

Функции и их графики

Задание №23

по материалам открытого банка
задач ОГЭ по математике 2017 года

<http://www.mathgia.ru/or/gia12/Main.html>

1. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

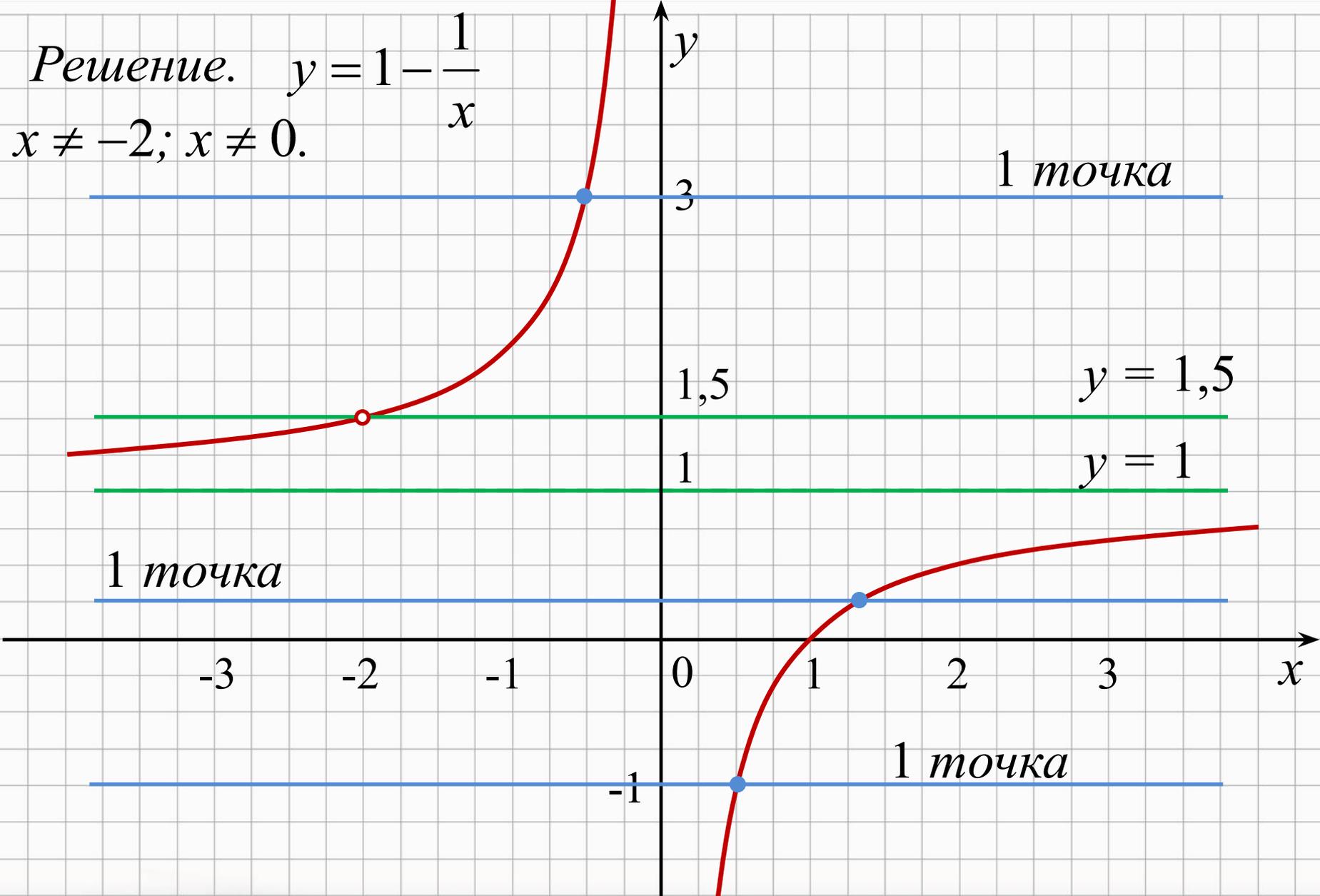
Решение.

$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$$

$$1 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$$

при условии $x \neq 0$ и $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ и $x \neq -2$.

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty).$$



Ответ: $m = 1; m = 1,5.$

2. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$
и определите, при каких значениях t прямая $y = t$
имеет с графиком две общие точки.

Решение.

$$y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$$

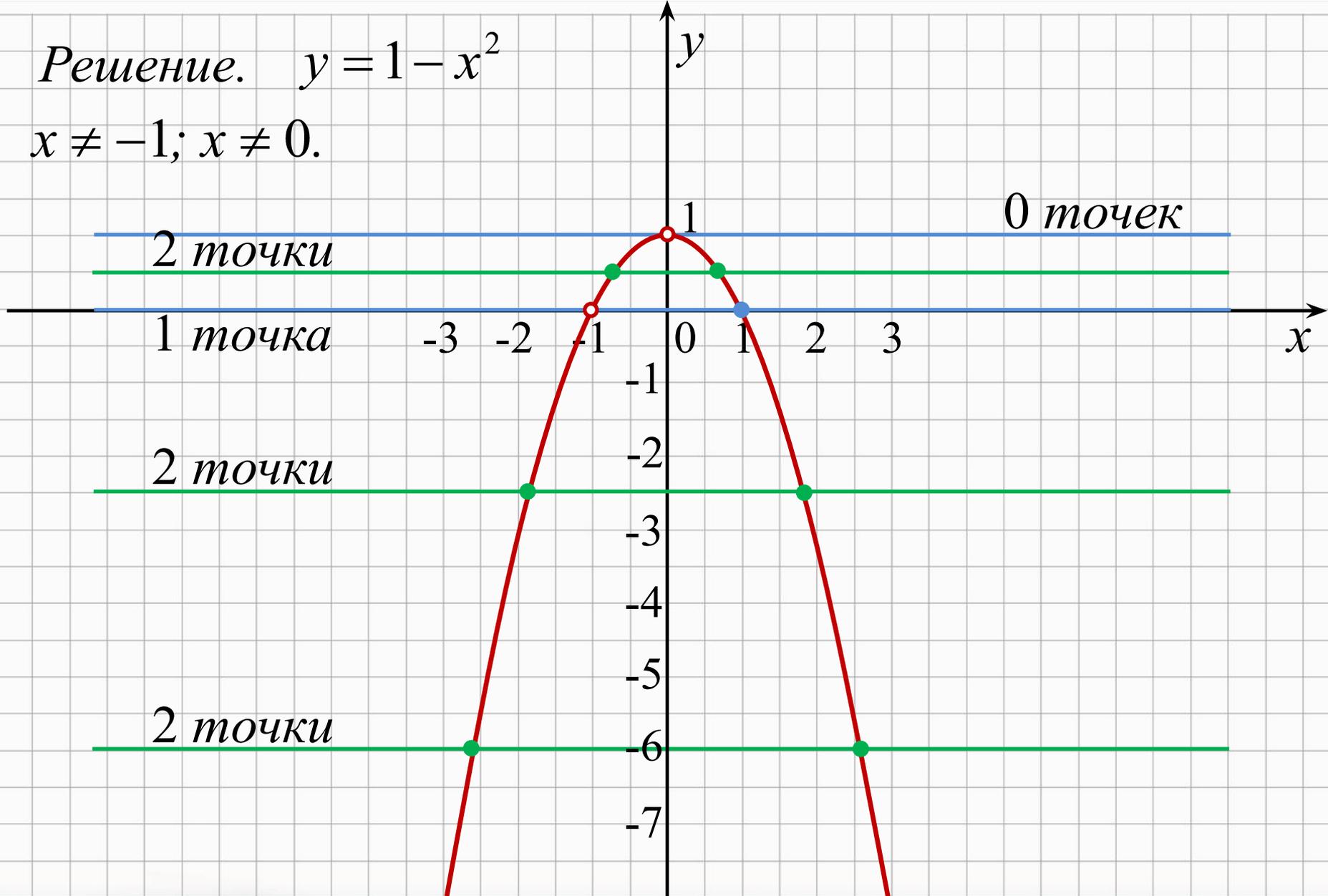
$$1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2} = 1 - \frac{x^3(x+1)}{x(x+1)} = 1 - x^2$$

при условии $x \neq 0$ и $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ и $x \neq -1$.

