*Носков Владимир Петрович, Киселев Иван Олегович*

# Использование кватернионов в решении задачи навигации в трехмерном пространстве при помощи выделенных линейных объектов

г. Москва, 2019 г.

# Определение и обозначение

**Кватернион** - система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел. Обычно обозначаются символом $\mathbb{H}$. Предложены Уильямом Гамильтоном в 1843 году.

**Стандартное**

$q = a + bi + cj + dk$

$a, b, c, d$ – вещественные числа;

$i, j, k$ – мнимые единицы, такие что $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, при этом результат попарного произведения зависит от порядка следования (не является коммутативным):

$ij = k, ji = -k$

**Векторное** $(a,\overline{u})$ $\overline{u}$

Кватернион представляет собой пару , где - вектор трехмерного пространства, а $a$ – скаляр.

# Операции над кватернионами

## Сложение

$$(a,\bar{u})+(b,\bar{v})=(a+b,\bar{u}+\bar{v})$$

## Перемножение

$$(a,\bar{u})(b,\bar{v})=(ab-\bar{u}\cdot\bar{v},\bar{u}\times\bar{v}+a\bar{v}+b\bar{u})$$

$\bar{u}\cdot\bar{v}$ – скалярное произведение

$\bar{u}\times\bar{v}$ – векторное произведение

**НЕ КОММУТАТИВНО!!!**

## Норма

$$norm((a,\bar{u}))=\left\|(a,\bar{u})\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

## Вычитание

$$(a,\bar{u})-(b,\bar{v})=(a-b,\bar{u}-\bar{v})$$

## Сопряжение

$$(a,\bar{u})^*=(a,-\bar{u})$$

## Обратный кватернион

$$(a,\bar{u})^{-1}=\frac{(a,\bar{u})^*}{\left\|(a,\bar{u})\right\|^2}$$

# Получение кватерниона

Необходимо совершить вращение на угол $\lambda$ вокруг оси, заданной направляющим единичным вектором $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Это вращение можно задать кватернионом

$$q = [\cos(\frac{\lambda}{2}), \bar{v}\sin(\frac{\lambda}{2})]$$

Вычисление матрицы поворота вокруг произвольной оси в пространстве:

$$M(\bar{v},\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda + v_x^2(1-\cos\lambda) & v_x v_y(1-\cos\lambda) - v_z\sin\lambda & v_x v_z(1-\cos\lambda) + v_y\sin\lambda \\ v_x v_y(1-\cos\lambda) + v_z\sin\lambda & \cos\lambda + v_y^2(1-\cos\lambda) & v_y v_z(1-\cos\lambda) - v_x\sin\lambda \\ v_x v_z(1-\cos\lambda) - v_y\sin\lambda & v_y v_z(1-\cos\lambda) + v_x\sin\lambda & \cos\lambda + v_z^2(1-\cos\lambda) \end{pmatrix}$$

# Применение кватернионов для вращения в трехмерном пространстве

Кватернионы расширяют концепцию вращения в трехмерном пространстве до вращения в четырехмерном. Вращение можно задать единичным кватернионом (norm(q) = 1). Чтобы кватернион привести к единичному виду, или другими словами нормализовать, необходимо вычислить его размер norm(q) и все четыре члена кватерниона разделить на величину полученного размера.

Если вращение задано некоторым кватернионом $q$

$$q=(a,\bar{u}),$$

то вектор $v$ после вращения будет иметь вид $v'$:

$$\boxed{\bar{v}'=q\bar{v}q^{-1}}$$

В случае, когда последовательно происходит вращение через несколько кватернионов, итоговый кватернион вращения можно записать как произведение нескольких:

$$\boxed{Q=q_2q_1}$$

Сначала происходит вращение с помощью кватерниона $q_1$, затем с помощью кватерниона $q_2$.

# Преобразование кватернионов в углы Эйлера

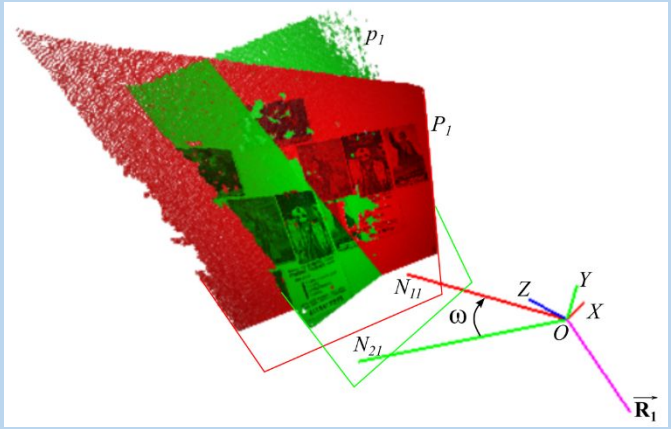
Если вам известен кватернион $Q=[Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]$, с помощью которого производилось вращение объекта в пространстве, то вычисление углов Эйлера осуществляется по следующему алгоритму:

