Носков Владимир Петрович, Киселев Иван Олегович

Использование кватернионов в решении задачи навигации в трехмерном пространстве при помощи выделенных линейных объектов

г. Москва, 2019 г.

Определение и обозначение

<u>Кватернион</u> - система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел. Обычно обозначаются символом $\mathbb{H}$. Предложены Уильямом Гамильтоном в 1843 году.

Стандартное

$q = a + bi + cj + dk$

a, b, c, d – вещественные числа;

i, j, k – мнимые единицы, такие что $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, при этом результат попарного произведения зависит от порядка следования (<u>не является коммутативным</u>):

$ij = k, ji = -k$

Векторное

Кватернион представляет собой пару $(a,\overline{u})$, где $\overline{u}$ - вектор трехмерного пространства, а a – скаляр.

Операции над кватернионами

Сложение

$$(a,\bar{u})+(b,\bar{v})=(a+b,\bar{u}+\bar{v})$$

Перемножение

$$(a,\bar{u})(b,\bar{v})=(ab-\bar{u}\cdot\bar{v},\bar{u}\times\bar{v}+a\bar{v}+b\bar{u})$$

$\bar{u}\cdot\bar{v}$ – скалярное произведение

$\bar{u}\times\bar{v}$ – векторное произведение

НЕ КОММУТАТИВНО!!!

Норма

$$norm((a,\bar{u}))=\left\|(a,\bar{u})\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Вычитание

$$(a,\bar{u})-(b,\bar{v})=(a-b,\bar{u}-\bar{v})$$

Сопряжение

$$(a,\bar{u})^*=(a,-\bar{u})$$

Обратный кватернион

$$(a,\bar{u})^{-1}=\frac{(a,\bar{u})^*}{\left\|(a,\bar{u})\right\|^2}$$

Получение кватерниона

Необходимо совершить вращение на угол λ вокруг оси, заданной направляющим единичным вектором $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Это вращение можно задать кватернионом

$$q = [\cos(\frac{\lambda}{2}), \bar{v}\sin(\frac{\lambda}{2})]$$

Вычисление матрицы поворота вокруг произвольной оси в пространстве:

$$M(\bar{v}, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda + v_x^2(1-\cos\lambda) & v_x v_y(1-\cos\lambda) - v_z\sin\lambda & v_x v_z(1-\cos\lambda) + v_y\sin\lambda \\ v_x v_y(1-\cos\lambda) + v_z\sin\lambda & \cos\lambda + v_y^2(1-\cos\lambda) & v_y v_z(1-\cos\lambda) - v_x\sin\lambda \\ v_x v_z(1-\cos\lambda) - v_y\sin\lambda & v_y v_z(1-\cos\lambda) + v_x\sin\lambda & \cos\lambda + v_z^2(1-\cos\lambda) \end{pmatrix}$$

Применение кватернионов для вращения в трехмерном пространстве

Кватернионы расширяют концепцию вращения в трехмерном пространстве до вращения в четырехмерном. Вращение можно задать единичным кватернионом (norm(q) = 1). Чтобы кватернион привести к единичному виду, или другими словами нормализовать, необходимо вычислить его размер norm(q) и все четыре члена кватерниона разделить на величину полученного размера.

Если вращение задано некоторым кватернионом q

$$q = (a, \bar{u}),$$

то вектор v после вращения будет иметь вид v':

$$\boxed{\bar{v}' = q\bar{v}q^{-1}}$$

В случае, когда последовательно происходит вращение через несколько кватернионов, итоговый кватернион вращения можно записать как произведение нескольких:

$$\boxed{Q = q_2 q_1}$$

Сначала происходит вращение с помощью кватерниона q_1, затем с помощью кватерниона q_2.

Преобразование кватернионов в углы Эйлера

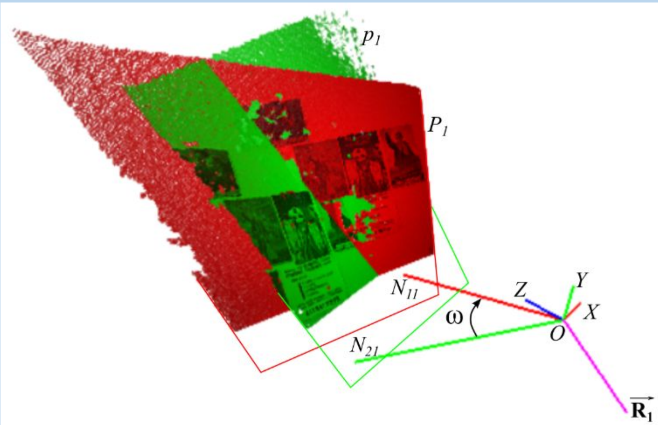
Если вам известен кватернион Q=[Q_1, Q_2, Q_3, Q_4], с помощью которого производилось вращение объекта в пространстве, то вычисление углов Эйлера осуществляется по следующему алгоритму:

