

## Производная сложной функции

Было:  $y = F(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ :  $y = F(\varphi(x))$ ,  $y'_x = F'_u \cdot u'_x$

Пусть  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :  $z = f(x(t), y(t))$

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma(x, y) , \quad A = \frac{\partial z}{\partial x} , \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + B \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\gamma(x, y) \Delta x}{\Delta t \Delta x} ; \quad \Delta t \Delta x = \Delta x \Delta t$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot \frac{dx}{dt} + B \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Пусть:  $z = f(u, v)$ ,  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$ , т.е.

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ .

**Производная сложной функции многих переменных:**  
производная внешней функции по каждому из промежуточных аргументов умножается на производную этого промежуточного аргумента по основному аргументу и все такие произведения суммируются.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

**"Цепное правило":**

$$z = f(u, v, \dots, w); \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \dots, \quad w = w(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

# Дифференцирование неявно заданных функций

Уравнение  $F(x, y, z) = 0$  неявно задает функцию  $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} [F(x, y, z) = 0]$$

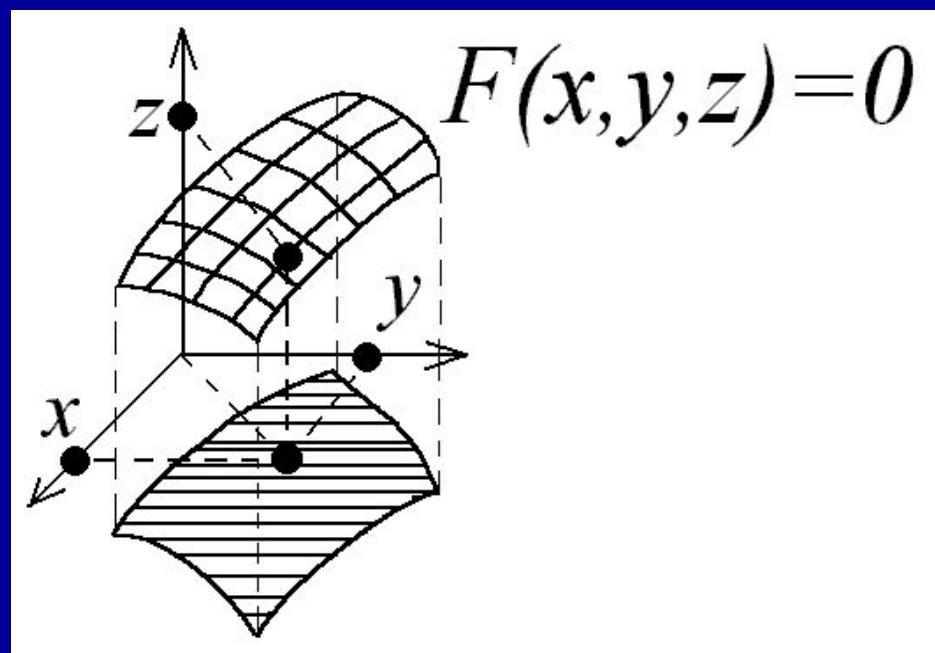
$$F'_x \cdot x'_x + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$$

$$x'_x = 1, \quad y'_x = 0$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad F'_z \neq 0$$

В записи  $z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

ничего не сокращается!



Аналогично:

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad F'_z \neq 0$$

# ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ГРАДИЕНТ

$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  скорость изменения функции одной переменной

$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$  скорость изменения функции при изменении  $x$

$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$  скорость изменения функции при изменении  $y$

Пусть заданы:  $z = f(x, y)$  и ненулевой вектор  $\vec{\ell}$ .

Как быстро меняется функция в направлении вектора

$$\vec{\ell} = \{\ell_1, \ell_2\} ?$$

$$\vec{\ell}_o \uparrow\uparrow \vec{\ell} ; \quad |\vec{\ell}_o| = 1 ; \quad \vec{\ell}_o = \left\{ \frac{\ell_1}{|\vec{\ell}|}, \frac{\ell_2}{|\vec{\ell}|} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$$

$$M(x, y), \quad M_1(x + \Delta x, y + \Delta y); \quad \overrightarrow{MM_1} = \{\Delta x, \Delta y\} || \vec{\ell}_o$$

$$\Delta z = f(M_1) - f(M), \frac{\Delta z}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \frac{f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y + \gamma(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= f'_x(M) \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + f'_y(M) \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \frac{\gamma(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= f'_x(M) \cos \alpha + f'_y(M) \cos \beta + \frac{\gamma(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'_x(M) \cos \alpha + f'_y(M) \cos \beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$$

производная по направлению – скорость изменения функции в направлении вектора  $\vec{\ell}$ ,  $\vec{\ell}_o$

В частности:

$$\vec{\ell} \parallel \vec{\ell}_o = \vec{i} = \{1, 0\} \implies \frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\vec{\ell} \parallel \vec{\ell}_o = \vec{j} = \{0, 1\} \implies \frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

т.е. производная по направлению обобщает понятие частной производной функции многих переменных.

Определение. Градиент функции  $z = f(x, y)$  есть вектор  $\nabla f = \overrightarrow{\text{grad } f} = \{\overrightarrow{f_x}, \overrightarrow{f_y}\}$

Если  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то  $\nabla f = \{\overrightarrow{f_{x_1}}, \overrightarrow{f_{x_2}}, \dots, \overrightarrow{f_{x_n}}\}$

### Свойства градиента

1.  $\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \nabla f \cdot \overrightarrow{\ell_o} = |\nabla f| \cdot |\overrightarrow{\ell_o}| \cdot \cos \left( \nabla f, \overrightarrow{\ell_o} \right)$

2. Градиент указывает направление, в котором функция меняется быстрее всего.

