

Частные производные.

- Пусть $D(x, y)$ - некоторое множество точек плоскости Oxy . Если каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из области D соответствует определенное число $z \in Z \subset \mathbf{R}$, то говорят, что z есть *функция двух независимых переменных x и y* .

- Переменные x и y называются *независимыми переменными*, или *аргументами*, D - *областью определения*, или *существования*, *функции*, а множество Z всех значений функции - *областью ее значений*.
Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$,

- Аналогично определяется функция n независимых переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Областью определения такой функции будет множество $D \subset \mathbf{R}^n$. Примером функций многих переменных в экономике являются производственные функции. При рассмотрении любого производственного комплекса как открытой системы (входами которой служат затраты ресурсов - людских и материальных, а выходами - продукция) *производственная функция выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами.*

- *Частной производной* функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ *частной производной по переменной x* называется производная этой функции по x при постоянном y .

- Обозначается частная производная по x следующим образом:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

- Аналогично *частной производной функции* $z = f(x, y)$ по аргументу y называется производная этой функции по y при постоянном x . Обозначения:

$$z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, f'_y(x_0, y_0), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

- *Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу x , то вторые производные обозначаются символами*

$$z''_{xx}, z''_{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z''_{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

- Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существует хотя бы одна из них. Такие точки называются *критическими*.

Достаточные условия экстремума для функции двух переменных.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ - критическая точка
функции $z = f(x, y)$, т.е.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

и функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные
вторые частные производные в
некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Обозначим

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad z''_{xy}(x_0, y_0) = B,$$

$$z''_{yy}(x_0, y_0) = C, \quad \Delta = AC - B^2$$

Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то функция z имеет экстремум в точке M_0 : максимум при $A < 0$, минимум при $A > 0$;
- 2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_0 нет;
- 3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

