

**М Г Т У им. Н.Э. Баумана**



*Носков Владимир Петрович, Киселев Иван Олегович*

# **Использование кватернионов в решении задачи навигации в трехмерном пространстве при помощи выделенных линейных объектов**

г. Москва, 2019 г.



# Определение и обозначение

**Кватернион** - система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел. Обычно обозначаются символом  $\mathbb{H}$ . Предложены Уильямом Гамильтоном в 1843 году.

## Стандартное

$$q = a + bi + cj + dk$$

$a, b, c, d$  – вещественные числа;

$i, j, k$  – мнимые единицы, такие что  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ , при этом результат попарного произведения зависит от порядка следования (не является коммутативным):

$$ij = k, ji = -k$$

## Векторное

Кватернион представляет собой пару  $(a, \bar{u})$ , где  $\bar{u}$  - вектор трехмерного пространства, а  $a$  – скаляр.



# Операции над кватернионами

## Сложение

$$(a, \bar{u}) + (b, \bar{v}) = (a + b, \bar{u} + \bar{v})$$

## Перемножение

$$(a, \bar{u})(b, \bar{v}) = (ab - \bar{u} \cdot \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v} + a\bar{v} + b\bar{u})$$

$\bar{u} \cdot \bar{v}$  – скалярное произведение

$\bar{u} \times \bar{v}$  – векторное произведение

**НЕ**

**КОММУТАТИВНО!!!**

## Норма

$$\text{norm}((a, \bar{u})) = \|(a, \bar{u})\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

## Вычитание

$$(a, \bar{u}) - (b, \bar{v}) = (a - b, \bar{u} - \bar{v})$$

## Сопряжение

$$(a, \bar{u})^* = (a, -\bar{u})$$

## Обратный кватернион

$$(a, \bar{u})^{-1} = \frac{(a, \bar{u})^*}{\|(a, \bar{u})\|^2}$$



# Получение кватерниона

Необходимо совершить вращение на угол  $\lambda$  вокруг оси, заданной направляющим  $v = (v_x, v_y, v_z)$  единичным вектором. Это вращение можно задать кватернионом

$$q = \left[ \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right), \bar{v} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

Вычисление матрицы поворота вокруг произвольной оси в пространстве:

$$M(\bar{v}, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda + v_x^2 (1 - \cos \lambda) & v_x v_y (1 - \cos \lambda) - v_z \sin \lambda & v_x v_z (1 - \cos \lambda) + v_y \sin \lambda \\ v_x v_y (1 - \cos \lambda) + v_z \sin \lambda & \cos \lambda + v_y^2 (1 - \cos \lambda) & v_y v_z (1 - \cos \lambda) - v_x \sin \lambda \\ v_x v_z (1 - \cos \lambda) - v_y \sin \lambda & v_y v_z (1 - \cos \lambda) + v_x \sin \lambda & \cos \lambda + v_z^2 (1 - \cos \lambda) \end{pmatrix}$$



# Применение кватернионов для вращения в трехмерном пространстве

Кватернионы расширяют концепцию вращения в трехмерном пространстве до вращения в четырехмерном. Вращение можно задать единичным кватернионом ( $\text{norm}(q) = 1$ ). Чтобы кватернион привести к единичному виду, или другими словами нормализовать, необходимо вычислить его размер  $\text{norm}(q)$  и все четыре члена кватерниона разделить на величину полученного размера.

Если вращение задано некоторым кватернионом  $q$

$$q = (a, \bar{u}),$$

то вектор  $v$  после вращения будет иметь вид  $v'$ :

$$\bar{v}' = q \bar{v} q^{-1}$$

В случае, когда последовательно происходит вращение через несколько кватернионов, итоговый кватернион вращения можно записать как произведение нескольких:

$$Q = q_2 q_1$$

Сначала происходит вращение с помощью кватерниона  $q_1$ , затем с помощью кватерниона  $q_2$ .



# Преобразование кватернионов в углы Эйлера

Если вам известен кватернион  $Q=[Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]$ , с помощью которого производилось вращение объекта в пространстве, то вычисление углов Эйлера осуществляется по следующему алгоритму:

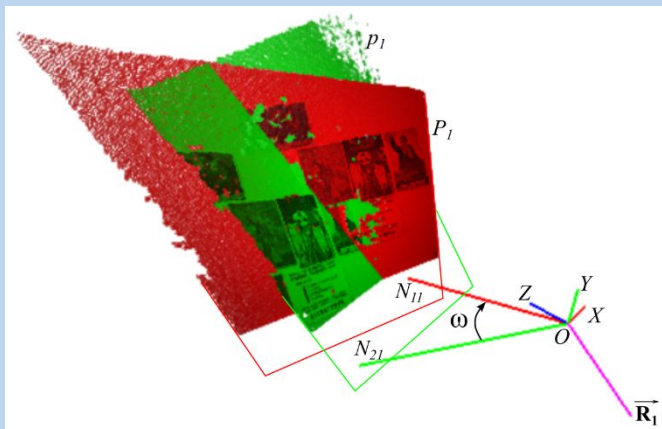
Крен: 
$$\psi = \operatorname{atan} 2(2(Q_0Q_1 - Q_2Q_3), 1 - 2(Q_1^2 + Q_2^2))$$