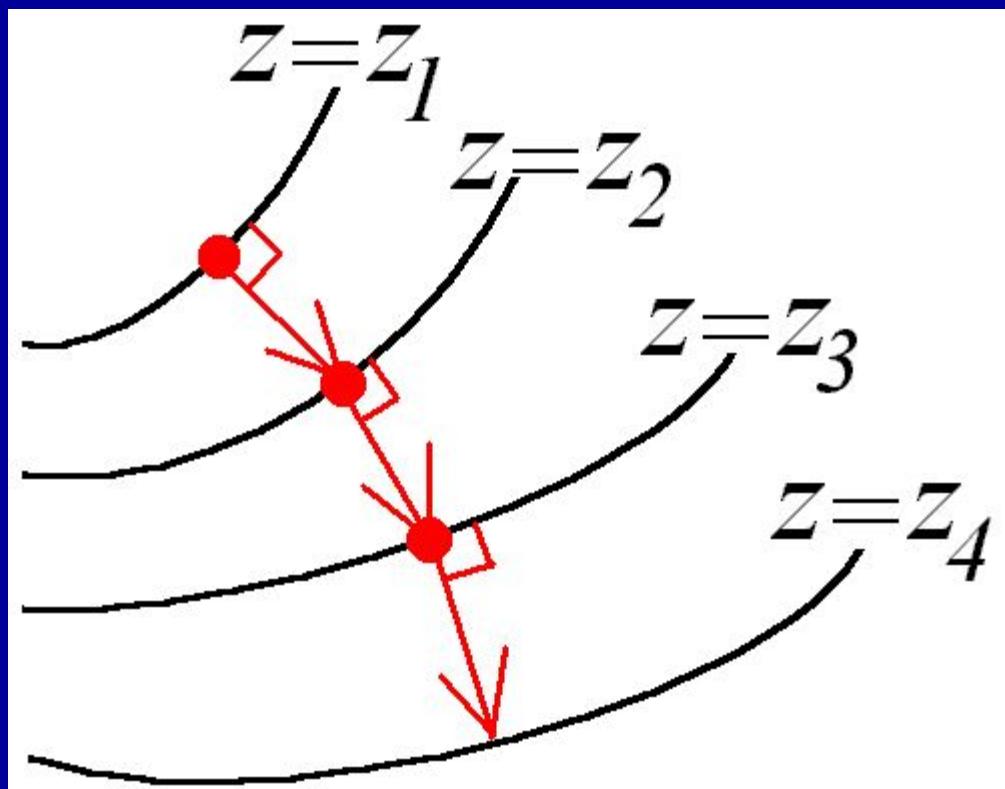
$$\nabla f \uparrow\uparrow \overrightarrow{\ell_o} \iff \cos \left( \nabla f, \overrightarrow{\ell_o} \right) = 1 ;$$

$$\nabla f \uparrow\downarrow \overrightarrow{\ell_o} \iff \cos \left( \nabla f, \overrightarrow{\ell_o} \right) = -1$$

3. Градиент перпендикулярен линиям уровня функции (линиям, на которых значение функции постоянно).

$$\nabla f \perp \vec{\ell}_o \iff \cos\left(\nabla f, \vec{\ell}_o\right) = 0$$

**Методы градиентного спуска** – методы нахождения локальных экстремумов функции многих переменных.



## Частные производные высших порядков

$$z = x^2y + e^x \sin y ; \quad z'_x = 2xy + e^x \sin y , \quad z'_y = x^2 + e^x \cos y$$

$$z''_{xx} = 2y + e^x \sin y , \quad z''_{xy} = 2x + e^x \cos y$$

$$z''_{yx} = 2x + e^x \cos y , \quad z''_{yy} = -e^x \sin y$$

В частности

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Обозначения

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} ; \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} ; \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

**Теорема об изменении порядка дифференцирования.**  
Если у функции  $z = f(x, y)$  в некоторой точке  $M$  и в ее окрестности существуют и непрерывны смешанные производные второго порядка  $z''_{xy}$  и  $z''_{yx}$ , то они совпадают:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

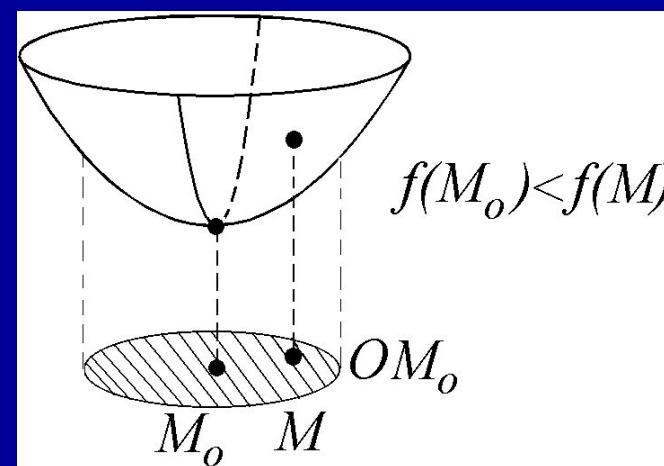
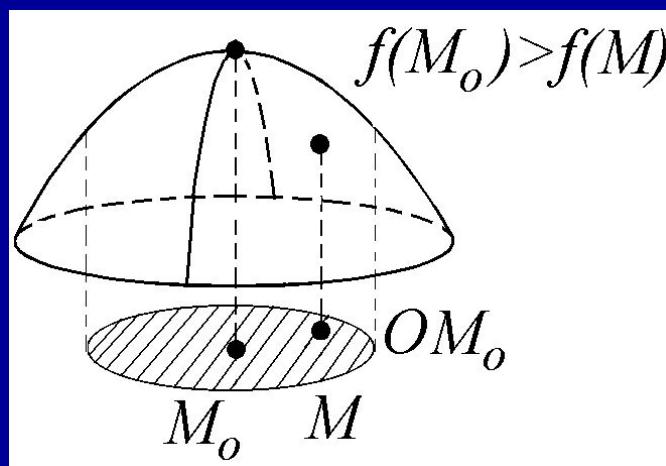
Производные произвольного порядка:

