Интерполирование с кратными узлами

Пусть на промежутке $[a,b]\subset D(f)$ функция задана таблично, а также известны некоторые её производные. Узлы, в которых заданы производные (любого порядка), называются <u>кратными узлами</u>

$$x_0,\ f_0,\ f_0',\ f_0'',\ \ldots,\ f_0^{(m_0-1)} \rightarrow m_0 \text{ – кратность } x_0$$

$$x_1,\ f_1,\ f_1',\ f_1'',\ \ldots,\ f_1^{(m_1-1)} \rightarrow m_1 \text{ – кратность } x_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_n,\ f_n,\ f_n',\ f_n'',\ \ldots,\ f_n^{(m_n-1)} \rightarrow m_n \text{ – кратность } x_n$$

$$s = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

Найти многочлен $Q(x)$ степени $s-1$, такой, что:

$$Q(x_0)=f(x_0),\quad Q'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots\ ,Q^{(m_0-1)}(x_0)=f^{(m_0-1)}(x_0),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$Q(x_n)=f(x_n),\ Q'(x_n)=f'(x_n),\ldots\ ,Q^{(m_n-1)}(x_n)=f^{(m_n-1)}(x_n).$$

Многочлен Эрмита

Утверждение. Многочлен $Q_{s-1}(x)$, удовлетворяющий условиям эрмитовой интерполяции, существует и он единственный.

Доказательство.

1) Единственность (от противного).

Пусть существует ещё один многочлен $\widetilde{Q}_{s-1}(x)$, удовлетворяющий условиям задачи. Найдём их разность.

$Q_{s-1}(x)-\widetilde{Q}_{s-1}(x)$ − многочлен степени $s-1$ или ниже $\Rightarrow$

Имеет s коней (с учётом их кратностей), т.к.

$$Q(x_0)-\widetilde{Q}(x_0)=0=Q'(x_0)-\widetilde{Q}'(x_0)=\dots=Q^{(m_0-1)}(x_0)-\widetilde{Q}^{(m_0-1)}(x_0)$$

$$\vdots$$

$$Q(x_n)-\widetilde{Q}(x_n)=0$$

$$m_0+m_1+m_2+\dots+m_n=s$$

Но многочлен степени $s-1$ не может иметь более $s-1$ корней, следовательно $Q_{s-1}(x)-\widetilde{Q}_{s-1}(x)\equiv 0$, т.е. многочлены совпадают.

2) Существование.

Будем строить алгоритм нахождения многочлена $Q(x)$. Что и будет доказательством его существования.

Будем искать многочлен, проходящий через s узлов.

Введём узлы $x_{ij}^{\varepsilon} = x_i + (j-1)\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$,

$i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m_i}$, и $x_{ij}^{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} x_i$

При достаточно малом ε все x_{ij}^{ε} различны.

Строим таблицу разделённых разностей

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{01}^{\varepsilon} & f\left(x_{01}^{\varepsilon}\right) & f\left(x_{01}^{\varepsilon}, x_{02}^{\varepsilon}\right) & f\left(x_{01}^{\varepsilon}, x_{02}^{\varepsilon}, x_{03}^{\varepsilon}\right) & \cdots & f\left(x_{01}^{\varepsilon}, \cdots, x_{nm_n}^{\varepsilon}\right) \\
x_{02}^{\varepsilon} & f\left(x_{02}^{\varepsilon}\right) & f\left(x_{02}^{\varepsilon}, x_{03}^{\varepsilon}\right) & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
x_{0m_0}^{\varepsilon} & f\left(x_{0m_0}^{\varepsilon}\right) & f\left(x_{0m_0}^{\varepsilon}, x_{11}^{\varepsilon}\right) & & & \\
x_{11}^{\varepsilon} & f\left(x_{11}^{\varepsilon}\right) & f\left(x_{11}^{\varepsilon}, x_{12}^{\varepsilon}\right) & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
x_{nm_n}^{\varepsilon} & f\left(x_{nm_n}^{\varepsilon}\right) & & & &
\end{array}
$$