Тангаж: 
$$\theta = \operatorname{asin}(2(Q_0Q_2 - Q_3Q_1))$$

Рысканье: 
$$\varphi = \operatorname{atan} 2(2(Q_0Q_3 - Q_1Q_2), 1 - 2(Q_2^2 + Q_3^2))$$



# Пример



Выделенные плоские объекты  $p_1$  и  $P_1$

$$\overline{q_1} = \left[ \frac{\overline{R_1}}{|\overline{R_1}|} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \quad (1)$$

$$\overline{V_{1k}}^* = \overline{q_1} \overline{V_{1k}} \overline{q_1}^{-1} \quad (\overline{oN_{21}}^* = \overline{q_1} \overline{oN_{21}} \overline{q_1}^{-1}) \quad (2)$$

$$\overline{oN_{21}}^{**} = \overline{q_1} \overline{oN_{21}} \overline{q_1}^{-1} + (\rho_{11} - \rho) \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{11}) \\ \cos(\beta_{11}) \\ \cos(\gamma_{11}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

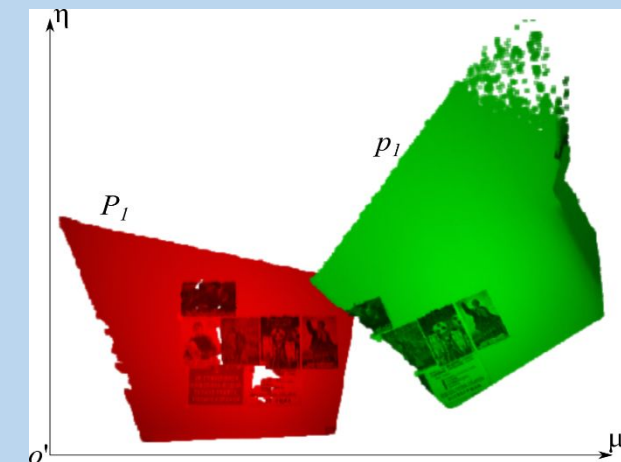
$$\overline{q_2} = \left[ \frac{\overline{R_2}}{|\overline{R_2}|} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right] \quad (4)$$

$$\overline{R_1} = \overline{oN_{21}} \times \overline{ON_{11}}$$

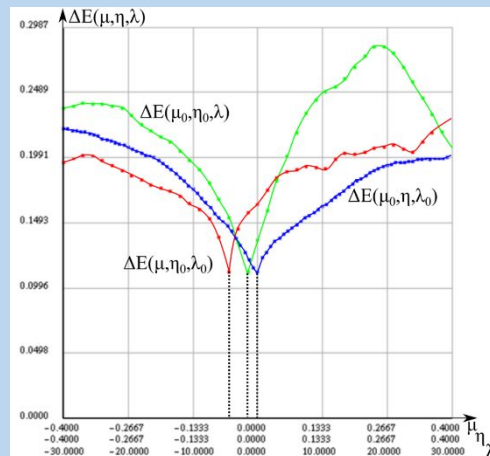
$$\omega = \arccos\left(\frac{\overline{oN_{21}} \cdot \overline{ON_{11}}}{|\overline{oN_{21}}| \cdot |\overline{ON_{11}}|}\right)$$

$$\overline{R_2} = \overline{ON_{11}} \times \overline{OY}$$

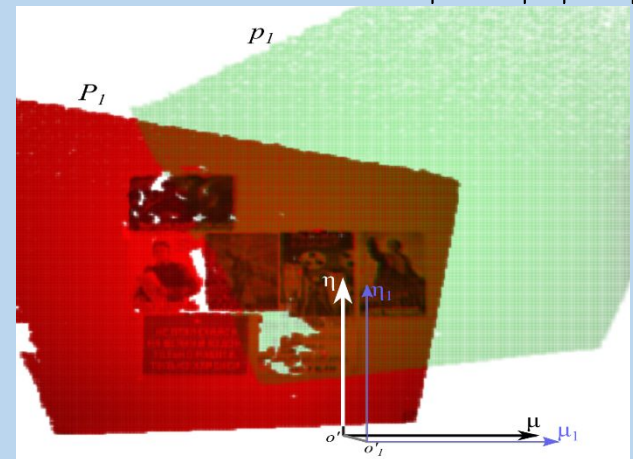
$$\omega_2 = \arccos\left(\frac{\overline{ON_{11}} \cdot \overline{OY}}{|\overline{ON_{11}}| \cdot |\overline{OY}|}\right)$$