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

# Локальные экстремумы функции двух переменных

Определение. Точка  $M_o(x_o, y_o)$  называется точкой **локального максимума (минимума)** функции  $z = f(x, y)$ , если существует окрестность  $OM_o$ , что для всех точек  $M(x, y)$  из этой окрестности, отличных от  $M_o$ , выполняется неравенство

$$f(x_o, y_o) > f(x, y) \quad (f(x_o, y_o) < f(x, y))$$

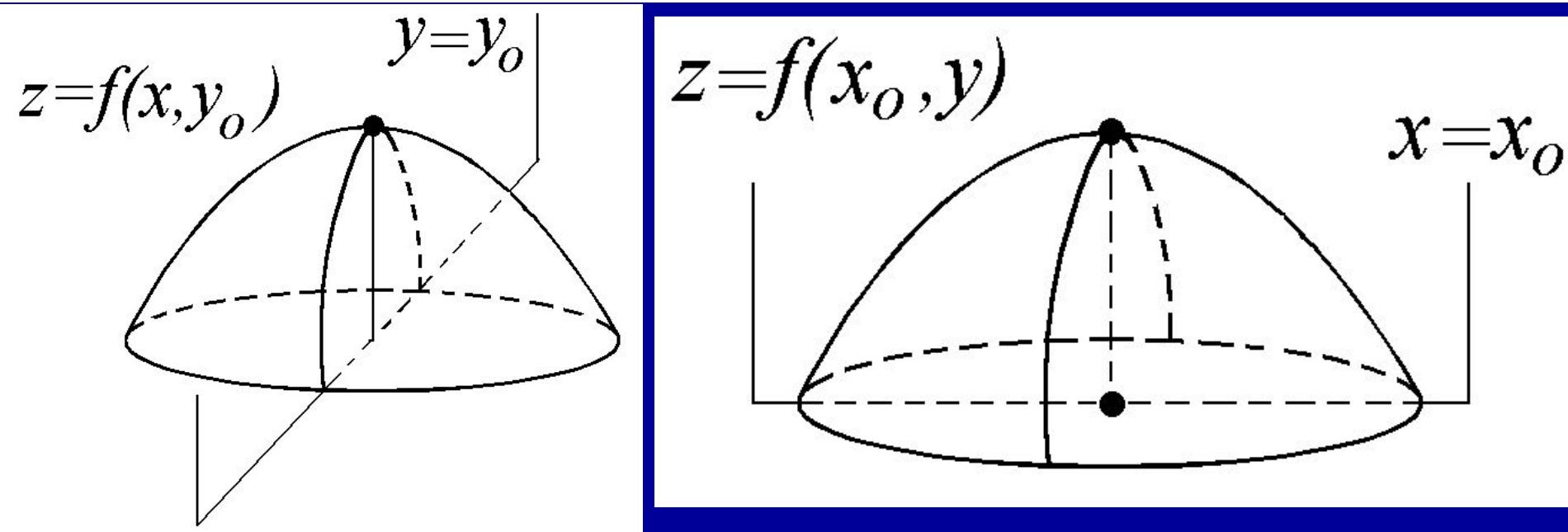


Точки локального максимума и локального минимума называются **точками экстремума** функции  $z = f(x, y)$ , а значения функции в этих точках – ее **экстремумами**.

# Необходимые и достаточные условия локального экстремума

**Теорема. Необходимые условия локального экстремума.** Если у функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_o(x_o, y_o)$  локальный экстремум, то в этой точке частные производные  $z'_x(M_o)$  и  $z'_y(M_o)$  равны нулю:

$$f'_x(x_o, y_o) = 0, \quad f'_y(x_o, y_o) = 0$$

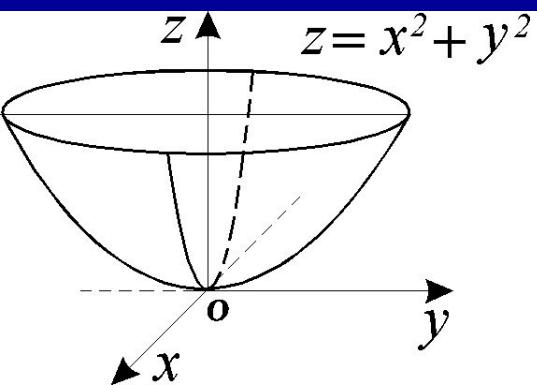


Определение. Точки, в которых частные производные  $z'_x(M_o)$  и  $z'_y(M_o)$  равны нулю, называются точками: **подозрительными на экстремум, критическими, стационарными**.

Только в таких точках может быть локальный экстремум, но не в каждой критической точке он имеется!

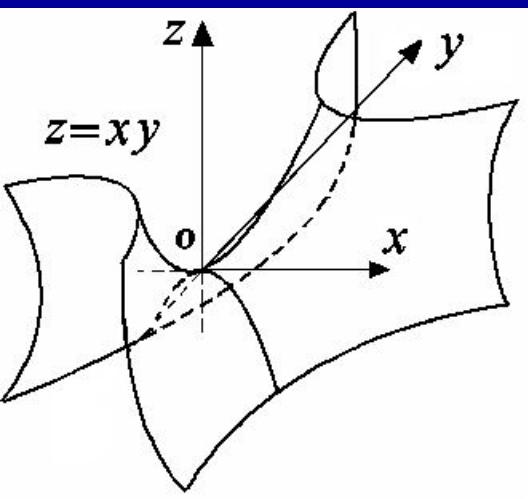
# Примеры.

$$z = x^2 + y^2, \quad z'_x = 2x, \quad z'_y = 2y; \quad x_o = y_o = 0$$



Локальный минимум

$$z = xy, \quad z'_x = y, \quad z'_y = x; \quad x_o = y_o = 0$$



Экстремума нет!

