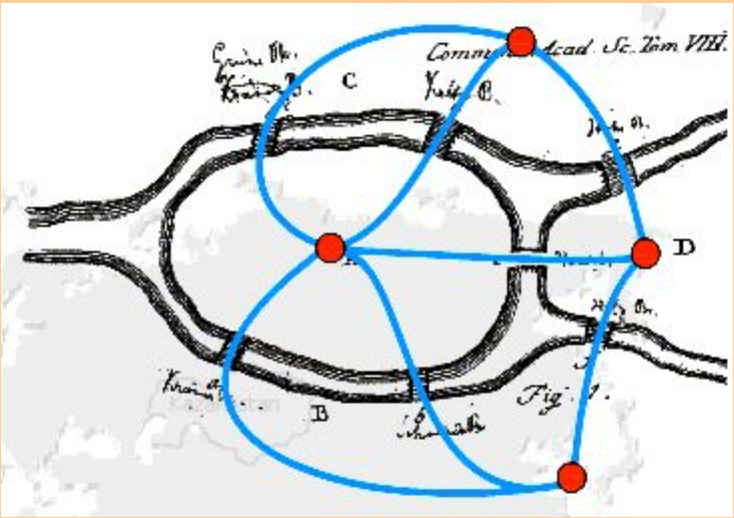
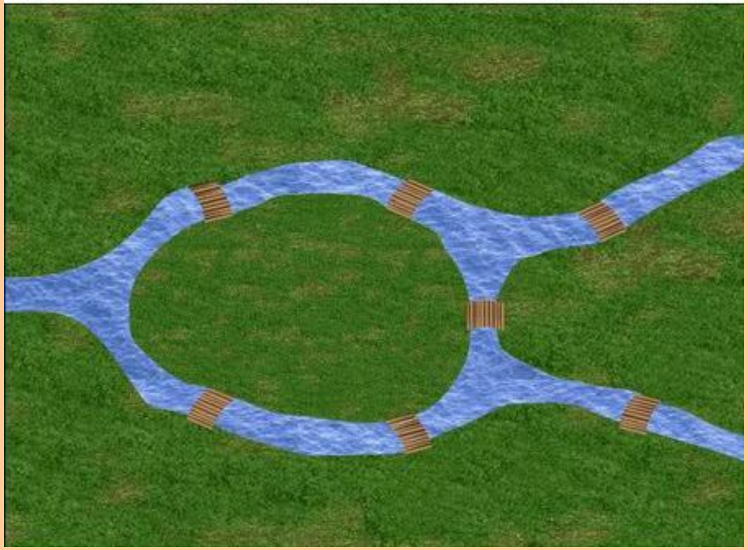
Лекция 6. Теория графов. Основные понятия.

Немного истории

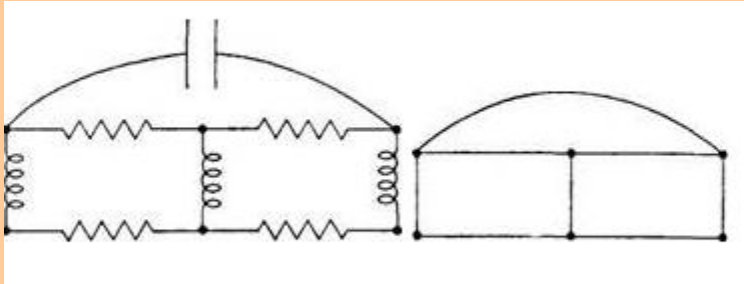
- Задача о кенигсбергских мостах

Леонард Эйлер, 1736 год



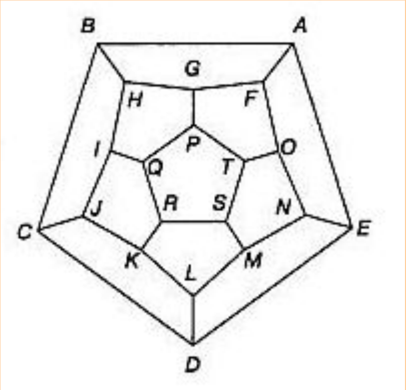


Кирхгоф Г., 1847 г.
Задача о нахождении силы тока в отдельных проводниках



Кэли А., 1857 г.
Задача о нахождении всех изомеров предельных углеводородов

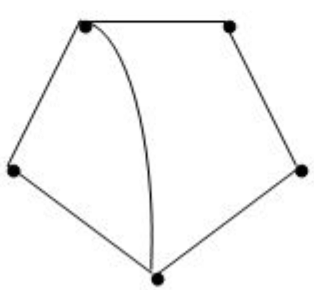
Гамильтон У., 1859 г. Головоломка «кругосветное путешествие»



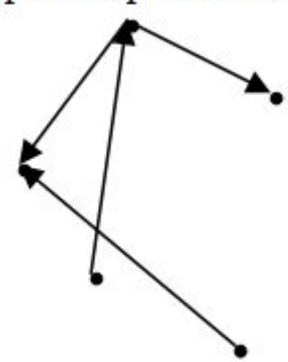
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Графом* Г называется пара (V,E), где V – конечное множество вершин $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, $|V|=n$;
Е – конечное множество ребер или дуг $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, $|E|=m$.

