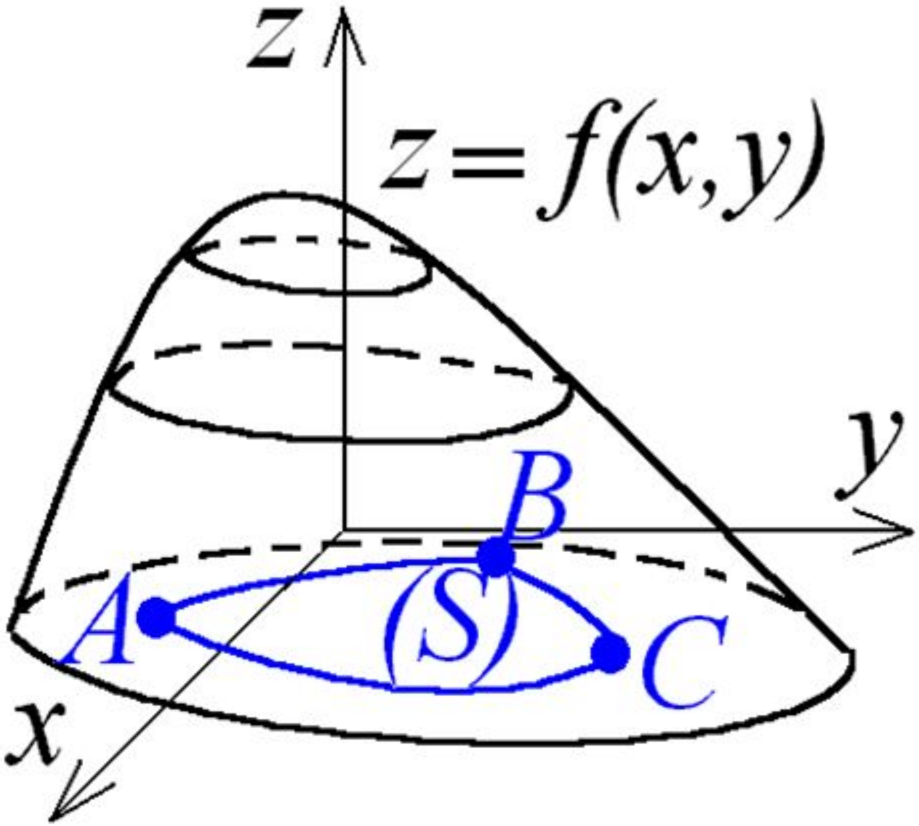
Чтобы найти глобальный экстремум в ограниченной, замкнутой области, необходимо:

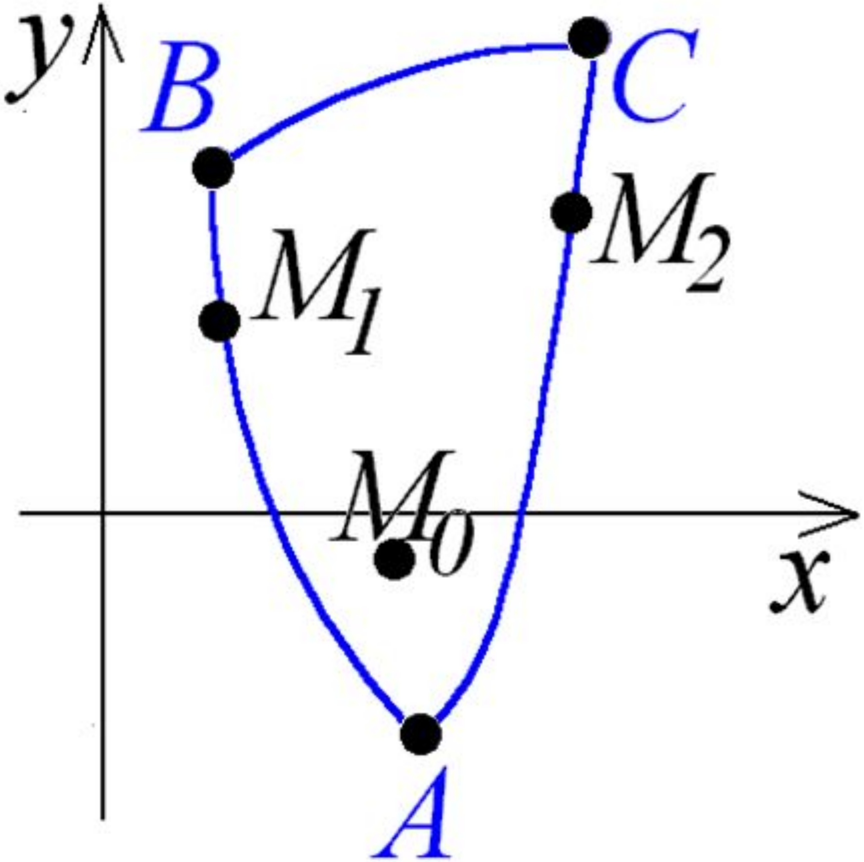
1) найти значения всех локальных экстремумов внутри области;