**Теорема. Достаточные условия локального экстремума.** Пусть у функции  $z = f(x, y)$  есть критическая точка  $M_o(x_o, y_o)$ , т.е.  $f'_x(M_o) = f'_y(M_o) = 0$  и пусть

$$f''_{xx}(M_o) = A, \quad f''_{xy}(M_o) = B, \quad f''_{yy}(M_o) = C$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Тогда:

- 1) если  $D > 0$ , то в критической точке локальный экстремум, причем при  $A > 0$  – минимум, при  $A < 0$  – максимум;
- 2) если  $D < 0$ , то в критической точке локального экстремума нет;
- 3) если  $D = 0$ , то нужно дополнительное исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 20.$$

Решение.  $z'_x = 2x - y + 9; \quad z'_y = 2y - x - 6$

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2x + 9 \\ 2(2x + 9) - x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 9 \\ 3x = -12 \end{cases}; \quad x_o = -4, \quad y_o = +1$$

$$z''_{xx} = 2; \quad z''_{xy} = -1; \quad z''_{yy} = 2$$

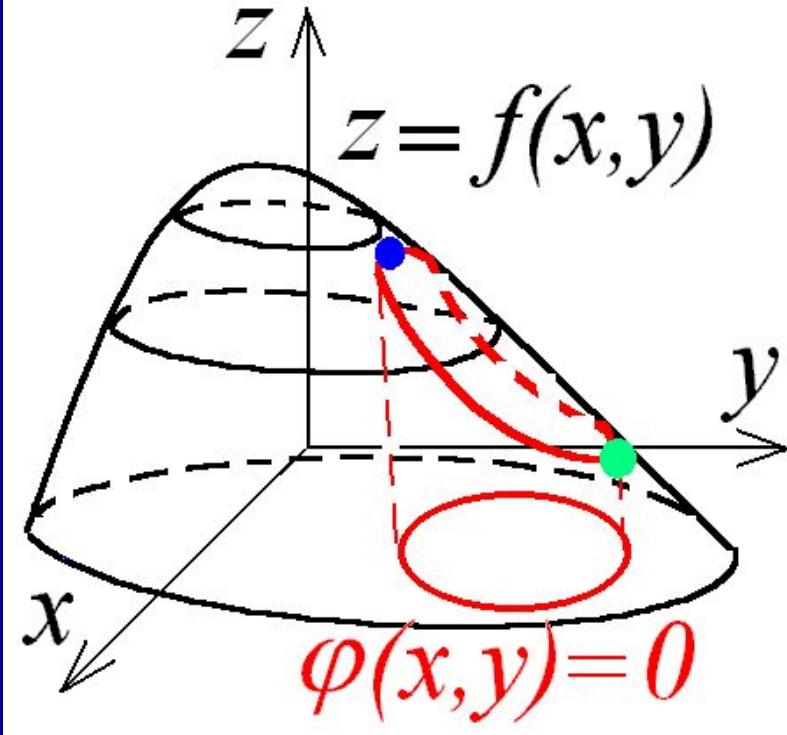
$$A = z''_{xx}(M_o) = 2; \quad B = z''_{xy}(M_o) = -1; \quad C = z''_{yy}(M_o) = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = \underline{\underline{3 > 0}}, \quad \underline{\underline{A = 2 > 0}}$$

В точке  $M_o(x_o = -4, y_o = +1)$  локальный минимум

В точке  $M_o(x_o = -4, y_o = +1)$  локальный минимум

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= f(M_o) = f(-4, +1) = \\ &= (-4)^2 + (+1)^2 - (-4)(+1) + 9(-4) - 6(+1) + 20 = \\ &= 16 + 1 + 4 - 36 - 6 + 20 = -1 \end{aligned}$$



## Условный экстремум функции двух переменных

**Задача.** У функции  $z = f(x, y)$  при условии  $\varphi(x, y) = 0$  найти экстремум. Геометрический смысл условного экстремума: "на горе есть тропа; найти на тропе самую высокую и самую низкую точку".

## Нахождение условного экстремума

1.  $\varphi(x, y) = 0 \implies y = \psi(x)$ .

У функции одной переменной  $z = f(x, \psi(x))$  найти экстремумы.

2.  $\varphi(x, y) = 0 \implies x = \vartheta(y)$ .

У функции одной переменной  $z = f(\vartheta(y), y)$  найти экстремумы.

**3. Метод неопределенных множителей Лагранжа.**

Вводится дополнительная функция  $F$  с дополнительной переменной  $\lambda$  – множителем Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

и у функции  $F(x, y, \lambda)$  ищется локальный экстремум:

$$F'_x = f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y)$$

$$F'_y = f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y)$$

$$F'_{\lambda} = \varphi(x, y)$$

Составляется система из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Решение системы  $(x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0)$  есть координаты точки, подозрительной на экстремум.

Надо еще проверять достаточные условия.

Метод "работает" при произвольном числе независимых переменных и при произвольном числе дополнительных условий.