Обычно $E\subseteq V\times V$, то есть $e_j=(v_{j1},v_{j2})$. Если порядок вершин важен (как в обычном декартовом произведении), то элементы e_j называют *дугами*, а сам граф G - *ориентированным*. Если же неважен, то элементы множества Е называют *ребрами,* и говорят, что множество Е – множество неупорядоченных пар вершин. Кроме того, если пары могут повторяться, то такие ребра (дуги) называют кратными и говорят, что G – *мультиграф*. Для дуги $e_j=(v_{j1},v_{j2})$ вершина v_{j1} называется началом дуги, а вершина v_{j2} - концом; для ребра $e_j=(v_{j1},v_{j2})$ - обе вершины называют концами ребра. Если существует дуга (ребро) с совпадающими началом и концом, то такая дуга (ребро) называется петлёй. Граф, не содержащий кратных дуг и петель, называют *простым*.

Неориентированный простой граф



Ориентированный граф



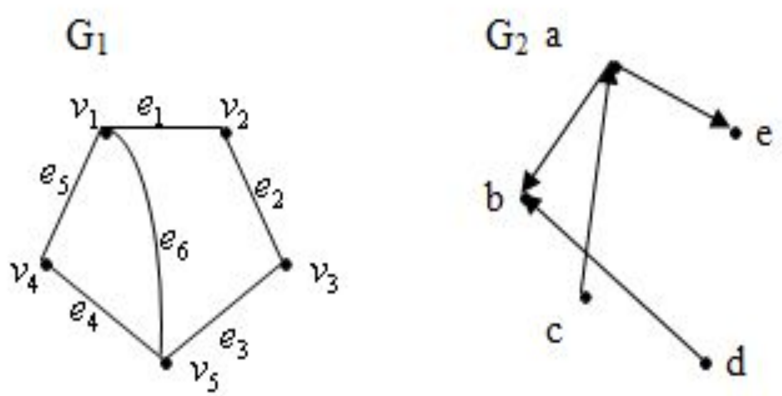
Мультиграф

Вершины $a,b \in V$ называются *смежными,* если $(a,b) \in E$ или $(b,a) \in E,$ т.е. если эти вершины на картинке соединяются дугой (ребром).

Дуги или ребра графа называются *смежными,* если у них есть общая вершина (это понятие обычно применяется к неориентированным графам).

Вершина $a \in V$ и дуга (ребро) $(a,b) \in E$ или $(b,a) \in E$ (т.е. если вершина является одним из концов дуги) называются *инцидентными*.

Граф называется *помеченным,* если его вершины различимы. Обычно пометки это номера вершин.



$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

V={a,b,c,d,e}

E={(a,b),(a,e),(c,a),(d,b)}

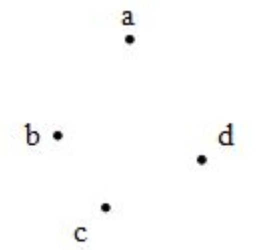
Граф, не содержащий ни одного ребра или дуги (но содержащий произвольное число вершин) называют *нуль-графом*.

Число ребер, инцидентных вершине, называют её *степенью* $\deg v_i = |(v_i, v) \in E| + |(v, v_i) \in E|$ (для неориентированных графов). Для ориентированного графа рассматривают

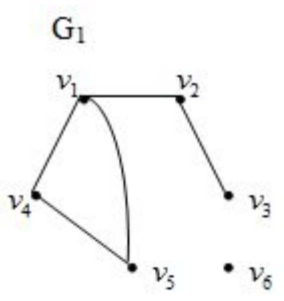
полустепень исхода - $\deg_- v_i = |(v_i, v) \in E|$ и

полустепень захода - и $\deg_+ v_i = |(v, v_i) \in E|$.

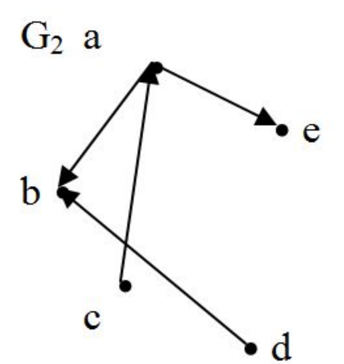
Если степень какой-то вершины равна нулю, то она называется *изолированной*, вершина, имеющая степень 1, называется *висячей*.