Выпишем многочлен Ньютона

$$Q_{s-1}^{\varepsilon}(x)=f\left(x_{01}^{\varepsilon}\right)+f\left(x_{01}^{\varepsilon},x_{02}^{\varepsilon}\right)\left(x-x_{01}^{\varepsilon}\right)+$$

$$+f\left(x_{01}^{\varepsilon},x_{02}^{\varepsilon},x_{03}^{\varepsilon}\right)\left(x-x_{01}^{\varepsilon}\right)\left(x-x_{02}^{\varepsilon}\right)+$$

$$+\ldots+f\left(x_{01}^{\varepsilon},x_{02}^{\varepsilon},\ldots,x_{ij}^{\varepsilon},\ldots,x_{nm_n}^{\varepsilon}\right)\left(x-x_{01}^{\varepsilon}\right)\ldots\left(x-x_{ij}^{\varepsilon}\right)\ldots\left(x-x_{nm_n-1}^{\varepsilon}\right)$$

$$f\left(x_{pl}^{\varepsilon},\ldots,x_{kt}^{\varepsilon}\right)=\frac{f\left(x_{pl+1}^{\varepsilon},\ldots,x_{kt}^{\varepsilon}\right)}{x_{kt}^{\varepsilon}-x_{pl}^{\varepsilon}}\qquad \text{при}\qquad p\neq k$$

Выразим разделённые разности через производные

Когда $(p=k)\quad\Rightarrow\quad f\left(x_{pl}^{\varepsilon},\ldots,x_{kt}^{\varepsilon}\right)=\dfrac{f^{(t-l)}(x_i)}{(t-l)!}$

т.е. $f\left(\underbrace{x_i,\ldots,x_i}_{p+1,\,\varepsilon\to 0}\right)=\dfrac{f^{(p)}(x_i)}{p!}$

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$ получим:

$$Q_{s-1}(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{f(x_0,x_0)}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{f(x_0,x_0,x_0)}(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$+ f(x_0, \dots, x_n)(x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_n)^{m_n - 1}$$

Пример. Сведения о некоторой функции $y = f(x)$ представлены следующей дискретной информацией:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	-1	0	-2	
1	0	1	0	-4
2	1	0	2	

Рассчитаем кратности узлов

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -1 \rightarrow m_0 = 2 \\ x_1 &= 0 \rightarrow m_1 = 3 \\ x_2 &= 1 \rightarrow m_2 = 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \qquad s = 2 + 3 + 2 = 7$$

Следует строить многочлен степени $s = 7 - 1 = 6$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i) = f(x_i, x_{i+1})$	$\frac{f''(x_i)}{2} = f(\overline{x_i, x_{i+2}})$	$f(\overline{x_i, x_{i+3}})$	$f(\overline{x_i, x_{i+4}})$	$f(\overline{x_i, x_{i+5}})$	$f(\overline{x_i, x_{i+6}})$
0	-1	0	-2	$\frac{1+2}{0+1} = 3$	-4	3	-1	1
1	-1	0	$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$	$\frac{0-1}{0+1} = -1$	-1	1	1	
2	0	1	0	$\frac{-4}{2} = -2$	1	3		
3	0	1	0	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	4			
4	0	1	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{2+1}{1-0} = 3$				
5	1	0	2					
6	1	0						

$$Q(x) = 0 - 2(x+1) + 3(x+1)^2 - 4(x+1)^2(x-0) + 3(x+1)^2 x^2 -$$

$$-1 \cdot (x+1)^2 x^3 + 1 \cdot (x+1)^2 x^3 (x-1) = x^6 - 2x^2 + 1$$

Для $(s+1)$−кратно дифференцируемой функции $f(x)$ остаточный член интерполяционного многочлена имеет вид

$$|R_s(x)| = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_n)^{m_n}$$

$$\xi \in [x_0, x_n]$$

Если все узлы простые (однократные), то многочлен Эрмита есть многочлен Лагранжа: $Q_{s-1}(x) \equiv L_n(x)$

Если вся информация об $f(x)$ сосредоточена в одном узле x_i, то есть x_i узел кратности $n+1$, то многочлен Эрмита это просто многочлен Тейлора с остаточным членом

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_i)^{n+1}$$

Сплайн – интерполяция

Кубический сплайн

Сплайн – некоторая математическая модель гибкого тонкого стержня из упругого материала.