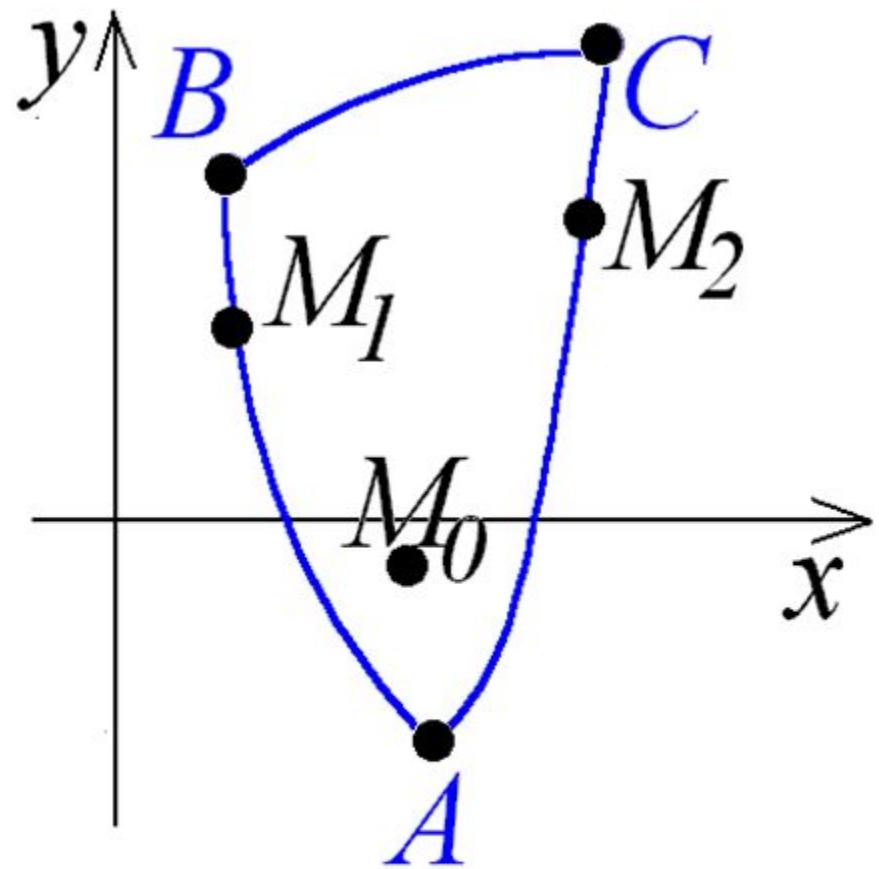
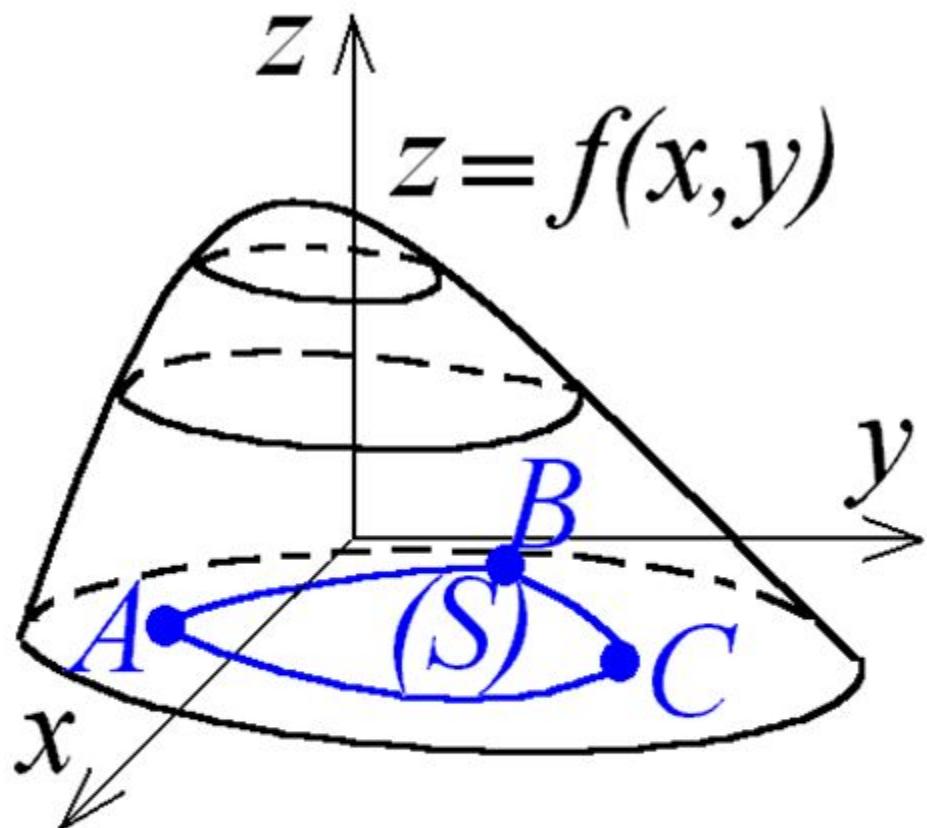
Определение. Точка  $M_o(x_o, y_o)$  называется точкой **глобального максимума (минимума)** функции  $z = f(x, y)$ , если для всех точек из области определения функции выполняется неравенство

$$f(x_o, y_o) > f(x, y) \quad \left( f(x_o, y_o) < f(x, y) \right)$$

Чтобы найти **глобальный экстремум в ограниченной, замкнутой области**, необходимо:

- 1) найти значения всех локальных экстремумов внутри области;
- 2) найти значения всех локальных экстремумов на границе области ("условные экстремумы");
- 3) определить значения функции в "угловых" точках границы;

и из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее. Это и будут **глобальный максимум и глобальный минимум**.



max, min из

$$\{f(M_0), f(M_1), f(M_2), f(A), f(B), f(C)\}$$

# Тема "КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ"

## "ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРЕ"

### **Абстрактная фигура, ее диаметр и мера**

**Определение.** Фигура это ограниченное замкнутое множество в  $\mathbf{R}^n$ , у которой есть **диаметр** и **мера**. Обозначение фигуры:  $(\omega)$ .