Крен: $$\psi = \mathrm{atan}\,2(2(Q_0Q_1 - Q_2Q_3), 1 - 2(Q_1^2 + Q_2^2))$$

Тангаж: $$\theta = \mathrm{asin}(2(Q_0Q_2 - Q_3Q_1))$$

Рысканье: $$\varphi = \mathrm{atan}\,2(2(Q_0Q_3 - Q_1Q_2), 1 - 2(Q_2^2 + Q_3^2))$$

Пример



Выделенные плоские объекты $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{P_1}$

$$\overline{q}_1 = \left[\frac{\overline{R}_1}{\left|\overline{R}_1\right|}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \qquad (1)$$

$$\overline{V}_{1k}^{\,*} = \overline{q_1 V_{1k} q_1^{-1}} \qquad \left(\overline{oN}_{21}^{\,*} = \overline{q_1 oN_{21} q_1^{-1}}\right) \qquad (2)$$

$$\overline{oN}_{21}^{\,**} = \overline{q_1 oN_{21} q_1^{-1}} + (\rho_{11} - \rho)\begin{vmatrix}\cos(\alpha_{11})\\ \cos(\beta_{11})\\ \cos(\gamma_{11})\end{vmatrix} \qquad (3)$$

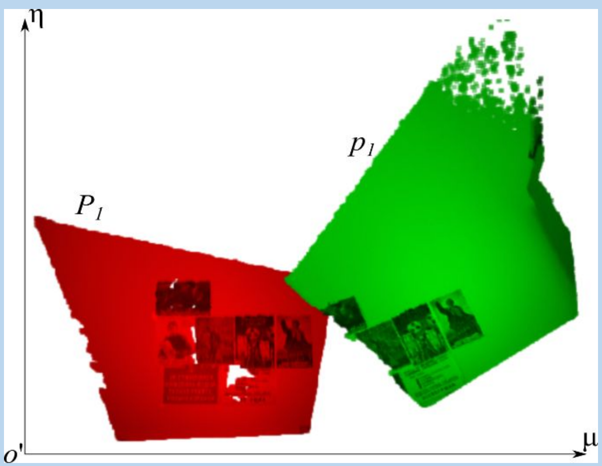
$$\overline{q}_2 = \left[\frac{\overline{R}_2}{\left|\overline{R}_2\right|}\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right] \qquad (4)$$

$$\overline{R}_1 = \overline{oN}_{21} \times \overline{ON}_{11}$$

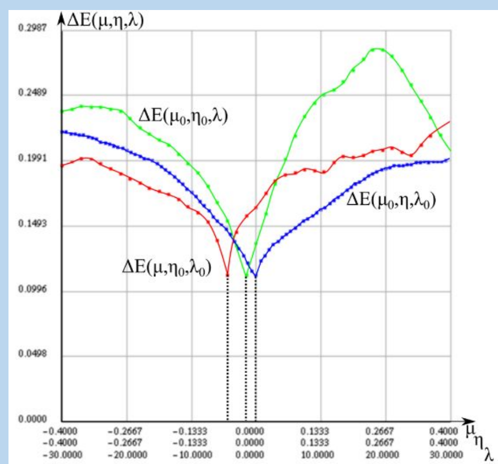
$$\omega = \mathrm{arcos}\left(\frac{\overline{oN}_{21}\cdot\overline{ON}_{11}}{\left|\overline{oN}_{21}\right| * \left|\overline{ON}_{11}\right|}\right)$$

$$\overline{R}_2 = \overline{ON}_{11} \times \overline{OY}$$

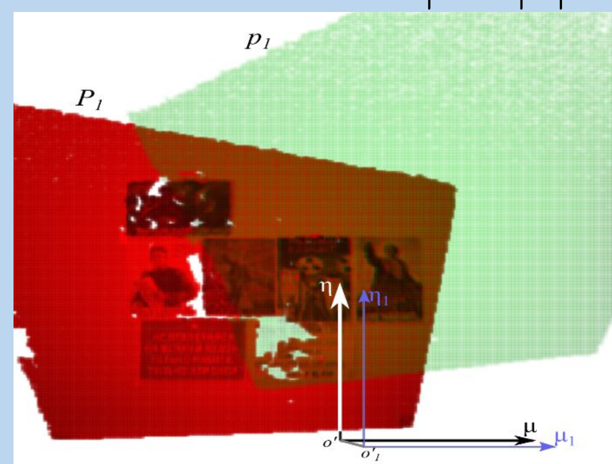
$$\omega_2 = \mathrm{arcos}\left(\frac{\overline{ON}_{11}\cdot\overline{OY}}{\left|\overline{ON}_{11}\right| * \left|\overline{OY}\right|}\right)$$