Определение. Сплайном $S_m(x)$ называется определённая на отрезке $[a, b]$ функция l раз непрерывно дифференцируемая $\left(S_m(x) \in C^l[a, b]\right)$, такая, что на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – это многочлен m-й степени. Разность между степенью сплайна m и показателем его гладкости l называется *дефектом* сплайна $(d = m - l)$

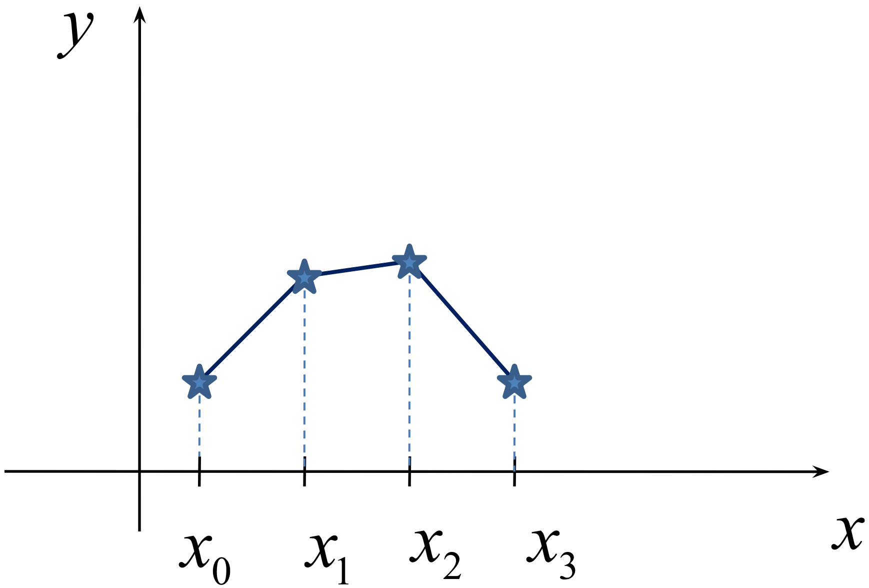
Прикладное применение.

Задача проведения гладкой кривой через точки, произвольным образом лежащие на плоскости, имеет прикладное применение. Допустим, имеется передвижная лаборатория, установленная на автомобиле, которая двигается по дороге и записывает свои географические координаты на жесткий диск бортового компьютера через определенные интервалы времени.

Лаборатория вычисляет координаты по данным, получаемым со спутников GPS (*Global Positioning System* − глобальной системы позиционирования) и инерциальной навигационной системы. Координаты записываются как во время движения лаборатории, так и в моменты её временных остановок. Требуется получить траекторию движения лаборатории, проведя гладкую интерполяционную кривую через точки, записанные во время проведения заезда. Траектория должна не иметь изломов в местах остановки лаборатории, когда точки траектории имеют одинаковые координаты. Эта задача решается с использованием кубических сплайнов с неравномерным сеточным разбиением параметра t.

Примеры сплайнов:

Кусочно-линейная функция



$$S_1(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2 x + b_2, & x \in [x_1, x_2] \\ a_3 x + b_3, & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

Степень сплайна – 1, дефект – 1.