Крен: $$\psi = \operatorname{atan2}(2(Q_0Q_1 - Q_2Q_3), 1 - 2(Q_1^2 + Q_2^2))$$

Тангаж: $$\theta = \operatorname{asin}(2(Q_0Q_2 - Q_3Q_1))$$

Рысканье: $$\varphi = \operatorname{atan2}(2(Q_0Q_3 - Q_1Q_2), 1 - 2(Q_2^2 + Q_3^2))$$

# Пример




Выделенные плоские объекты $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{P_1}$

$$\overline{q_1} = \left[\frac{\overline{R_1}}{\left|\overline{R_1}\right|}\sin(\frac{\omega}{2}), \cos(\frac{\omega}{2})\right] \quad (1)$$

$$\overline{R_1} = \overline{oN_{21}} \times \overline{ON_{11}}$$

$$\omega = \arccos\left(\frac{\overline{oN_{21}} \cdot \overline{ON_{11}}}{\left|\overline{oN_{21}}\right| * \left|\overline{ON_{11}}\right|}\right)$$

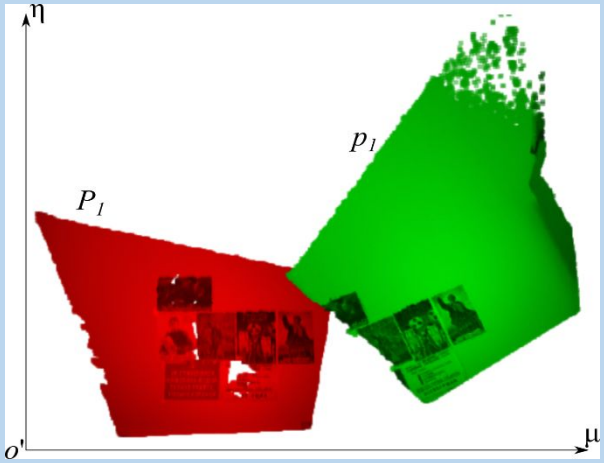
$$\overline{V_{1k}}^{*} = \overline{q_1}\,\overline{V_{1k}}\,\overline{q_1}^{-1} \qquad (\overline{oN_{21}}^{*} = \overline{q_1}\,\overline{oN_{21}}\,\overline{q_1}^{-1}) \quad (2)$$

$$\overline{oN_{21}}^{**} = \overline{q_1}\,\overline{oN_{21}}\,\overline{q_1}^{-1} + (\rho_{11} - \rho)\begin{vmatrix}\cos(\alpha_{11})\\ \cos(\beta_{11})\\ \cos(\gamma_{11})\end{vmatrix} \quad (3)$$

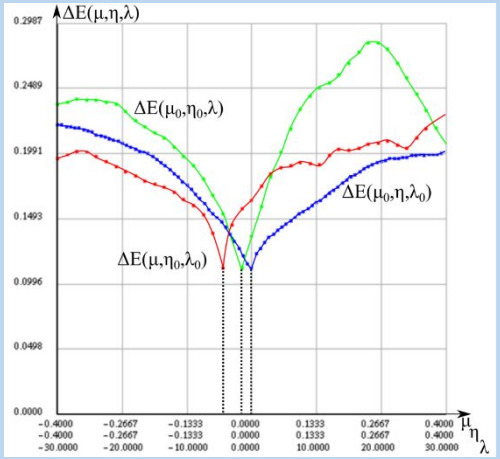
$$\overline{q_2} = \left[\frac{\overline{R_2}}{\left|\overline{R_2}\right|}\sin(\frac{\omega_2}{2}), \cos(\frac{\omega_2}{2})\right] \quad (4)$$

$$\overline{R_2} = \overline{ON_{11}} \times \overline{OY}$$

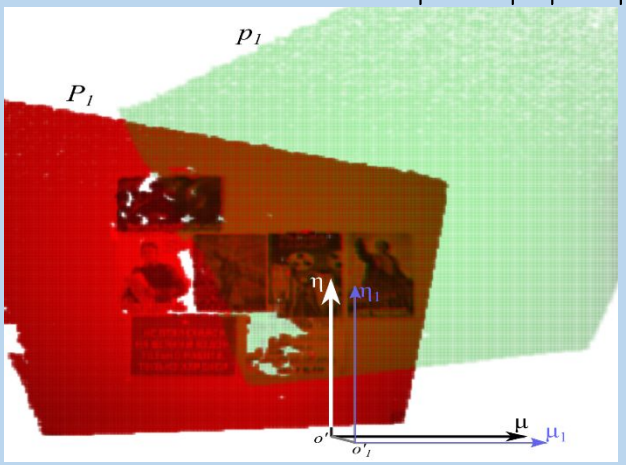
$$\omega_2 = \arccos\left(\frac{\overline{ON_{11}} \cdot \overline{OY}}{\left|\overline{ON_{11}}\right| * \left|\overline{OY}\right|}\right)$$