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Решение. $y = 1 - x^2$

$x \neq -1; x \neq 0.$



Ответ: $m < 0; 0 < m < 1.$

3. Постройте график функции $y = \frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$y = \frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$$

$$\frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4} = \frac{(x+5)(x+4)(x+1)}{x+4} = (x+5)(x+1) =$$

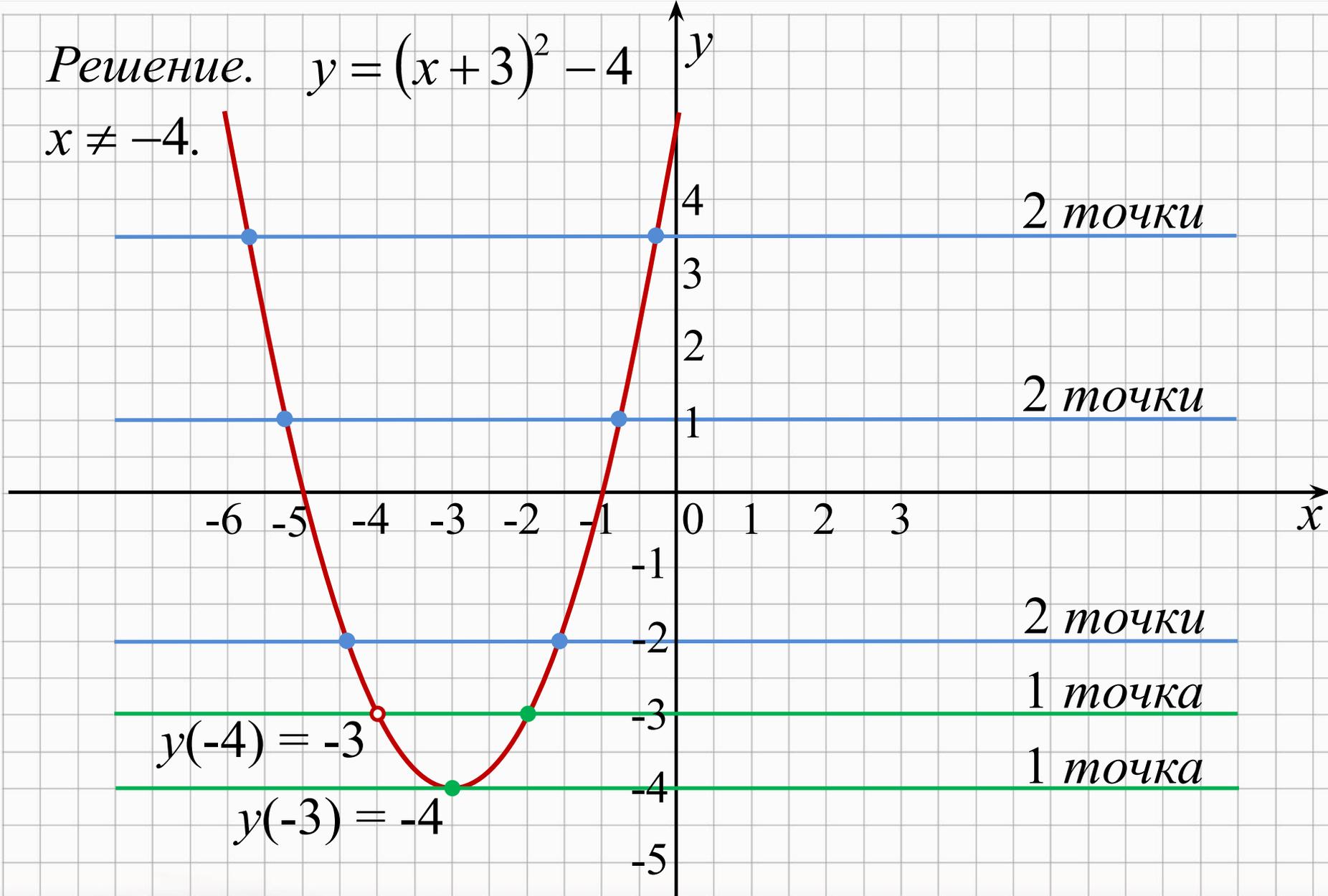
$$= x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$$

при условии $x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$.

$$D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty).$$

Решение. $y = (x + 3)^2 - 4$

$x \neq -4$.



Ответ: $m = -4$; $m = -3$.

4. Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

$$y = |x^2 - x - 2|$$

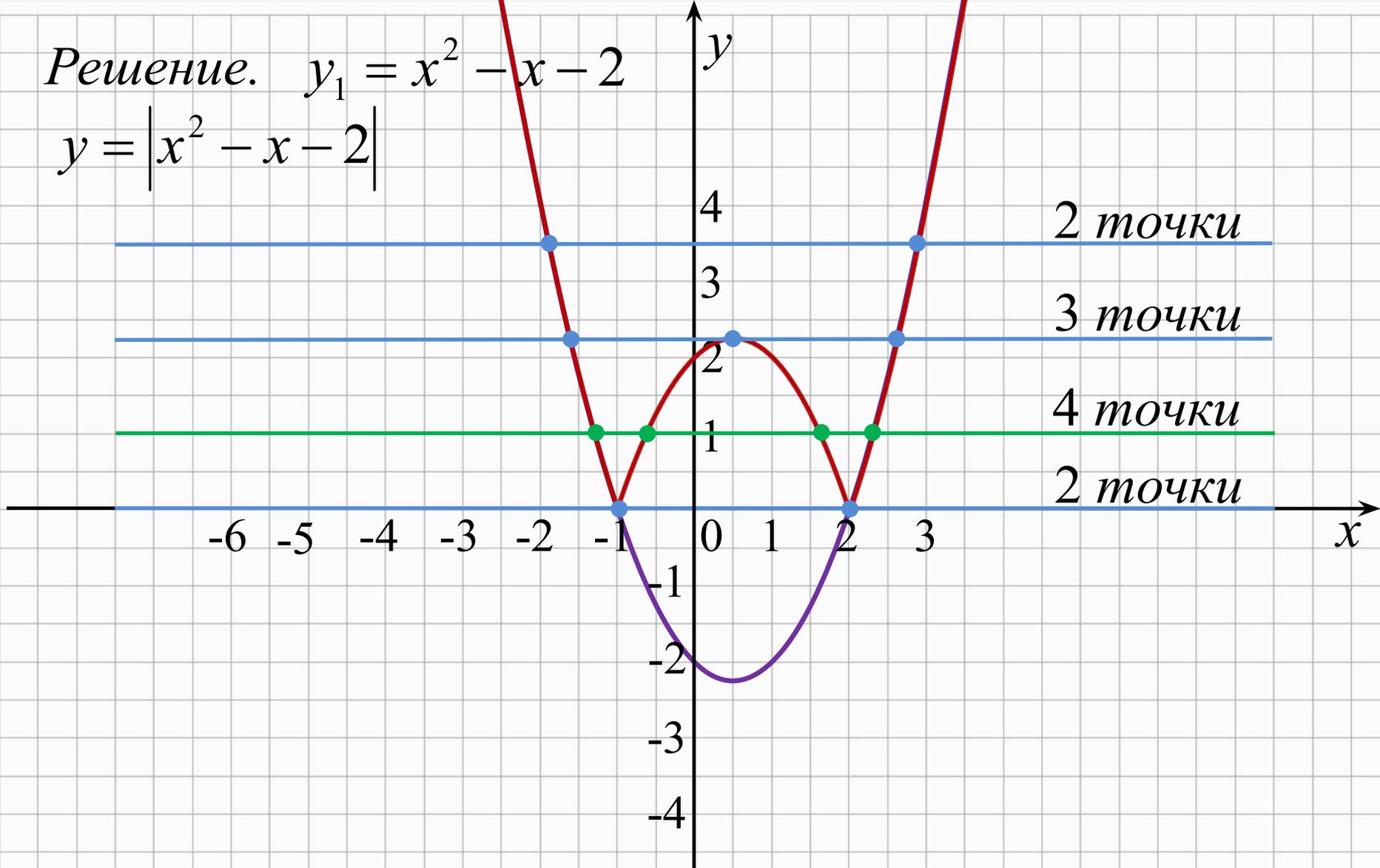
$$y_1 = x^2 - x - 2$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; \quad y_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}.$$

| | | | | | | |
|-----|----|----|----|---|---|----|
| x | 0 | 1 | -1 | 2 | 3 | -2 |
| y | -2 | -2 | 0 | 0 | 4 | 4 |

Решение. $y_1 = x^2 - x - 2$

$$y = |x^2 - x - 2|$$



Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при $0 < t < 2,25$.

5. Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 8$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

$$y = x^2 - 6|x| + 8 \Leftrightarrow y = |x|^2 - 6|x| + 8, \text{ т.к. } |x|^2 = x^2$$

$$y_1 = x^2 - 6x + 8$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3; \quad y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1.$$

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 6 | 1 | 5 | 2 | 4 |
| y | 8 | 8 | 3 | 3 | 0 | 0 |

Решение. $y_1 = x^2 - 6x + 8$

$$y = |x|^2 - 6|x| + 8$$

2 точки

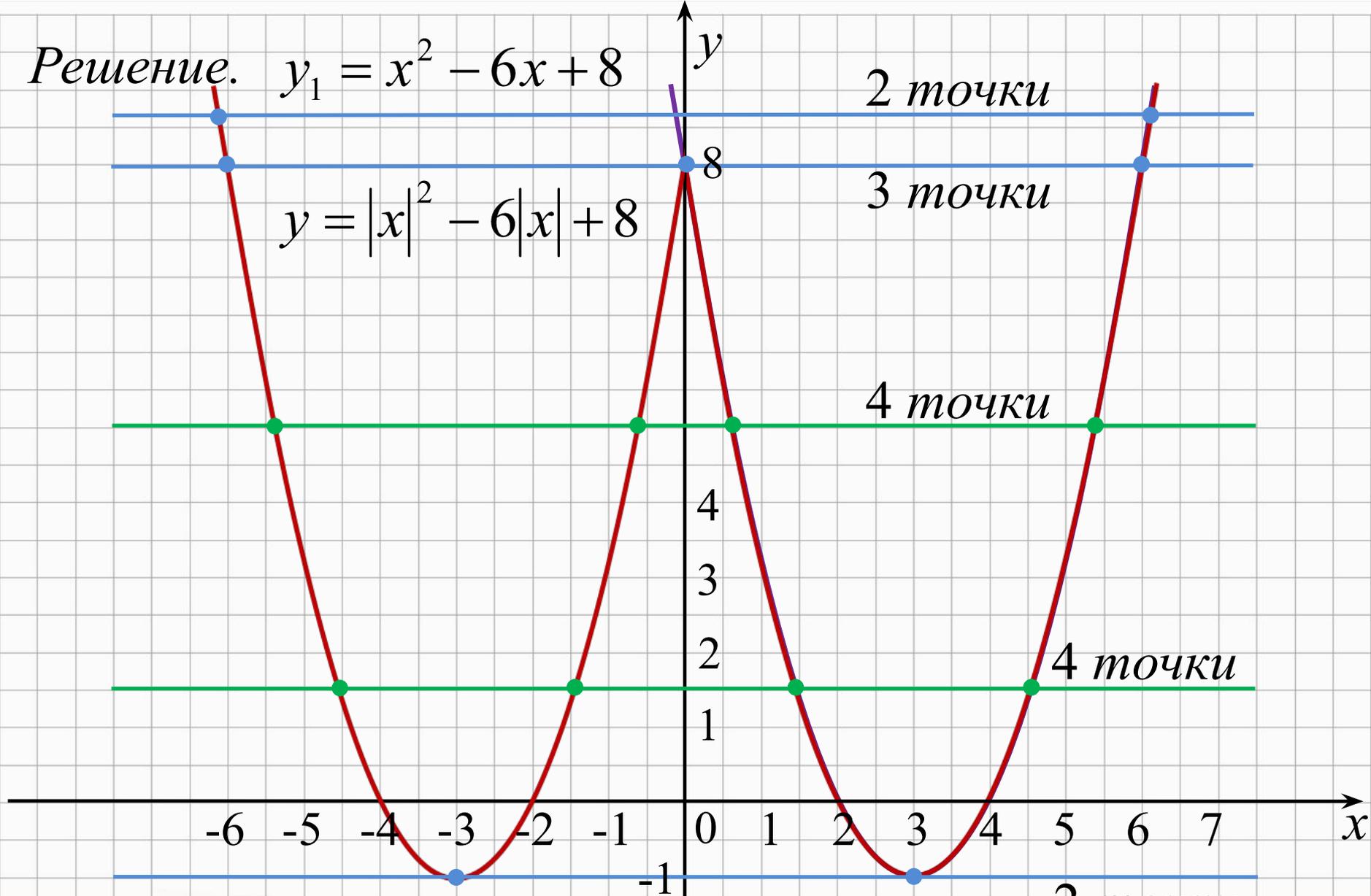
3 точки

4 точки

4 точки

0 точки

Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при $-1 < t < 8$.



6. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)} =$$

$$= (x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10 = (x-1,5)^2 - 12,25.$$

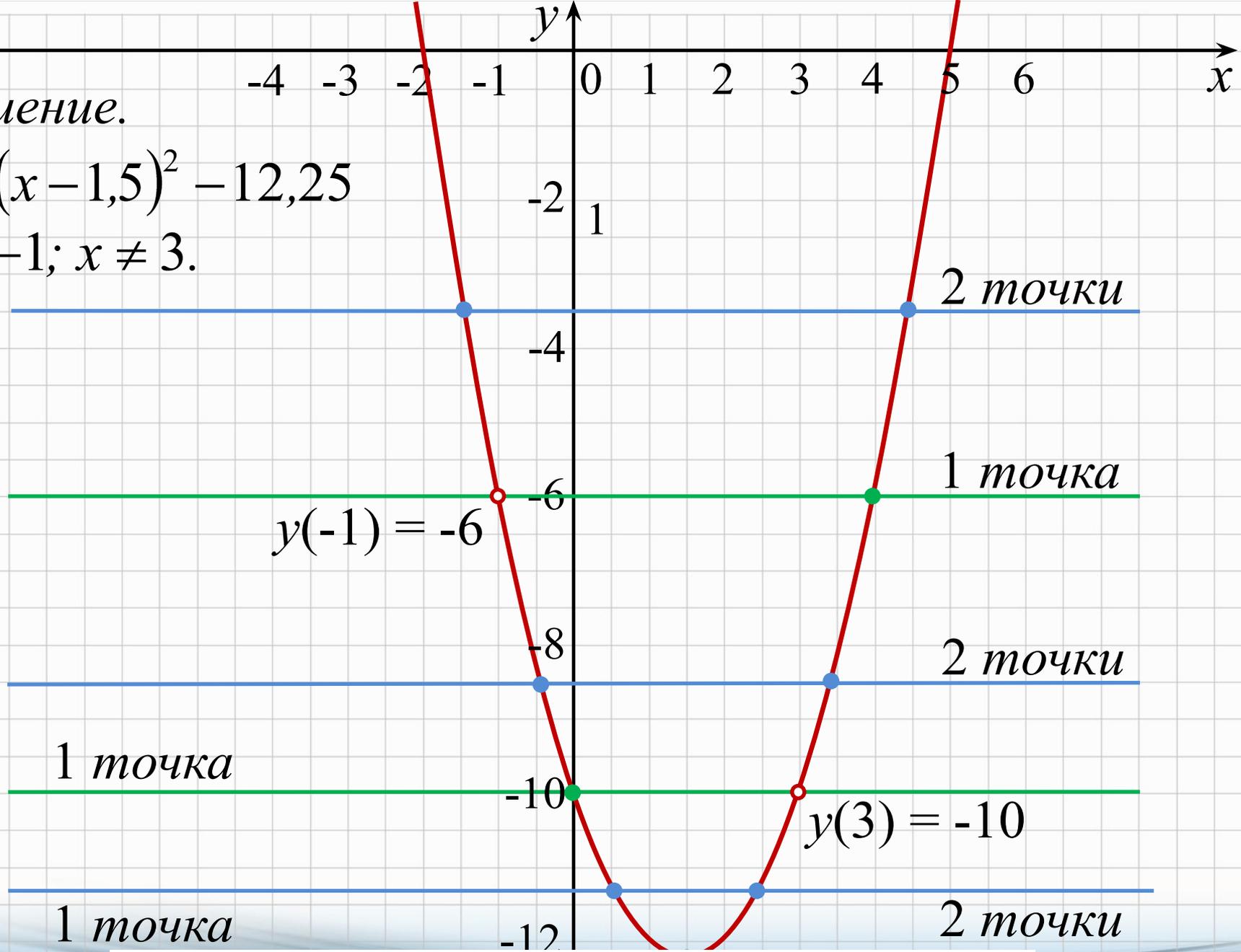
при условии $x+1 \neq 0$, $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ и $x \neq 3$.

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty).$$

Решение.

$$y = (x - 1,5)^2 - 12,25$$

$$x \neq -1; x \neq 3.$$



Ответ: $m = -12,25$; $m = -10$; $m = -6$.

7. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$
и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x + 6$$