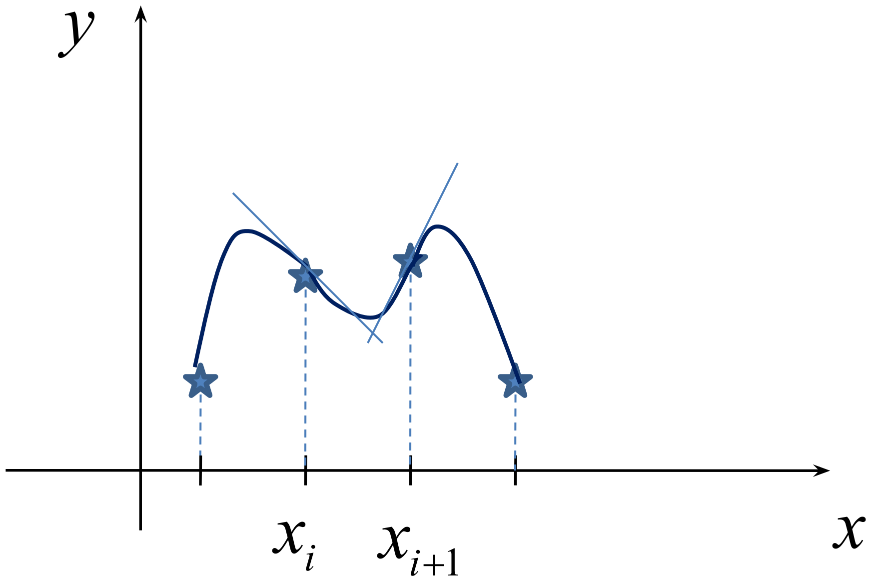
Определение. Кубический сплайн дефекта 1, интерполирующий функцию $f(x)$ есть функция

$$S(x) = \left\{ S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \right.$$

$$\left. x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}_{k=1}^{n} \qquad (d = m - l)$$

удовлетворяющая совокупности условий:

1. $S(x_k) = f_k$
2. $S(x_k) \in C^2[a, b]$
3. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$



В узловых точках сплайн имеет непрерывную первую производную, т.е наклон сплайна а точке x_i равен значению производной в этой точке.

Дано:

$$\begin{array}{cccccc} x_0 < & x_1 < & x_2 < & \ldots & < & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \ldots & & f_n \\ f_0' & f_1' & f_2' & \ldots & & f_n' \end{array}$$

Найти сплайн

Рассмотрим отрезок $\left[x_i\,,\,x_{i+1}\right]$

Вывод: строим интерполяционный многочлен с кратными узлами

$$\left.\begin{array}{l} x_i \ \ -\text{кратность } 2 \\ x_{i+1} -\text{кратность } 2 \end{array}\right| \Rightarrow \quad 2+2-1=s \ -\text{степень многочлена}$$

Составим таблицу разделённых разностей

$$
\begin{array}{llll}
x_i & f_i & f_i' & \dfrac{f_{i+1}-f_i}{\left(x_{i+1}-x_i\right)^2}-\dfrac{f_i'}{x_{i+1}-x_i} \\[2ex]
x_i & f_i & \dfrac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} & \dfrac{f_{i+1}'\left(x_{i+1}-x_i\right)-\left(f_{i+1}-f_i\right)}{\left(x_{i+1}-x_i\right)^2} \\[2ex]
x_{i+1} & f_{i+1} & f_{i+1}' & \\[2ex]
x_{i+1} & f_{i+1} & &
\end{array}
$$

$$\frac{f_{i+1}'\left(x_{i+1}-x_i\right)-2\left(f_{i+1}-f_i\right)+f_i'\left(x_{i+1}-x_i\right)}{\left(x_{i+1}-x_i\right)^3}$$

$$S_3(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{(f_{i+1} - f_i) - f_i'(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}(x - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{f_{i+1}'(x_{i+1} - x_i) - 2(f_{i+1} - f_i) + f_i'(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3}(x - x_{i+1})^2(x - x_i)$$

Если неизвестны наклоны сплайна (т.е. значения производной в узлах), вычисляют их примерное значение по формулам численного дифференцирования.

Пример

Функция задана в виде таблицы

x_i	1	2	3	4
f_i	0,5	-1	-0,5	5

$$S_3(x)=\begin{cases} 2{,}000-0{,}923\,x-0{,}866\,x^2+0{,}289\,x^3, & x<2 \\ -0{,}149+2{,}300\,x-2{,}477\,x^2+0{,}557\,x^3, & x<3 \\ 1{,}859+0{,}293\,x-1{,}808\,x^2+0{,}483\,x^3, & x<4 \end{cases}$$