Текстура в $\boldsymbol{p_1}$, приведенная к $\boldsymbol{P_1}$

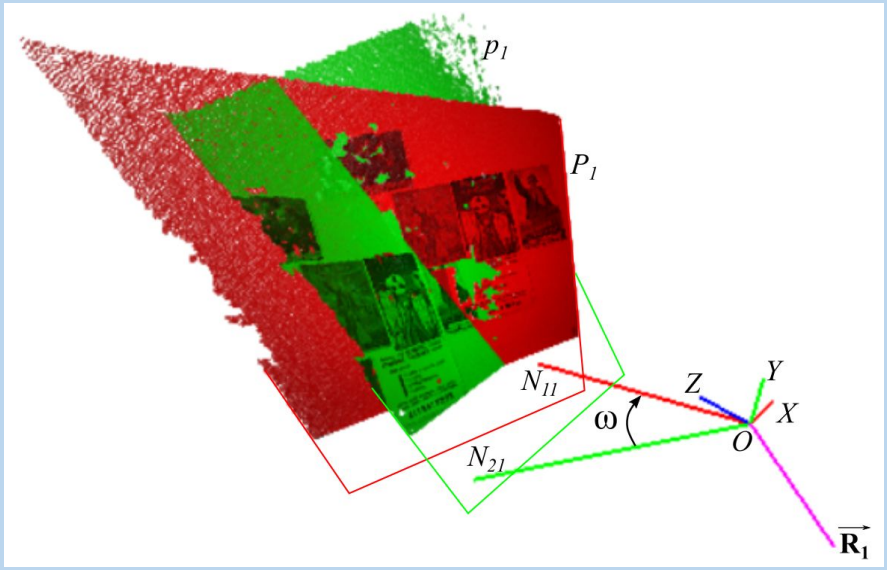



Сечения функционала в точке решения

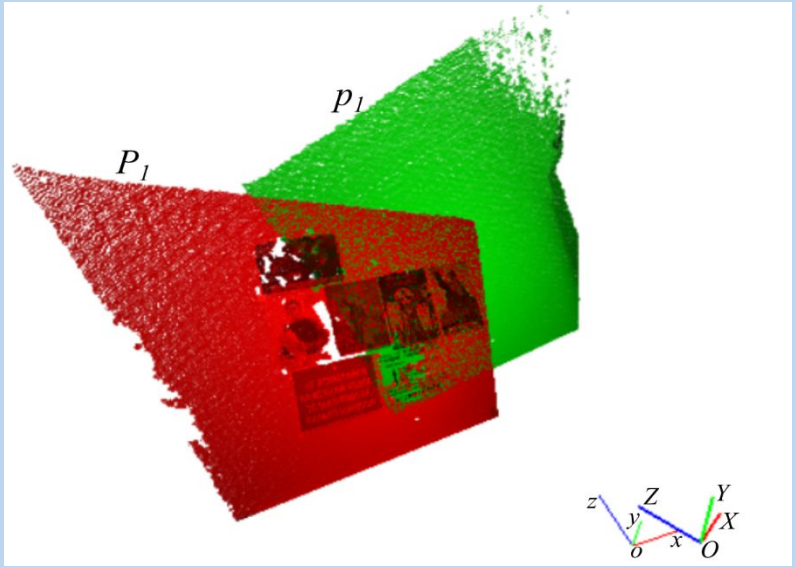



Совмещение текстур плоских объектов $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{p_1}$

# Пример




Выделенные плоские объекты $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{P_1}$




Конечный результат

$$\begin{vmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{vmatrix} = (\rho_{11}-\rho_{21})\begin{vmatrix}\cos(\alpha_{11})\\ \cos(\beta_{11})\\ \cos(\gamma_{11})\end{vmatrix} + \overline{q_2}^{-1}\begin{vmatrix}\mu\\ 0\\ \eta\end{vmatrix}\overline{q_2} \quad (5)$$

$$\overline{q_3} = \left[\frac{\overline{ON_{11}}}{\left|\overline{ON_{11}}\right|}\sin(\frac{\lambda}{2}), \cos(\frac{\lambda}{2})\right] \quad (6)$$

$$\overline{Q} = \left[Q_x, Q_y, Q_z, Q_w\right] = \overline{q_3}\,\overline{q_1} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix}\Delta\theta\\ \Delta\varphi\\ \Delta\psi\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\operatorname{atan}\left(\frac{2Q_yQ_w - 2Q_xQ_z}{1-2Q_y^2-Q_z^2}\right)\\ \operatorname{asin}(2Q_xQ_y - 2Q_zQ_w)\\ \operatorname{atan}\left(\frac{2Q_xQ_w - 2Q_yQ_z}{1-2Q_x^2-Q_z^2}\right)\end{vmatrix} \quad (8)$$

# Спасибо за внимание !

http://wat.gamedev.ru/articles/quaternions

https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B0