2) найти значения всех локальных экстремумов на границе области ("условные экстремумы");

3) определить значения функции в "угловых" точках границы;

и из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее. Это и будут **глобальный максимум** и **глобальный минимум**.





max, min из

$$\{f(M_0), f(M_1), f(M_2), f(A), f(B), f(C)\}$$

Тема "КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ"
"ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРЕ"

Абстрактная фигура, ее диаметр и мера

Определение. Фигура это ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, у которой есть **диаметр** и **мера**. Обозначение фигуры: (ω).

Определение. Диаметр фигуры это число, равное

$$d = \max r(M_1, M_2)\ , \quad M_1, M_2 \in (\omega)$$

т.е. d – наибольшее расстояние между точками фигуры.

Определение. Мера фигуры: $\mu(\omega) = \omega$ – неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству:

$$\mu\left((\omega_1) \cup (\omega_2)\right) = \mu(\omega_1) + \mu(\omega_2)$$

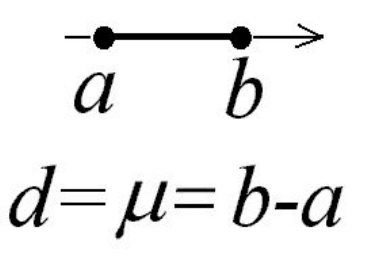
т.е. мера – неотрицательная аддитивная функция.

Примеры фигур, их диаметры и меры

Отрезок прямой:

$[a, b]$; $d = b - a$;

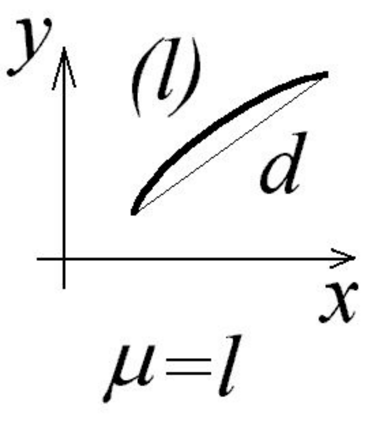
мера – длина отрезка



Ограниченная линия на плоскости:

$(\ell) \in \mathbf{R}^2$; $d = \max r(M_1, M_2)$;

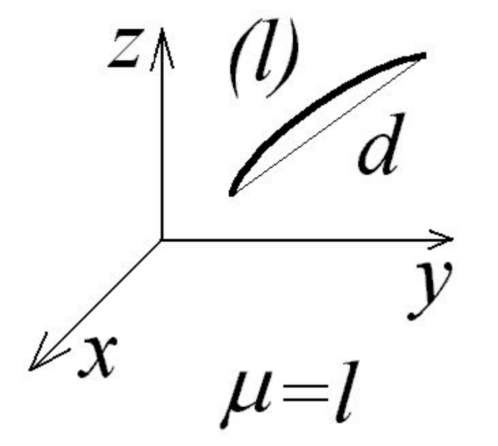
мера – длина линии



Ограниченная линия в пространстве:

$(\ell) \in \mathbf{R}^3$; $d = \max r(M_1, M_2)$;

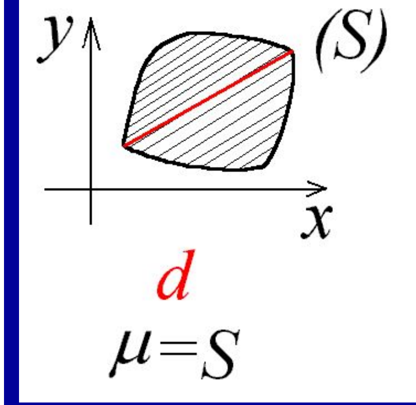
мера – длина линии



Плоская ограниченная фигура:

$(S) \in \mathbf{R}^2$; $d = \max r(M_1, M_2)$;