Текстура в  $p_p$  приведенная к  $P_1$



Сечения функционала в точке решения

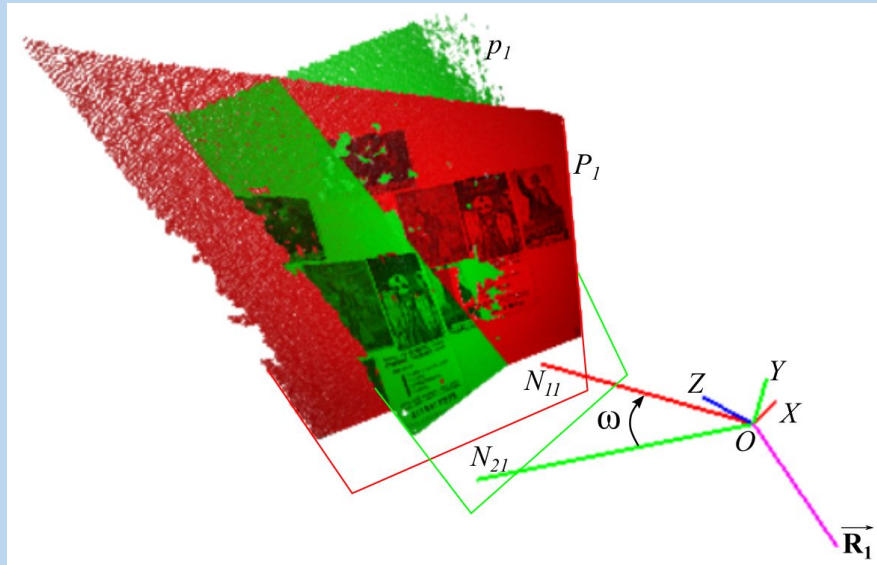


Совмещение текстур плоских объектов  $P_1$  и  $p_1$

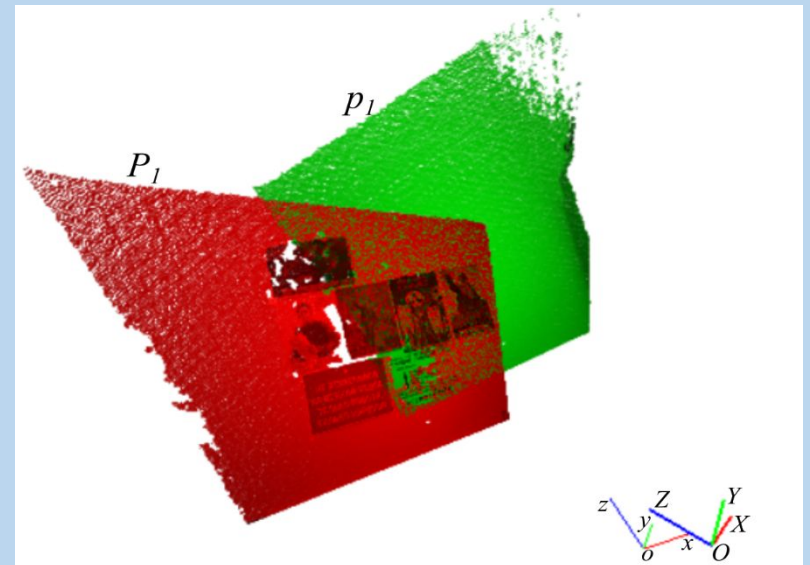




# Пример



Выделенные плоские объекты  $p_1$  и  $P_1$



Конечный результат

$$\begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} = (\rho_{11} - \rho_{21}) \begin{vmatrix} \cos(\alpha_{11}) \\ \cos(\beta_{11}) \\ \cos(\gamma_{11}) \end{vmatrix} + \overline{q_2}^{-1} \begin{vmatrix} \mu \\ 0 \\ \eta \end{vmatrix} \overline{q_2} \quad (5)$$

$$\overline{q_3} = \begin{bmatrix} \overline{ON_{11}} \\ \overline{ON_{11}} \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right), \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (6)$$

$$\overline{Q} = [Q_x, Q_y, Q_z, Q_w] = \overline{q_3} \overline{q_1} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \varphi \\ \Delta \psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{atan} \left( \frac{2Q_y Q_w - 2Q_x Q_z}{1 - 2Q_y^2 - Q_z^2} \right) \\ \operatorname{asin}(2Q_x Q_y - 2Q_z Q_w) \\ \operatorname{atan} \left( \frac{2Q_x Q_w - 2Q_y Q_z}{1 - 2Q_x^2 - Q_z^2} \right) \end{vmatrix} \quad (8)$$





# Спасибо за внимание !

<http://wat.gamedev.ru/articles/quaternions>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion\\_between\\_quaternions\\_and\\_Euler\\_angles](https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_angles](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles)

[https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0\\_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B0](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B0)