Частные производные.

- Пусть D(x, y) - некоторое множество точек плоскости *Oxy*. Если каждой упорядоченной паре чисел *(x, y)* из области D соответствует определенное число $z \in Z \subset \mathbf{R}$, то говорят, что *z* есть *функция двух независимых переменных x* и *y* .

- Переменные x и y называются *независимыми переменными,* или *аргументами*, D - *областью определения,* или *существования, функции*, а множество Z всех значений функции - *областью* ее *значений.* Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$,

- Аналогично определяется функция *n* независимых переменных $z = f(x1, x2,..., xn)$.
- Областью определения такой функции будет множество $D \subset \mathbf{R}n$. Примером функций многих переменных в экономике являются производственные функции. При рассмотрении любого производственного комплекса как открытой системы (входами которой служат затраты ресурсов - людских и материальных, а выходами - продукция) *производственная функция выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами*.

- *Частной производной* функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ *частной производной по переменной x* называется производная этой функции по *x* при постоянном *y*.

- Обозначается частная производная по x следующим образом:

$$z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

- Аналогично *частной производной функции* z = f(x, y) *по аргументу y* называется производная этой функции по *y* при постоянном *x*. Обозначения:

$$z'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ f'_y(x_0, y_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

- *Частными производными второго порядка функции* z = f(x, y) называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу *x*, то вторые производные обозначаются символами

$$z''_{xx},\ z''_{x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ z''_{xy},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

- Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существует хотя бы одна из них. Такие точки называются *критическими*.

Достаточные условия экстремума для функции двух переменных.

Пусть точка $M_o(x_o, y_o)$ - критическая точка функции z = f(x, y), т.е.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

и функция z = f(x, y) имеет непрерывные вторые частные производные в некоторой окрестности точки Mo(xo, yo).

Обозначим

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A, \qquad z''_{xy}(x_0, y_0) = B,$$

$$z''_{yy}(x_0, y_0) = C, \qquad \Delta = AC - B^2$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция *z* имеет экстремум в точке M_o: максимум при $A < 0$, минимум при

$A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_o нет;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.