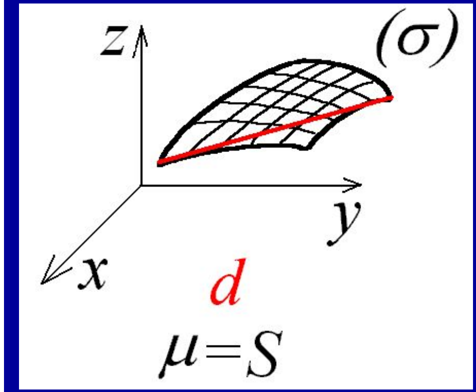
мера – площадь фигуры



Ограниченная поверхность в пространстве:

$(\sigma) \in \mathbf{R}^3$; $d = \max r(M_1, M_2)$;

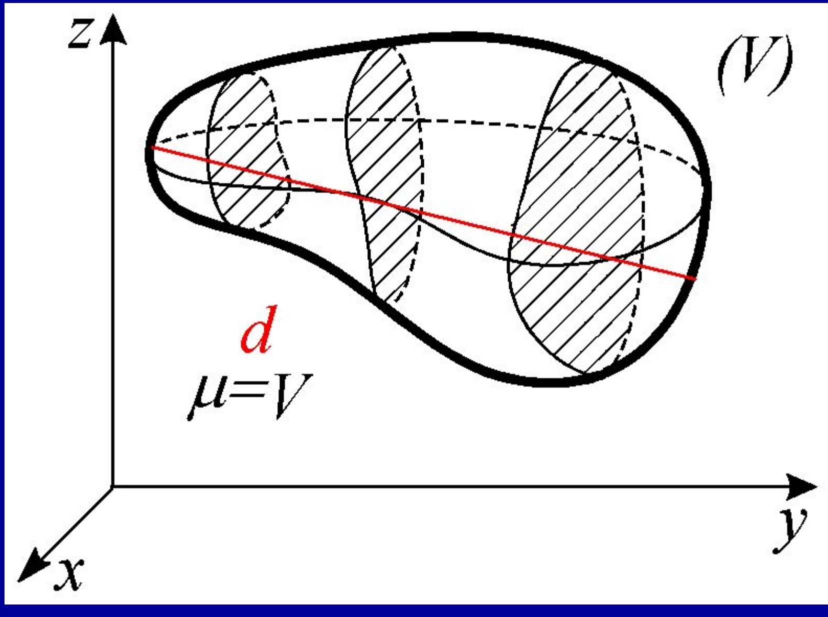
мера – площадь фигуры



Ограниченное тело в пространстве:

$(V) \in \mathbf{R}^3$; $d = \max r(M_1, M_2)$;

мера – объем тела



Задача о вычислении массы фигуры с переменной плотностью

Пусть заданы: 1) фигура (ω); 2) на фигуре – функция $\rho(M)$, $M \in (\omega)$. $\rho(M)$ – переменная плотность фигуры (меняется от точки к точке).

Найти массу фигуры.

Использование общей идеи: фигуру разбиваем на части; приближенно решаем требуемую задачу для каждой части; суммированием найденных ответов получаем приближенное решение всей задачи; стараемся улучшить приближение, т.е. уменьшить погрешность.

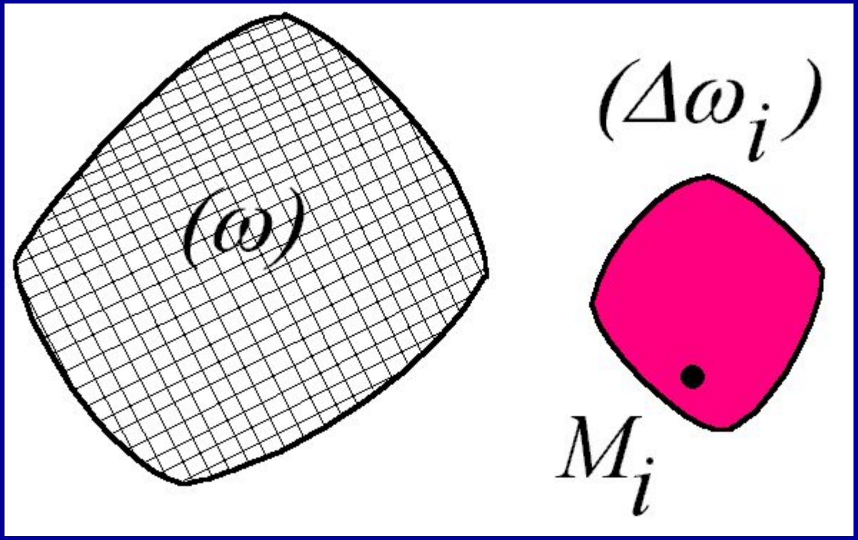
Фигура (ω) разбивается на n частей, которые нумеруются:

$$(\Delta\omega_1), (\Delta\omega_2), ..., (\Delta\omega_n) \ ; \quad (\omega) = (\Delta\omega_1) \cup (\Delta\omega_2) \cup ... \cup (\Delta\omega_n)$$