Нуль-граф



вершина	степень
v_1	3
v_2	2
v_3	1
v_4	2
v_5	2
v_6	0



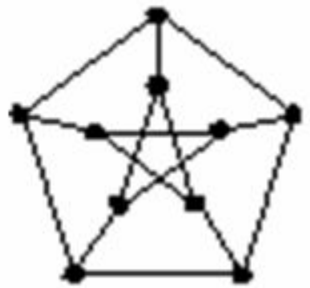
вершина	Полустепень исхода	Полустепень захода
a	2	1
b	0	2
c	1	0
d	1	0
e	0	1

Некоторые типы графов

1) Простая цепь P_n

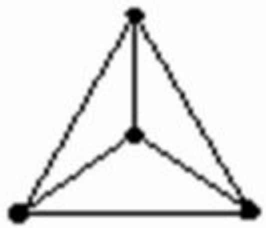
2) Простой цикл C_n

3) Если все вершины графа имеют одну и ту же степень *n*, то граф называют однородным степени *n*.

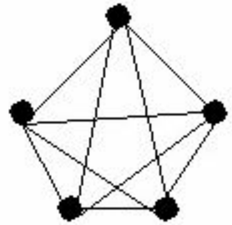


Граф Петерсена – однородный степени ….?

4) Полный граф K_n – простой граф, в котором проведены все возможные ребра.

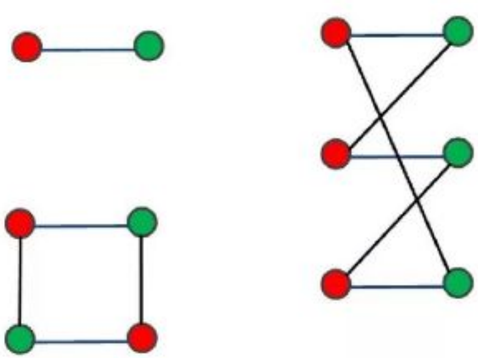


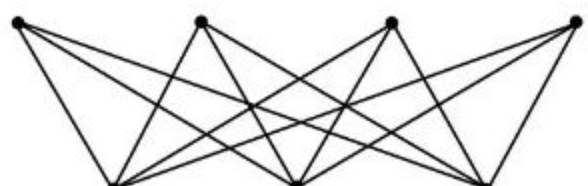
Граф K_4



K_5 – полный граф с 5-ю вершинами

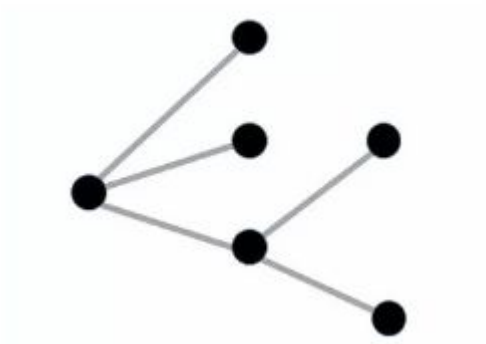
5) Двудольные графы. Если множество вершин графа можно разбить на 2 непересекающихся подмножества (их называют долями) так, что бы вершины в каждой доле были смежны только вершинам в другой доле, то такой граф называют двудольным. Двудольный граф, в котором проведены все возможные ребра, обозначают $K_{m,n}$ - где m, n - число вершин в каждой доле.