**Определение.** Диаметр фигуры это число, равное

$$d = \max r(M_1, M_2), \quad M_1, M_2 \in (\omega)$$

т.е.  $d$  – наибольшее расстояние между точками фигуры.

**Определение.** Мера фигуры:  $\mu(\omega) = \omega$  – неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству:

$$\mu((\omega_1) \cup (\omega_2)) = \mu(\omega_1) + \mu(\omega_2)$$

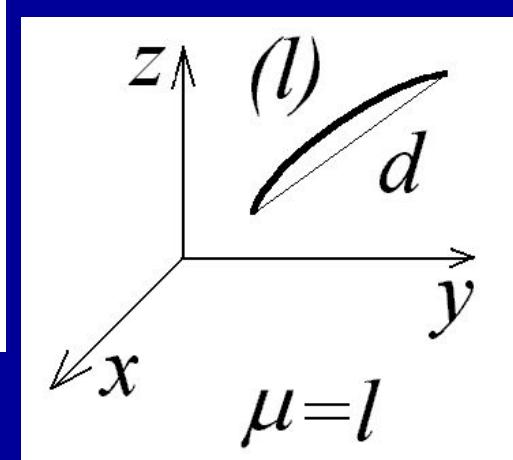
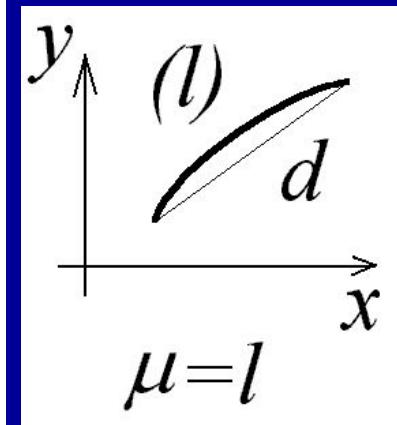
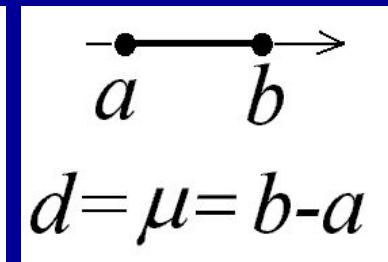
т.е. мера – неотрицательная аддитивная функция.

# Примеры фигур, их диаметры и меры

Отрезок прямой:

$$[a, b] ; \quad d = b - a ;$$

мера – длина отрезка



Ограниченнaя линия на плоскости:

$$(\ell) \in \mathbf{R}^2 ; \quad d = \max r(M_1, M_2) ;$$

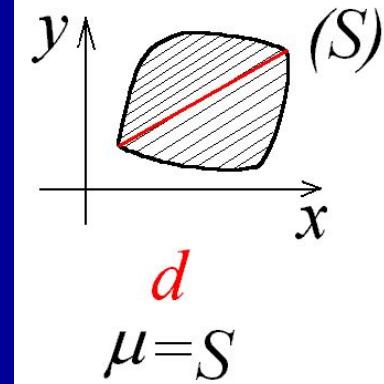
мера – длина линии

Ограниченнaя линия в пространстве:

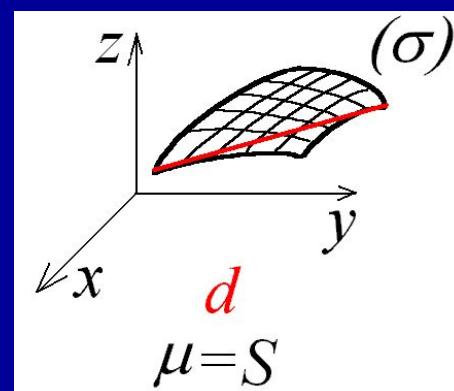
$$(\ell) \in \mathbf{R}^3 ; \quad d = \max r(M_1, M_2) ;$$

мера – длина линии

Плоская ограниченная фигура:  
 $(S) \in \mathbf{R}^2$  ;  $d = \max r(M_1, M_2)$  ;  
мера – площадь фигуры



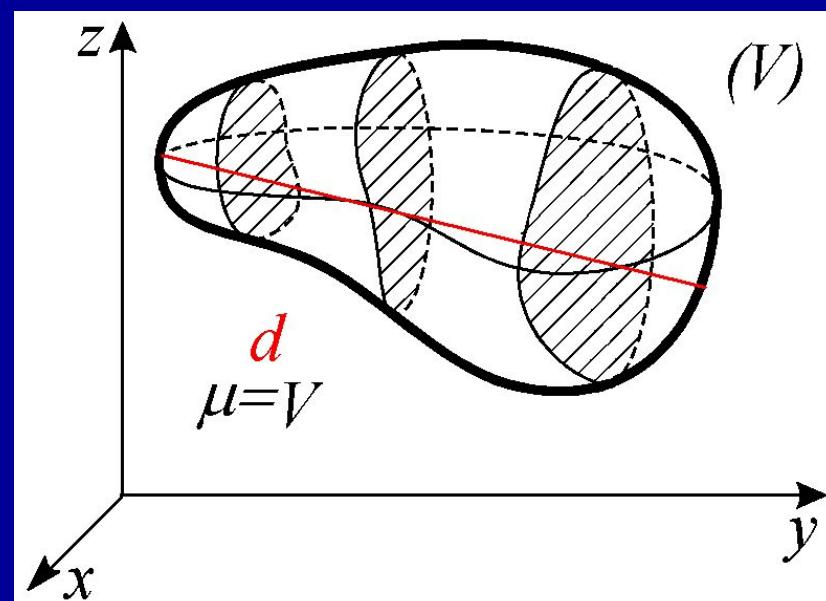
$$\mu=S$$



$$\mu=S$$

Ограниченнaя поверхность в пространстве:  
 $(\sigma) \in \mathbf{R}^3$  ;  $d = \max r(M_1, M_2)$  ;  
мера – площадь фигуры

Ограниченнoe тело в пространстве:  
 $(V) \in \mathbf{R}^3$  ;  $d = \max r(M_1, M_2)$  ;  
мера – объем тела



$$\mu=V$$

## Задача о вычислении массы фигуры с переменной плотностью

Пусть заданы: 1) фигура  $(\omega)$ ; 2) на фигуре – функция  $\rho(M)$ ,  $M \in (\omega)$ .  $\rho(M)$  – переменная плотность фигуры (меняется от точки к точке).