Текстура в $\boldsymbol{p_1}$, приведенная к $\boldsymbol{P_1}$

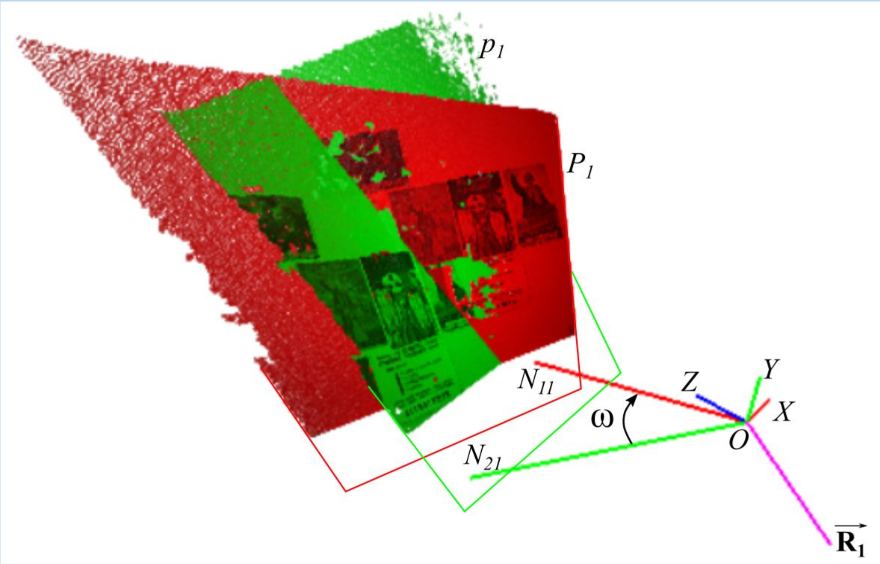


Сечения функционала в точке решения

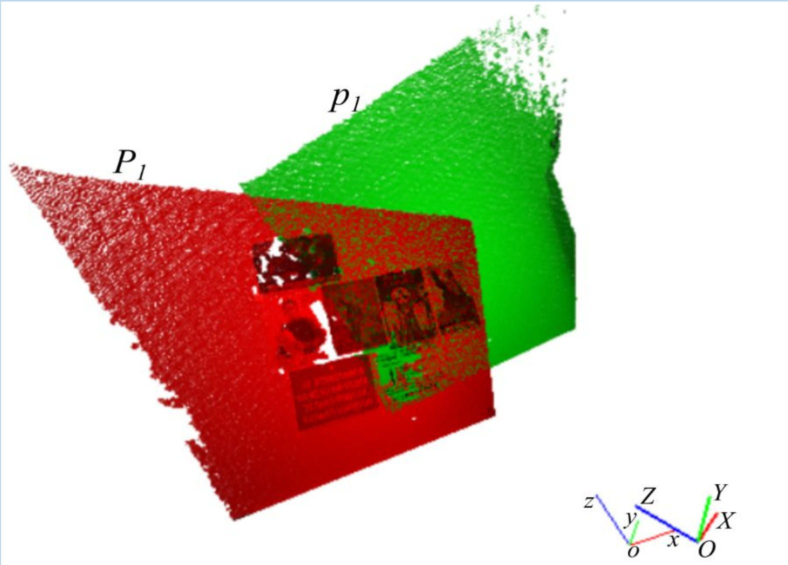


Совмещение текстур плоских объектов $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{p_1}$

Пример



Выделенные плоские объекты ***p*$_1$** и ***P*$_1$**



Конечный результат

$$\begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} = (\rho_{11} - \rho_{21}) \begin{vmatrix} \cos(\alpha_{11}) \\ \cos(\beta_{11}) \\ \cos(\gamma_{11}) \end{vmatrix} + \overline{q_2}^{-1} \begin{vmatrix} \mu \\ 0 \\ \eta \end{vmatrix} \overline{q_2} \qquad (5)$$

$$\overline{q_3} = \left[\frac{\overline{ON_{11}}}{\left|\overline{ON_{11}}\right|} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right), \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right] \qquad (6)$$

$$\overline{Q} = \left[Q_x, Q_y, Q_z, Q_w \right] = \overline{q_3}\,\overline{q_1} \qquad (7)$$

$$\begin{vmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\varphi \\ \Delta\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{atan}\left(\dfrac{2Q_yQ_w - 2Q_xQ_z}{1 - 2Q_y^2 - Q_z^2} \right) \\ \mathrm{asin}(2Q_xQ_y - 2Q_zQ_w) \\ \mathrm{atan}\left(\dfrac{2Q_xQ_w - 2Q_yQ_z}{1 - 2Q_x^2 - Q_z^2} \right) \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Спасибо за внимание !

http://wat.gamedev.ru/articles/quaternions

https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B0