в каждой части выбирается своя точка $M_i \in (\Delta\omega_i)$, тогда $m_i \approx \rho(M_i) \cdot \mu(\Delta\omega_i) = \rho(M_i) \cdot \Delta\omega_i$

Поэтому

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta\omega_i \ ; \quad \lim_{\substack{n \to \infty \\ d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta\omega_i = m$$



Определение интеграла по фигуре

Пусть заданы: 1) фигура (ω); 2) на фигуре – функция $f(M)$, $M \in (\omega)$. Фигура (ω) разбивается на n частей, которые нумеруются:

$$(\Delta\omega_1), (\Delta\omega_2), ..., (\Delta\omega_n) \ ; \quad (\omega) = (\Delta\omega_1) \cup (\Delta\omega_2) \cup ... \cup (\Delta\omega_n)$$

в каждой части выбирается своя точка $M_i \in (\Delta\omega_i)$ и вычисляется $f(M_i) \cdot \Delta\omega_i$

Составляется интегральная сумма: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$

у которой ищется предел: $\displaystyle\lim_{\substack{n \to \infty \\ d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$

Определение. Если предел интегральных сумм существует, конечен и его значение не зависит от способа разбиения фигуры (ω) на части и выбора в них точек M_i, то этот предел (число!) называется интегралом по фигуре (ω) от функции $f(M)$.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i = \int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega$$

Теорема о существовании интеграла по фигуре. Если фигура (ω) есть ограниченное замкнутое множество, а функция $f(M)$, заданная на фигуре, непрерывна, то

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega$$

существует, его значение есть число, которое не зависит от способа разбиения фигуры (ω) на части и выбора в них точек M_i.

Свойства интеграла по фигуре

1. Если подынтегральная функция равна единице, то интеграл равен **мере фигуры**:

1. $\displaystyle\int\limits_{(\omega)} d\omega = \omega$; **2.** $\displaystyle\int\limits_{(\omega)} kf(M)\,d\omega = k\int\limits_{(\omega)} f(M)d\omega$; $k = \mathrm{const}$

3. $$\int\limits_{(\omega)} [f(M) + g(M)]\,d\omega = \int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega + \int\limits_{(\omega)} g(M)\,d\omega$$

4. $$\int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega = \int\limits_{(\omega_1)} f(M)\,d\omega + \int\limits_{(\omega_2)} f(M)\,d\omega$$

$$(\omega) = (\omega_1) \cup (\omega_2)\ ; \quad \mu\left((\omega_1) \cap (\omega_2)\right) = 0$$

5. $f(M) \geq 0 \implies \int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega \geq 0$

6. $f(M) \geq g(M) \implies \int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega \geq \int\limits_{(\omega)} g(M)\, d\omega$

7. $m_* \leq f(M) \leq m^* \implies m_*\omega \leq \int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega \leq m^*\omega$

8. Если (ω) – ограниченная замкнутая фигура,
а $f(M)$ – непрерывная на (ω) функция, то $\exists M_o \in (\omega)$:

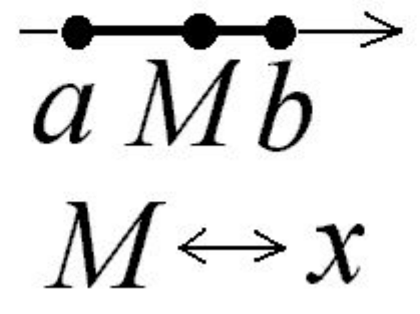
$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega = f(M_o) \cdot \omega$$

Виды интегралов по фигуре и их названия

1. (ω) есть $[a,b]$, $f(x)$ задана на $[a,b]$:

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

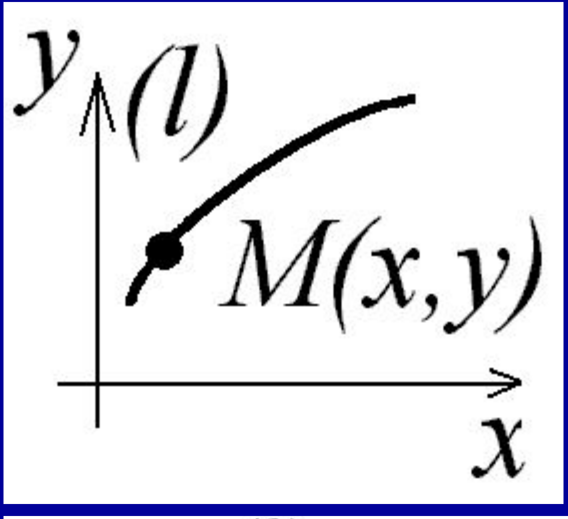
определенный интеграл.



2. (ω) есть $(\ell) \in \mathrm{R}^2$, $f(x,y)$ задана на (ℓ):

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega = \int\limits_{(\ell)} f(x,y)\,d\ell$$

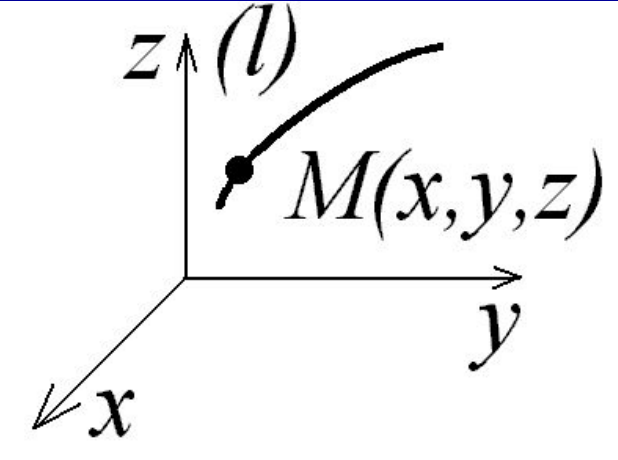
криволинейный интеграл по плоской линии.



3. (ω) есть $(\ell) \in \mathrm{R}^3$, $f(x,y,z)$ задана на (ℓ):

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\,d\omega = \int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)\,d\ell$$

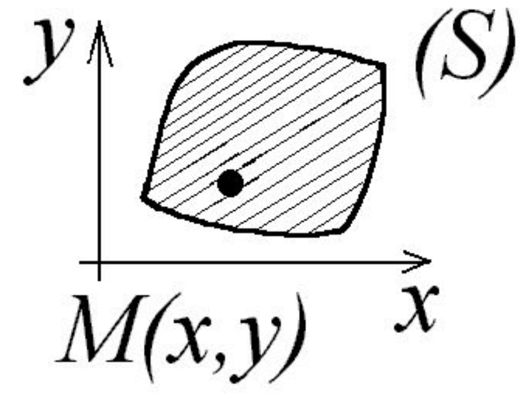
криволинейный интеграл по пространственной линии.



4. (ω) есть $(S) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y)$ задана на (S):

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS$$

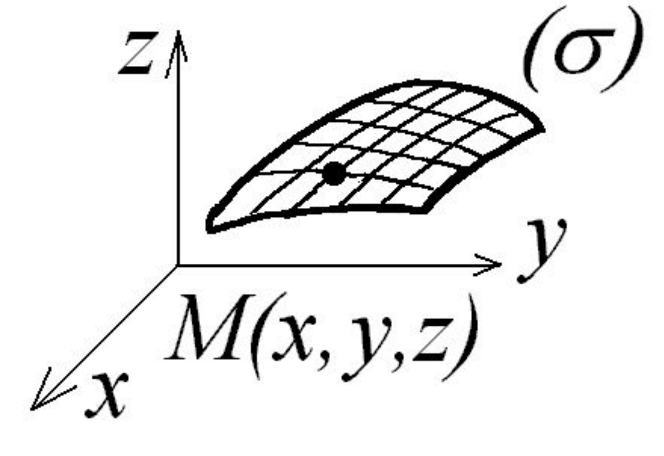
двойной интеграл.



5. (ω) есть $(\sigma) \in \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z)$ задана на (σ):

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\, d\sigma$$

поверхностный интеграл.



6. (ω) есть $(V) \in \mathbf{R}^3$,

$f(x, y, z)$ задана в точках из (V):

$$\int\limits_{(\omega)} f(M)\, d\omega = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV$$

тройной интеграл.