Найти массу фигуры.

Использование общей идеи: фигуру разбиваем на части; приближенно решаем требуемую задачу для каждой части; суммированием найденных ответов получаем приближенное решение всей задачи; стараемся улучшить приближение, т.е. уменьшить погрешность.

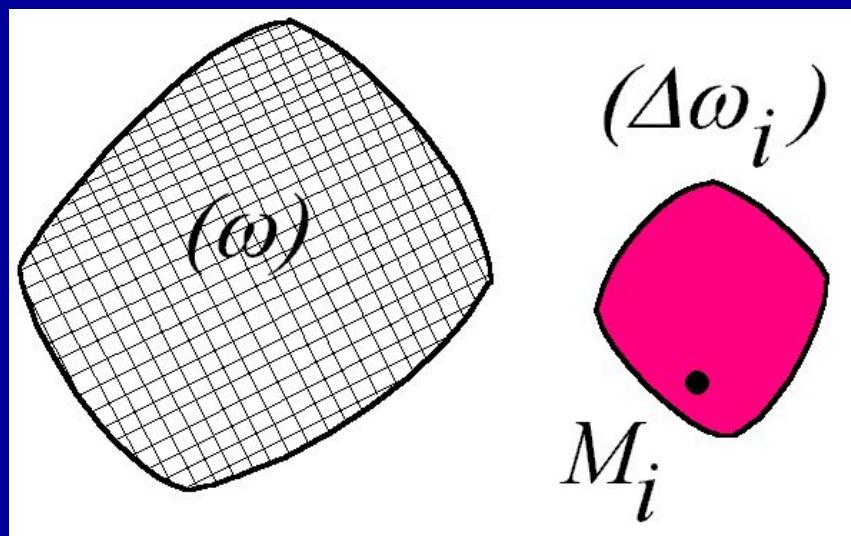
Фигура ( $\omega$ ) разбивается на  $n$  частей, которые нумеруются:

$$(\Delta\omega_1), (\Delta\omega_2), \dots, (\Delta\omega_n) ; \quad (\omega) = (\Delta\omega_1) \cup (\Delta\omega_2) \cup \dots \cup (\Delta\omega_n)$$

в каждой части выбирается своя точка  $M_i \in (\Delta\omega_i)$ , тогда  $m_i \approx \rho(M_i) \cdot \mu(\Delta\omega_i) = \rho(M_i) \cdot \Delta\omega_i$

Поэтому

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta\omega_i ; \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta\omega_i = m$$



## Определение интеграла по фигуре

Пусть заданы: 1) фигура  $(\omega)$ ; 2) на фигуре – функция  $f(M)$ ,  $M \in (\omega)$ . Фигура  $(\omega)$  разбивается на  $n$  частей, которые нумеруются:

$$(\Delta\omega_1), (\Delta\omega_2), \dots, (\Delta\omega_n); \quad (\omega) = (\Delta\omega_1) \cup (\Delta\omega_2) \cup \dots \cup (\Delta\omega_n)$$

в каждой части выбирается своя точка  $M_i \in (\Delta\omega_i)$  и вычисляется  $f(M_i) \cdot \Delta\omega_i$

Составляется интегральная сумма:  $\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\omega_i$

у которой ищется предел:  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\omega_i$

Определение. Если предел интегральных сумм существует, конечен и его значение не зависит от способа разбиения фигуры ( $\omega$ ) на части и выбора в них точек  $M_i$ , то этот предел (число!) называется интегралом по фигуре ( $\omega$ ) от функции  $f(M)$ .

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \omega_i = \int_{(\omega)} f(M) d\omega$$

**Теорема о существовании интеграла по фигуре.** Если фигура ( $\omega$ ) есть ограниченное замкнутое множество, а функция  $f(M)$ , заданная на фигуре, непрерывна, то

$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega$$

существует, его значение есть число, которое не зависит от способа разбиения фигуры ( $\omega$ ) на части и выбора в них точек  $M_i$ .

## Свойства интеграла по фигуре

1. Если подынтегральная функция равна единице, то интеграл равен **мере фигуры**:

$$1. \int_{(\omega)} d\omega = \omega ; \quad 2. \int_{(\omega)} kf(M) d\omega = k \int_{(\omega)} f(M) d\omega ; \quad k = \text{const}$$

$$3. \int_{(\omega)} [f(M) + g(M)] d\omega = \int_{(\omega)} f(M) d\omega + \int_{(\omega)} g(M) d\omega$$

$$4. \int_{(\omega)} f(M) d\omega = \int_{(\omega_1)} f(M) d\omega + \int_{(\omega_2)} f(M) d\omega$$
$$(\omega) = (\omega_1) \cup (\omega_2) ; \quad \mu((\omega_1) \cap (\omega_2)) = 0$$

$$5. \quad f(M) \geq 0 \implies \int\limits_{(\omega)} f(M) d\omega \geq 0$$

$$6. \quad f(M) \geq g(M) \implies \int\limits_{(\omega)} f(M) d\omega \geq \int\limits_{(\omega)} g(M) d\omega$$

$$7. \quad m_* \leq f(M) \leq m^* \implies m_* \omega \leq \int\limits_{(\omega)} f(M) d\omega \leq m^* \omega$$

8. Если  $(\omega)$  – ограниченная замкнутая фигура,  
а  $f(M)$  – непрерывная на  $(\omega)$  функция, то  $\exists M_o \in (\omega)$ :

$$\int\limits_{(\omega)} f(M) d\omega = f(M_o) \cdot \omega$$

# Виды интегралов по фигуре и их названия

1. ( $\omega$ ) есть  $[a, b]$ ,  $f(x)$  задана на  $[a, b]$ :

$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega = \int_a^b f(x) dx$$

определенный интеграл.