$$y_2 = 3x$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

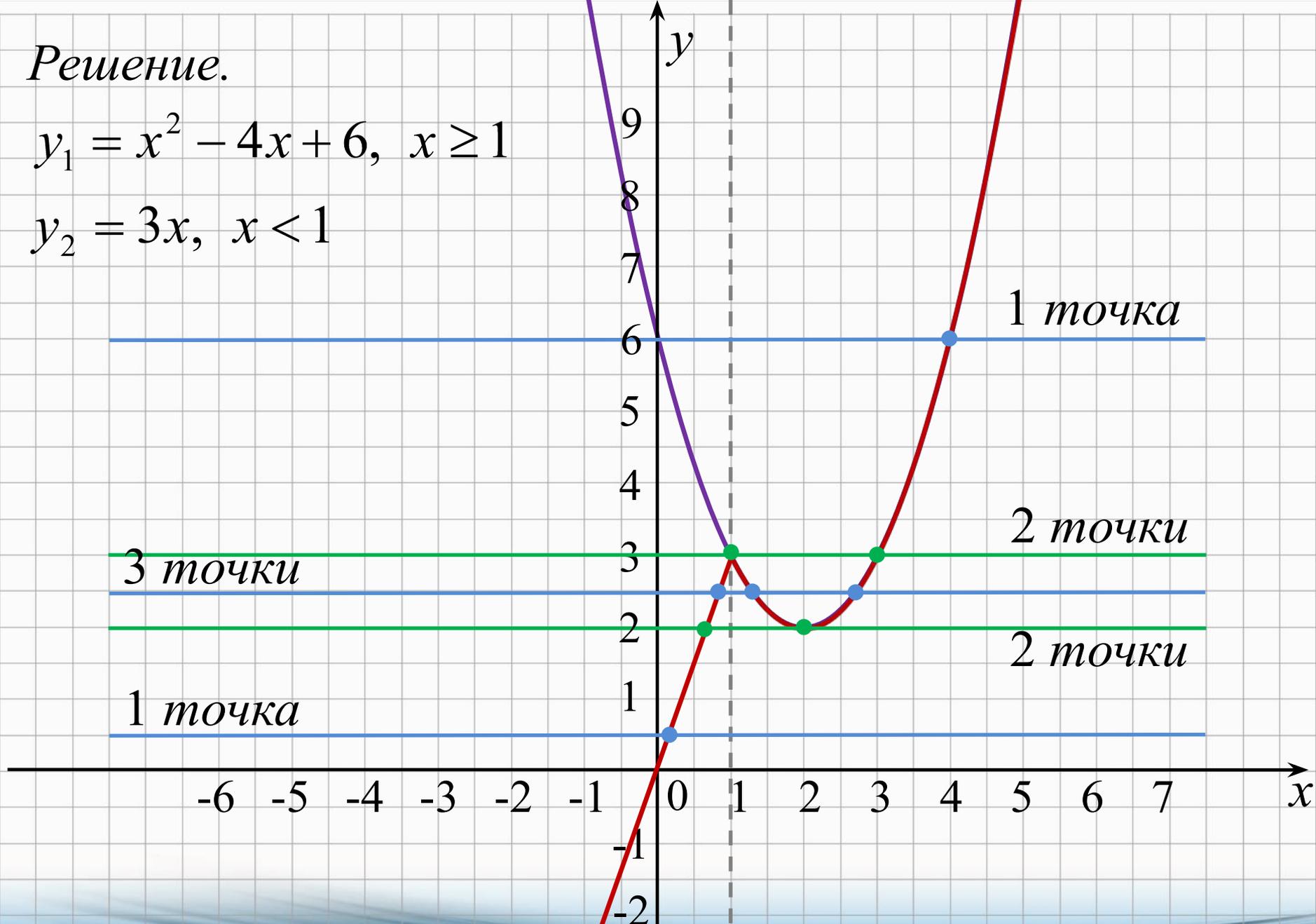
| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | -2 |
| y | 0 | -6 |

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2.$$

Решение.

$$y_1 = x^2 - 4x + 6, \quad x \geq 1$$

$$y_2 = 3x, \quad x < 1$$



Ответ: $m = 2$; $m = 3$.

8. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases}$$

$$kx = x^2 + 4$$

$$x^2 - kx + 4 = 0$$

$$D = k^2 - 16$$

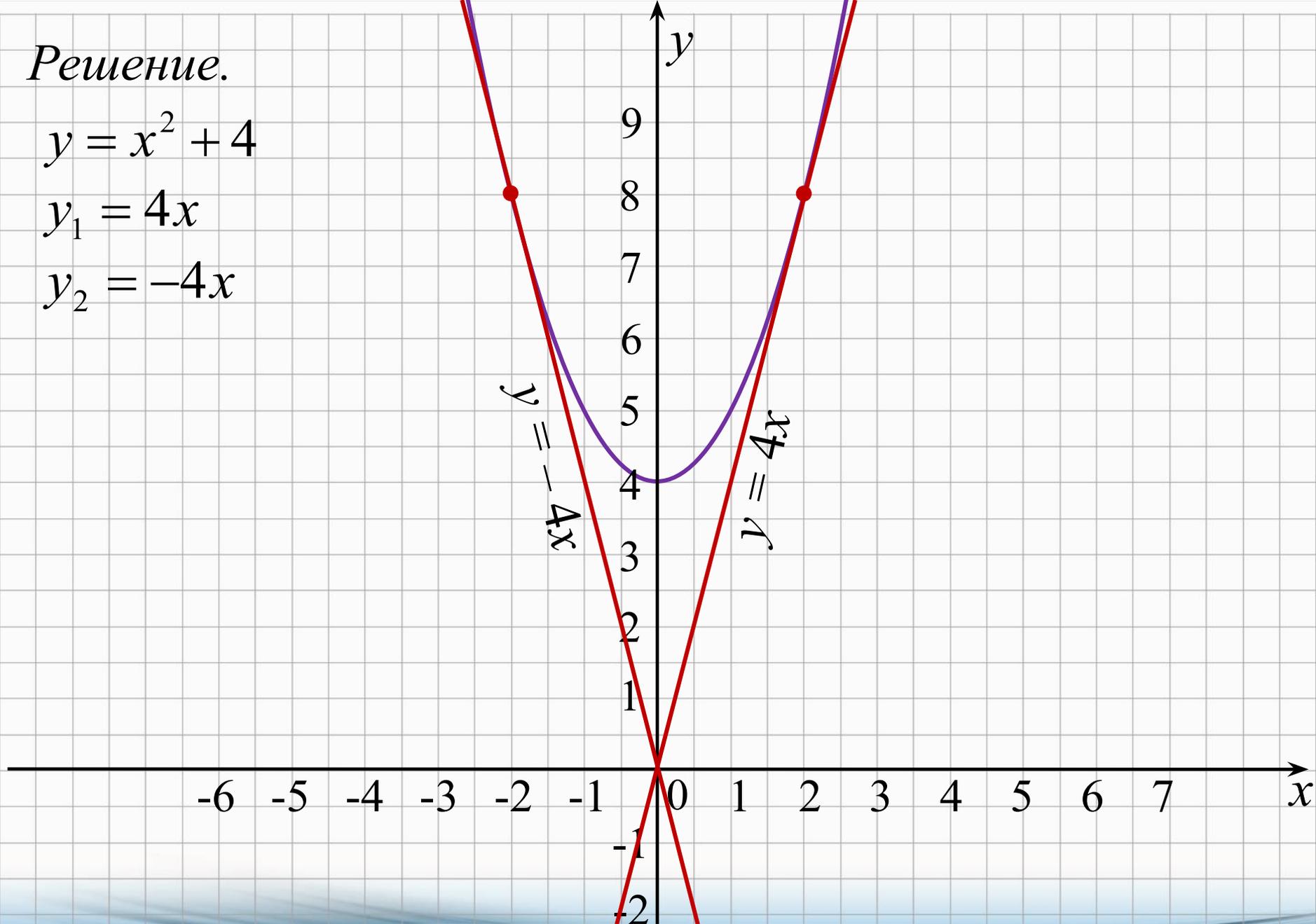
$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 4.$$

Решение.

$$y = x^2 + 4$$

$$y_1 = 4x$$

$$y_2 = -4x$$



Ответ: $k = 4$; $k = -4$.

9. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 1$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 1, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = -x^2 - 1, \\ y = kx; \end{cases}$$

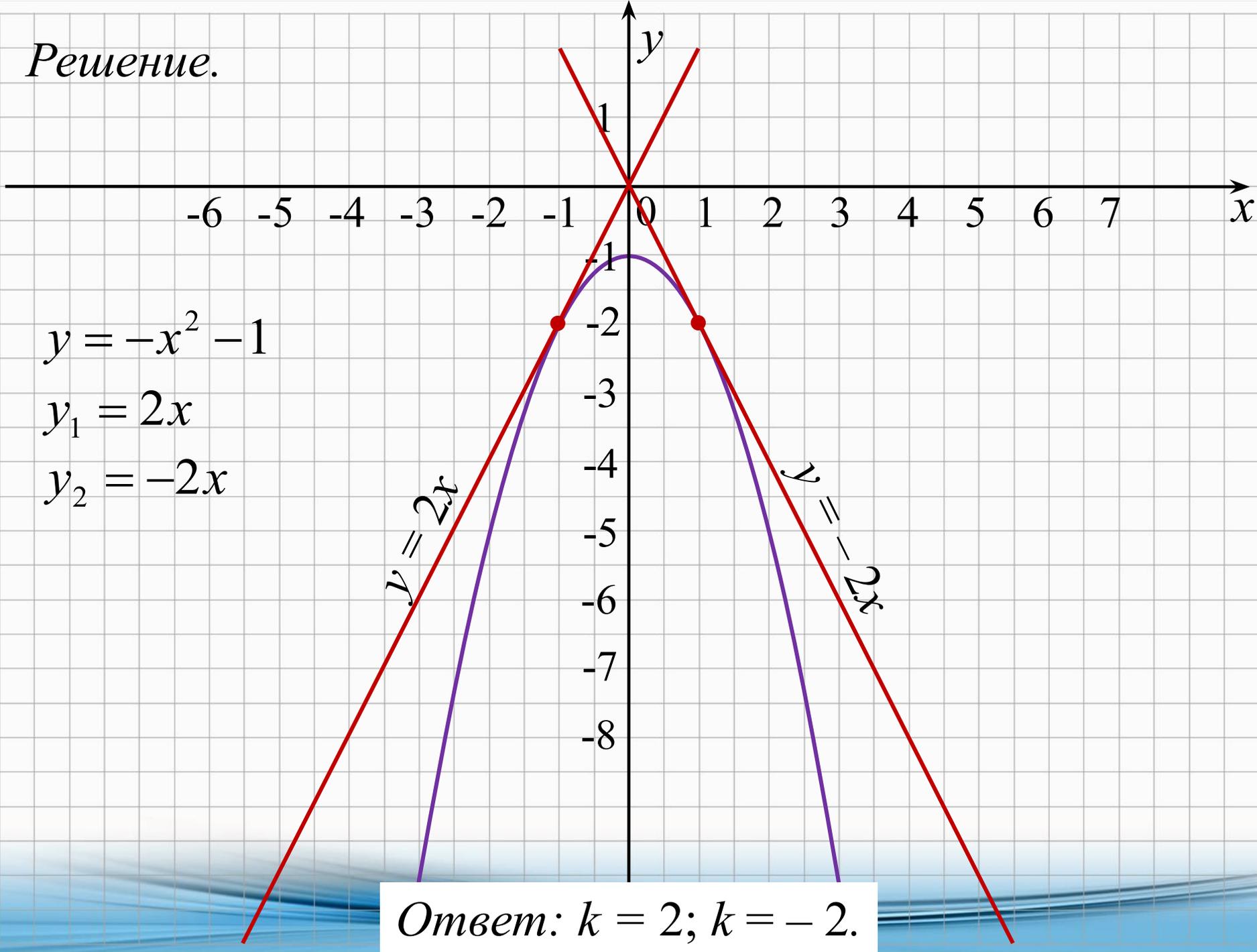
$$kx = -x^2 - 1$$

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

$$D = k^2 - 4$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

Решение.



$$y = -x^2 - 1$$

$$y_1 = 2x$$

$$y_2 = -2x$$

Ответ: $k = 2; k = -2.$

10. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$ если известно, что прямая $y = 6x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения p , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases}$$

$$6x = x^2 + p$$

$$x^2 - 6x + p = 0$$

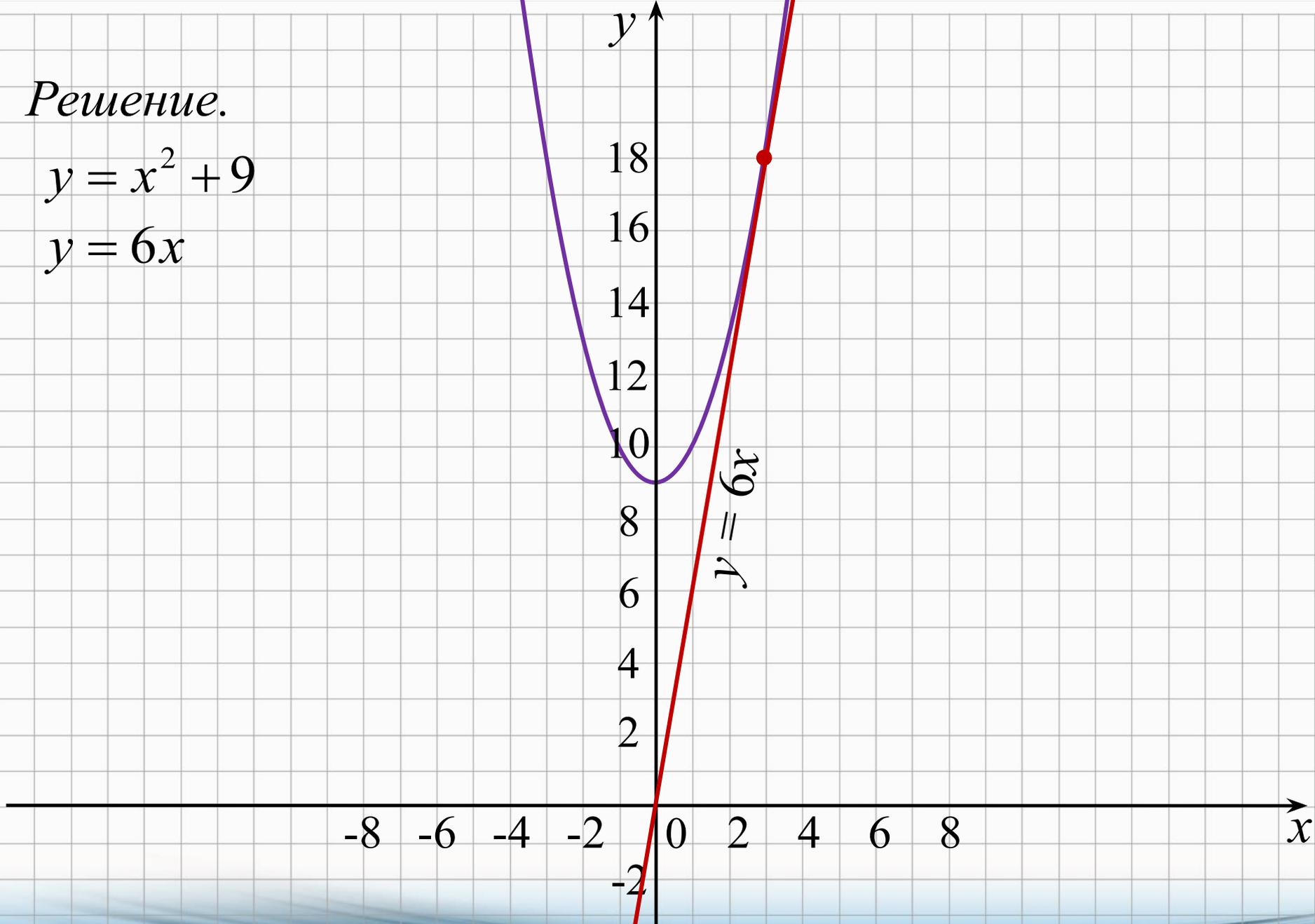
$$D = 36 - 4p$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow 36 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 9.$$

Решение.

$$y = x^2 + 9$$

$$y = 6x$$



Ответ: $p = 9$.

11. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$$
$$\frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1} = \frac{x(x + 1)|x|}{x + 1} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

при условии $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

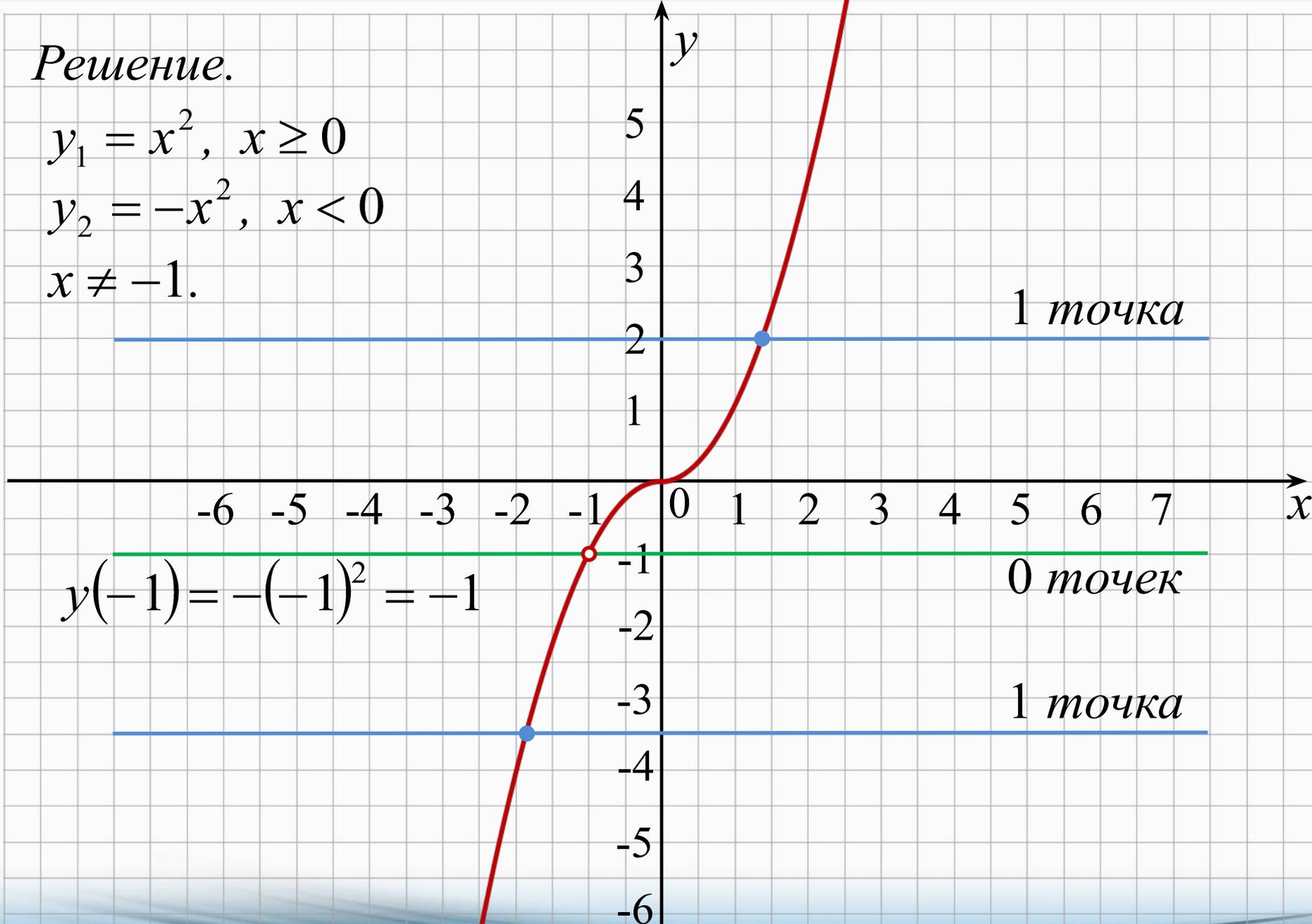
$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Решение.

$$y_1 = x^2, \quad x \geq 0$$

$$y_2 = -x^2, \quad x < 0$$

$$x \neq -1.$$



1 точка

$$y(-1) = -(-1)^2 = -1$$

0 точек

1 точка

Ответ: $m = -1$.

12. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2}$ и определите, при каких значениях t прямая $\frac{x-2}{y} = t$

не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2}$$

$$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$

$$\frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2} = \frac{x(x - 2)|x|}{x - 2} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

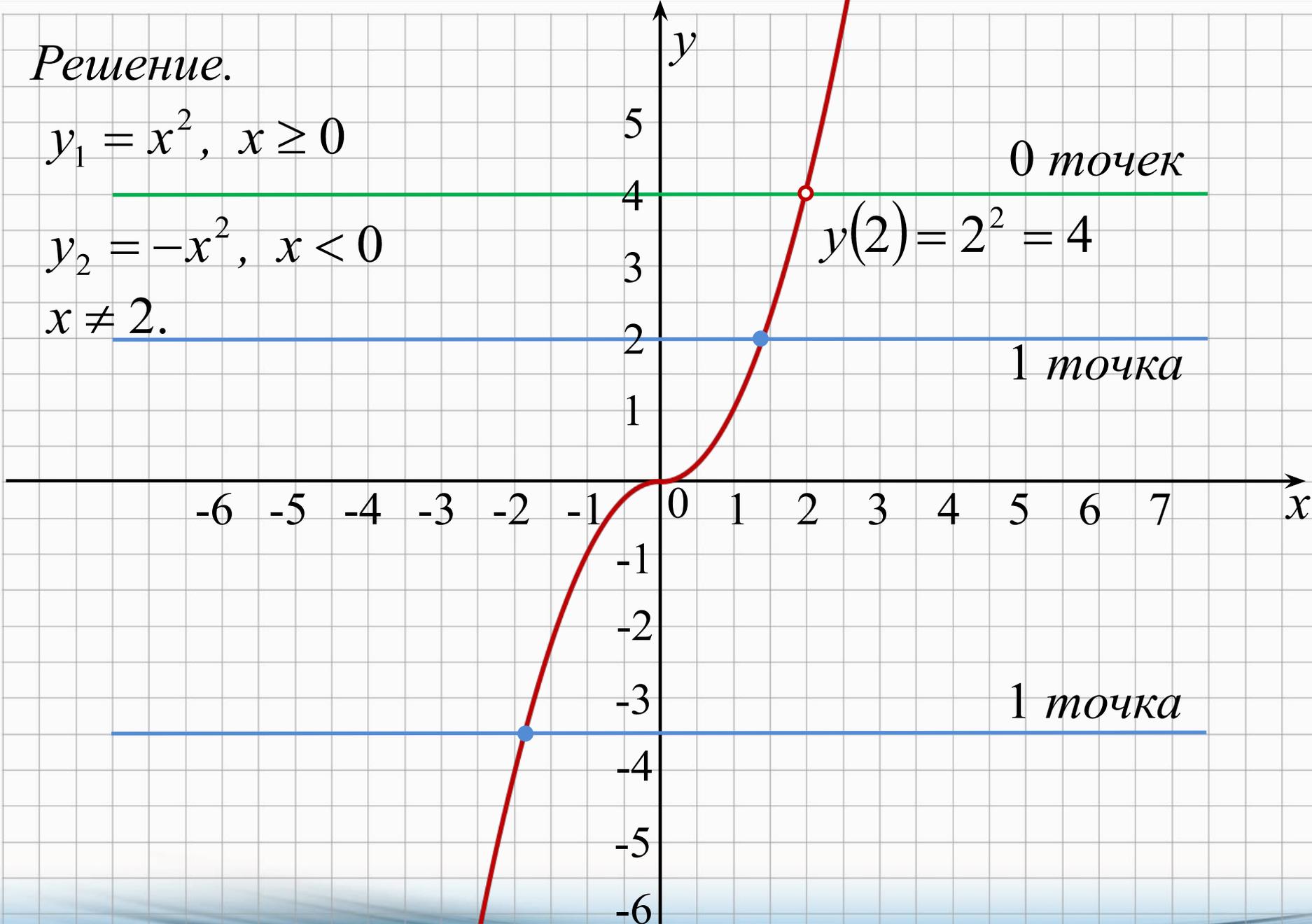
$$\text{при условии } x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Решение.

$$y_1 = x^2, \quad x \geq 0$$

$$y_2 = -x^2, \quad x < 0$$

$$x \neq 2.$$



Ответ: $m = 4$.

13. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{если } x \geq -1, \\ x + 6, & \text{если } x < -1 \end{cases}$
и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{если } x \geq -1, \\ x + 6, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x$$

$$y_2 = x + 6$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

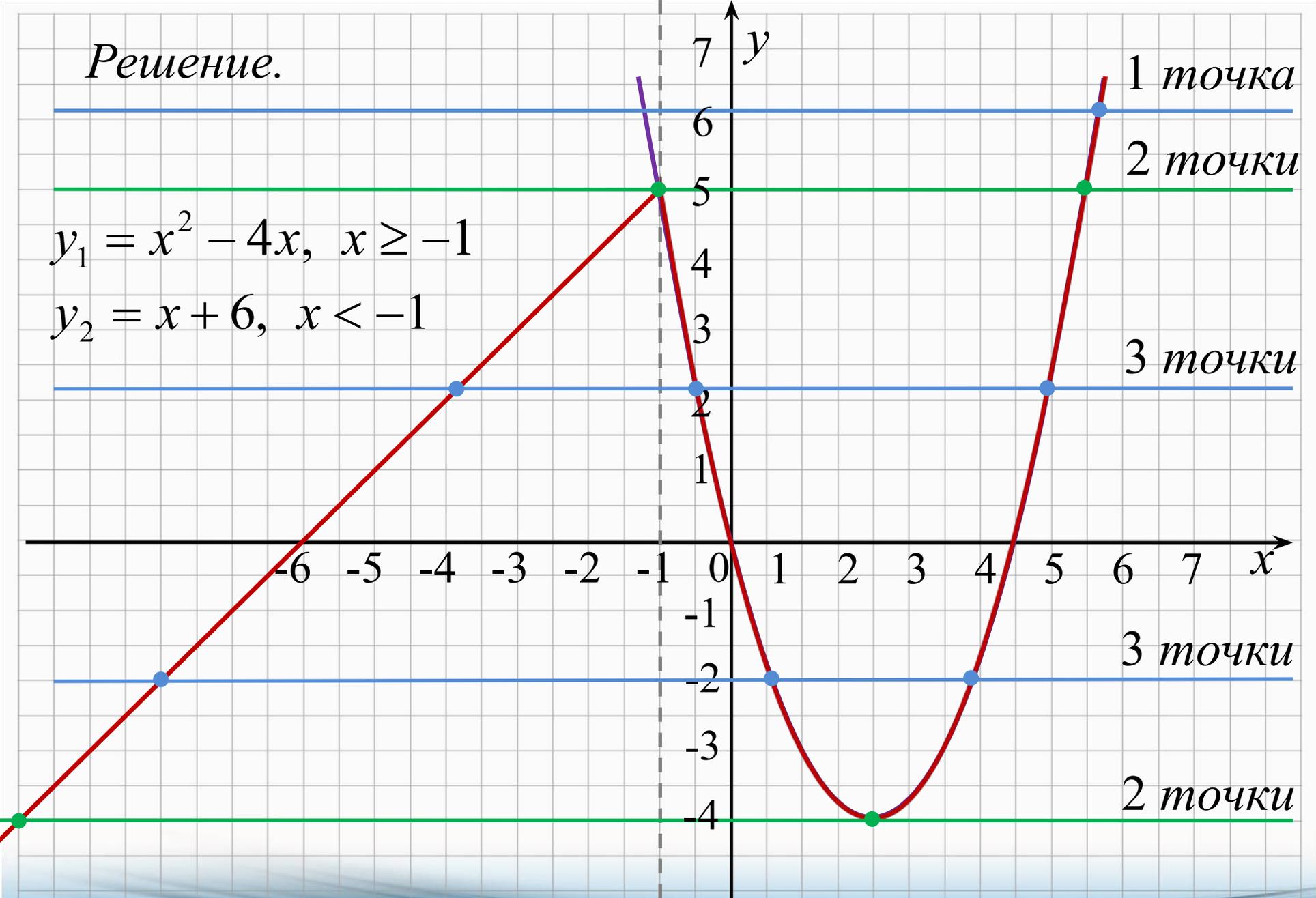
$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

| | | |
|-----|----|----|
| x | -2 | -6 |
| y | 4 | 0 |

Решение.

$$y_1 = x^2 - 4x, \quad x \geq -1$$

$$y_2 = x + 6, \quad x < -1$$



Ответ: $m = 5$; $m = -4$.