2. ( $\omega$ ) есть  $(\ell) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y)$  задана на  $(\ell)$ :

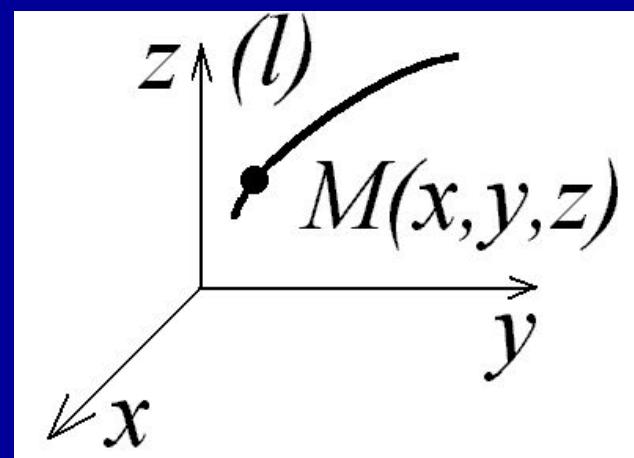
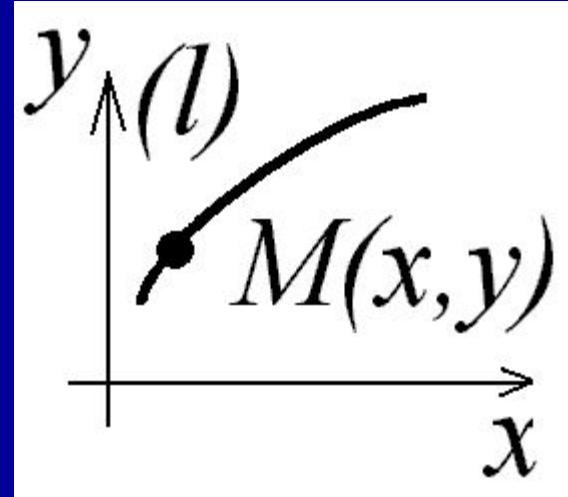
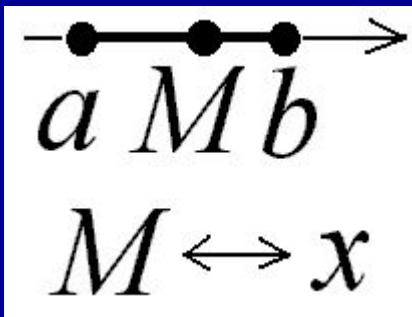
$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega = \int_{(\ell)} f(x, y) d\ell$$

криволинейный интеграл по плоской линии.

3. ( $\omega$ ) есть  $(\ell) \in \mathbf{R}^3$ ,  $f(x, y, z)$  задана на  $(\ell)$ :

$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega = \int_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell$$

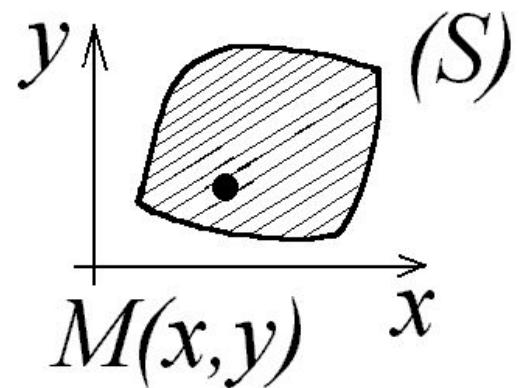
криволинейный интеграл по пространственной линии.



4. ( $\omega$ ) есть  $(S) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y)$  задана на  $(S)$ :

$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega = \iint_{(S)} f(x, y) dS$$

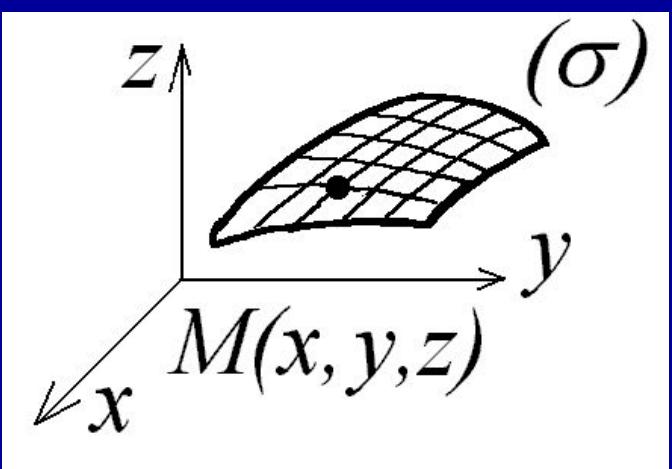
двойной интеграл.



5. ( $\omega$ ) есть  $(\sigma) \in \mathbf{R}^3$ ,  $f(x, y, z)$  задана на  $(\sigma)$ :

$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega = \iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma$$

поверхностный интеграл.



6. ( $\omega$ ) есть  $(V) \in \mathbf{R}^3$ ,

$f(x, y, z)$  задана в точках из  $(V)$ :

$$\int_{(\omega)} f(M) d\omega = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$$

тройной интеграл.