14. Постройте график функции $y = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \geq -1, \\ -x - 8, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \geq -1, \\ -x - 8, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$y_1 = 6x - x^2$$

$$y_2 = -x - 8$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3;$$

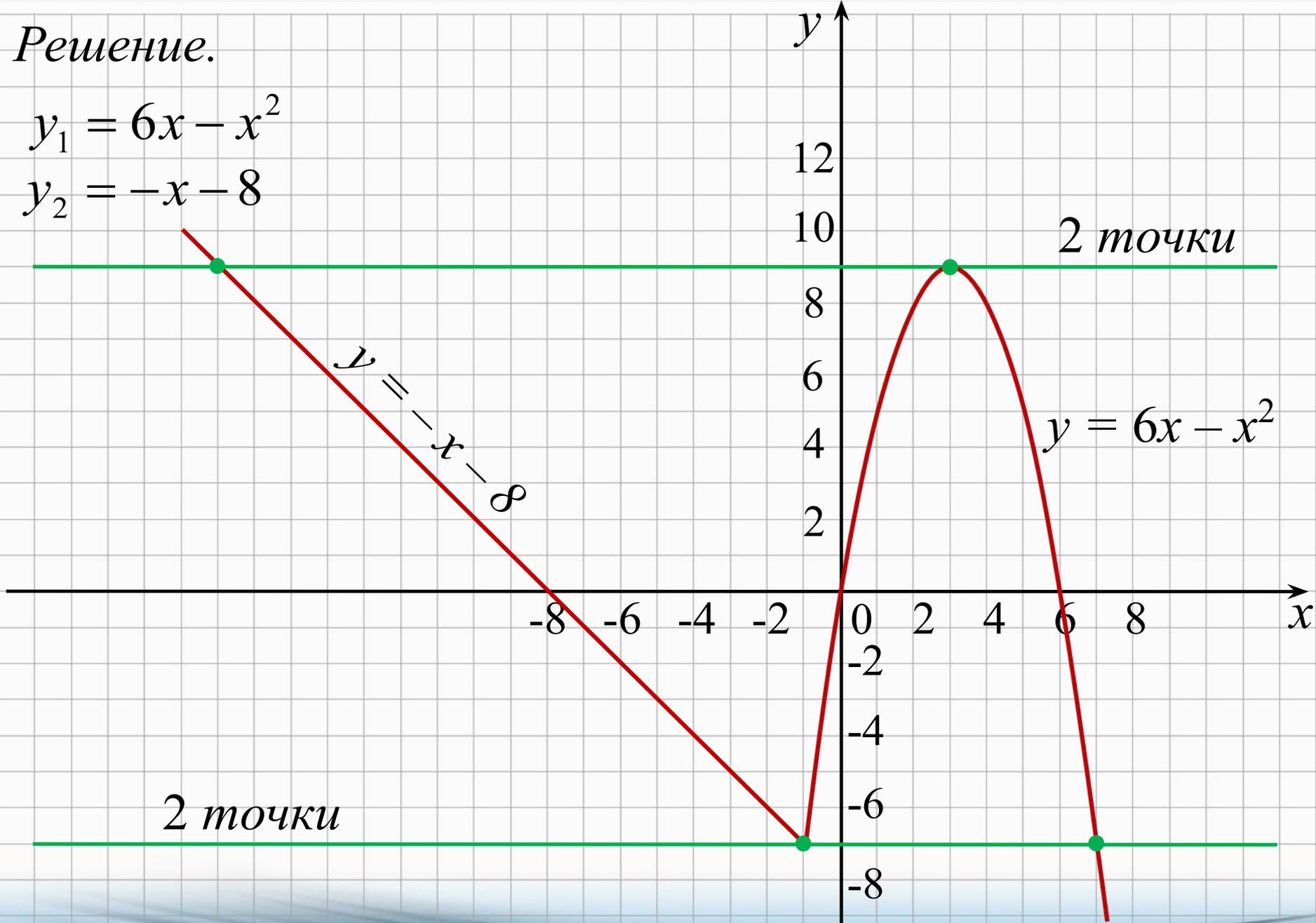
| | | |
|-----|----|----|
| x | -2 | -8 |
| y | -6 | 0 |

$$y_0 = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9.$$

Решение.

$$y_1 = 6x - x^2$$

$$y_2 = -x - 8$$



Ответ: $m = 9$; $m = -7$.

15. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{1 - x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{1 - x} \quad D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$\frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{1 - x} = \frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{-(x - 1)} = -x^2 - 9$$

при условии $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 9, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = -x^2 - 9, \\ y = kx; \end{cases}$$

$$kx = -x^2 - 9$$

$$x^2 + kx + 9 = 0$$

$$D = k^2 - 36$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 6;$$

$$\text{и при } x = 1, y = -1 - 9 = -10 \Rightarrow -10 = k \cdot 1 \Rightarrow k = -10.$$

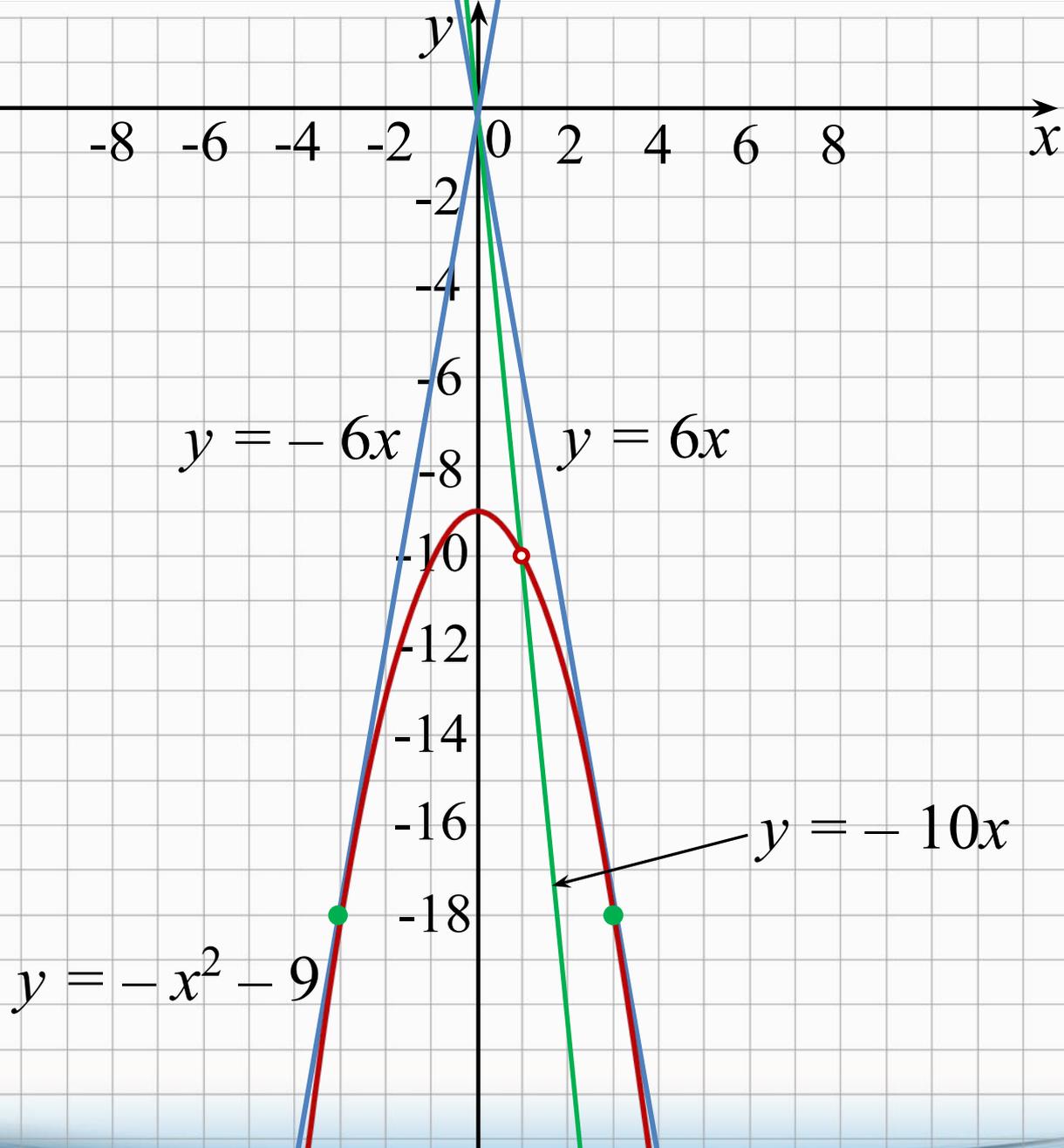
Решение.

$$y_1 = -x^2 - 9$$

$$y_2 = -6x$$

$$y_3 = 6x$$

$$y_4 = -10x$$



Ответ: $k = 6$; $k = -6$; $k = -10$.

16.1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < -1, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < -1, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$

| | | |
|-----|----|----|
| x | -2 | -3 |
| y | -5 | -6 |

| | | |
|-----|---|------|
| x | 3 | 4 |
| y | 0 | -1,5 |

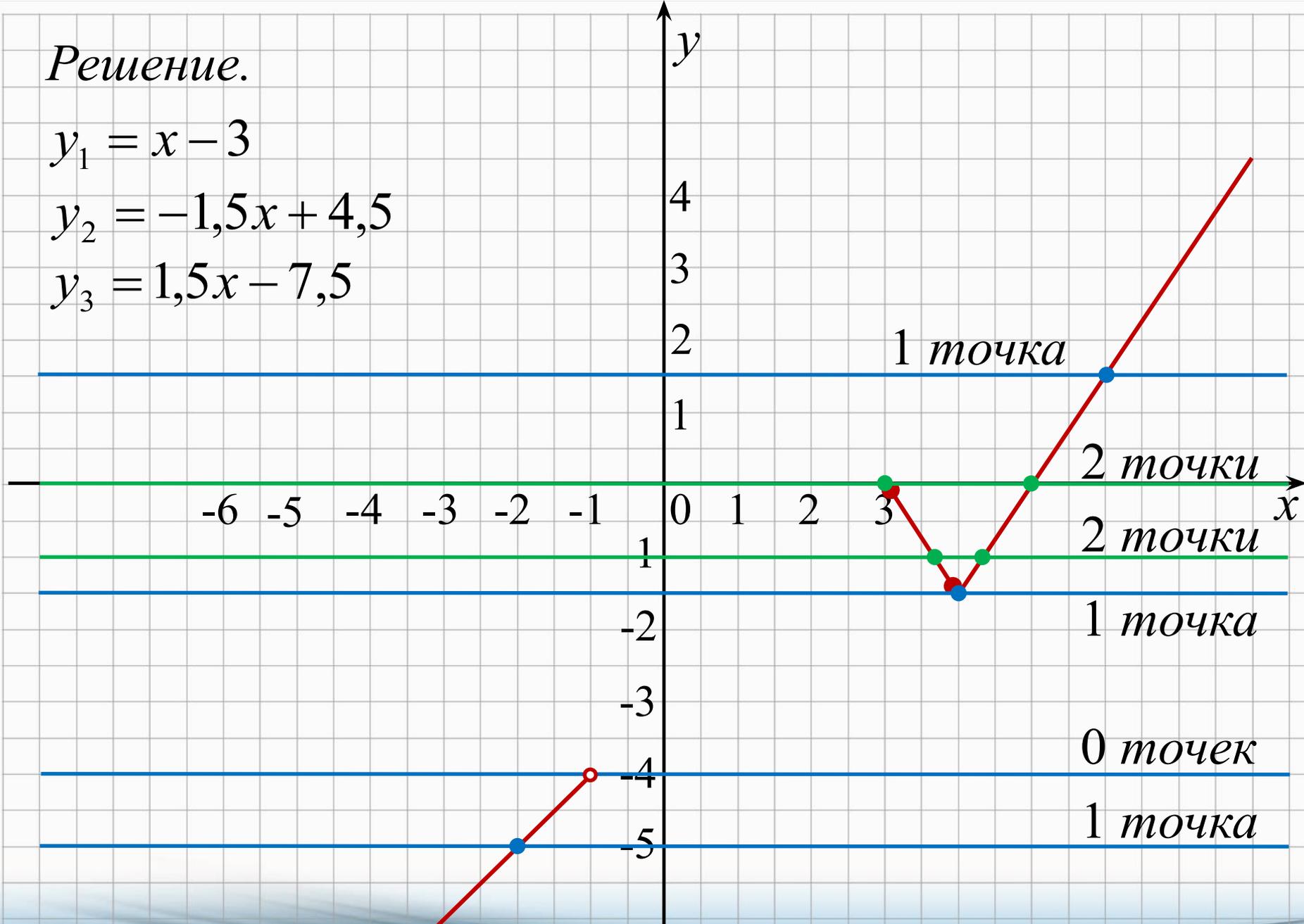
| | | |
|-----|---|---|
| x | 5 | 7 |
| y | 0 | 3 |

Решение.

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$



Ответ: $-1,5 < m \leq 0$.

16.2. Постройте график функции $y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < 3, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < 3, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$

| | | |
|-----|----|----|
| x | 2 | -3 |
| y | -1 | -6 |

| | | |
|-----|---|------|
| x | 3 | 4 |
| y | 0 | -1,5 |

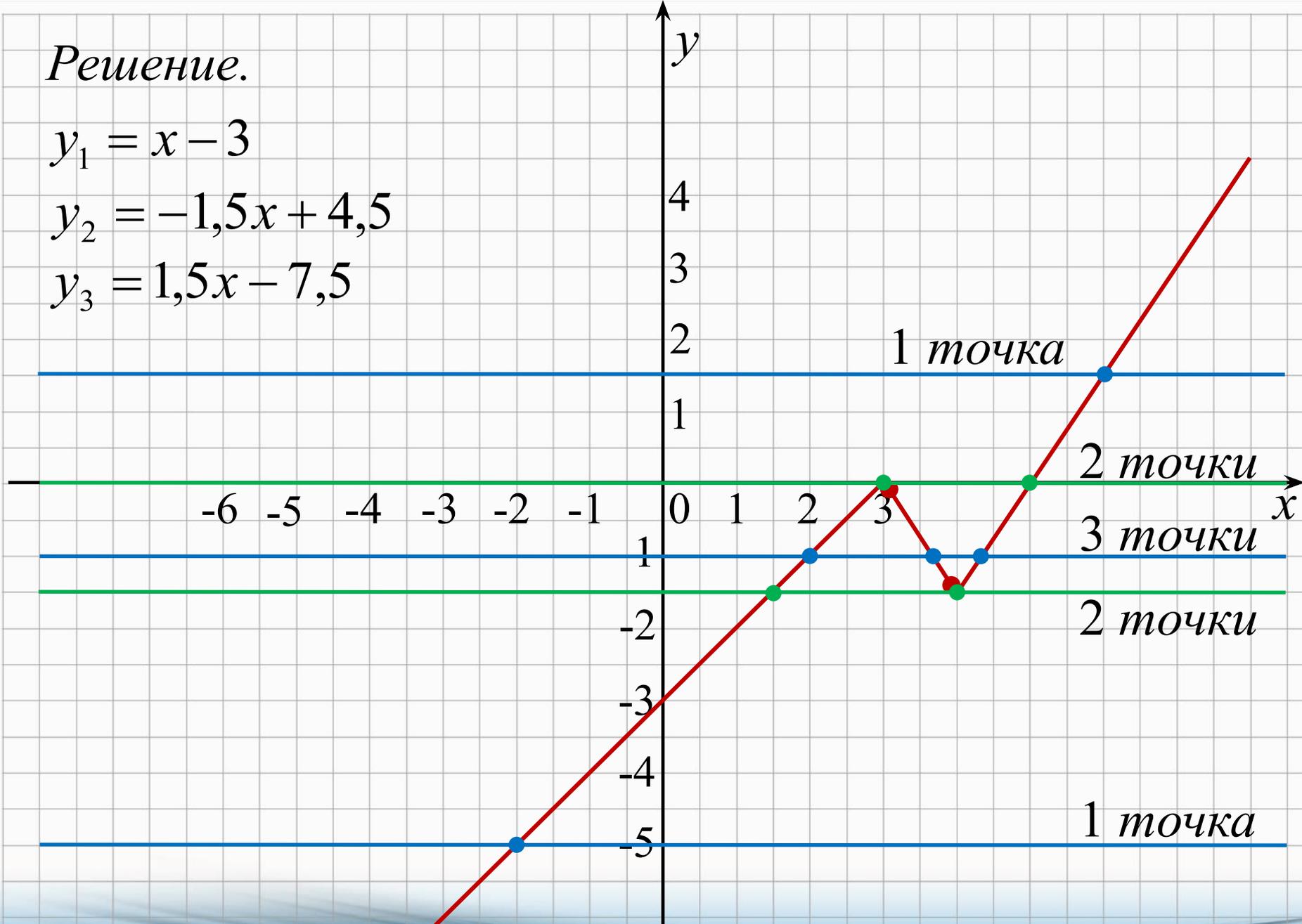
| | | |
|-----|---|---|
| x | 5 | 7 |
| y | 0 | 3 |

Решение.

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$



Ответ: $m = -1,5$; $m = 0$.

Использованы ресурсы

- <http://www.mathgia.ru/or/gia12/Main.html> - открытый банк заданий ОГЭ по математике

Продолжение следует!