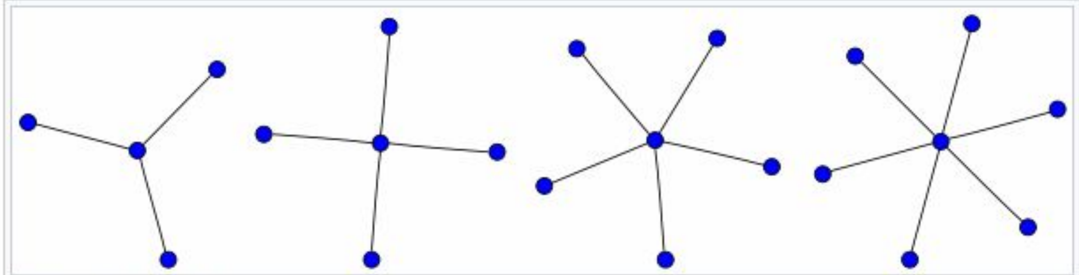


Граф $K_{4,3}$

6) Деревья

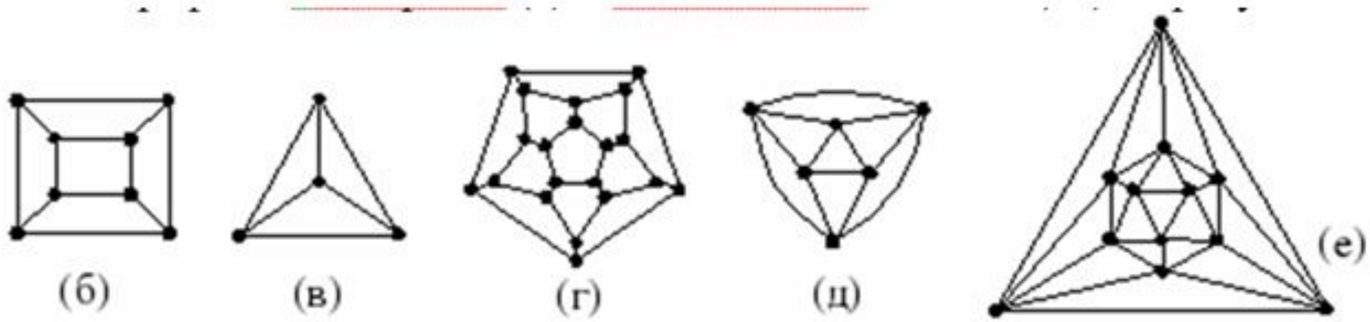


8) Звездный граф



Графы S_3, S_4, S_5 и S_6.

7) Графы платоновых тел



б) куб
в) тетраэдр
г) додэкаэдр
д) окатаэдр
е) икосаэдр

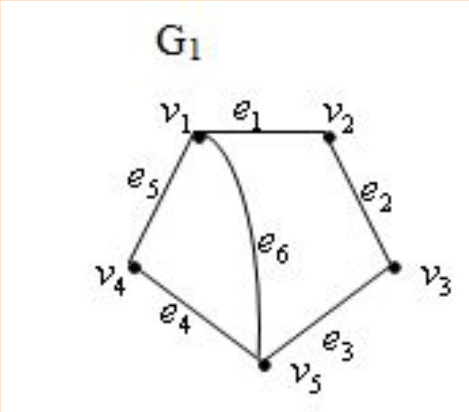
Способы представления графа

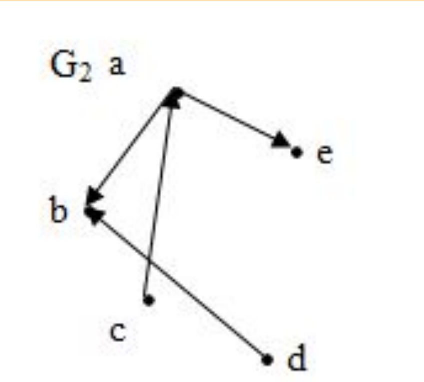
Граф G(V,E), $|V| = n, |E| = m$

1) Матрица смежности вершин

$A = \|a_{ij}\|, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если вершины } a_i \textit{ и } a_j \textit{ смежны} \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$$





$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Для мультиграфов с кратными дугами или ребрами 1 заменяется на число кратных дуг.

2) Матрица инцидентности

$B = \|b_{ij}\|,\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}$

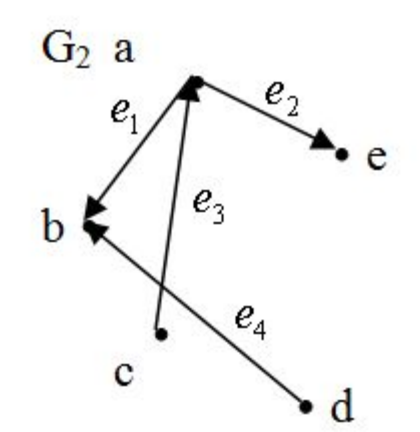
для неорграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } i \text{ инцидентна ребру } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

для орграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{если вершина } i \text{ есть начало дуги } j \\ 1, \text{если вершина } i \text{ есть конец дуги } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Для орграфа с петлями соответствующий столбец матрицы содержит 2.

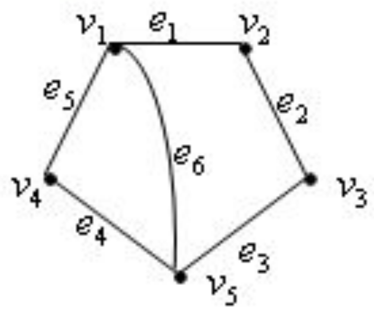


$$B(G_1) = \begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B(G_2) = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline a & -1 & -1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & -1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & -1 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

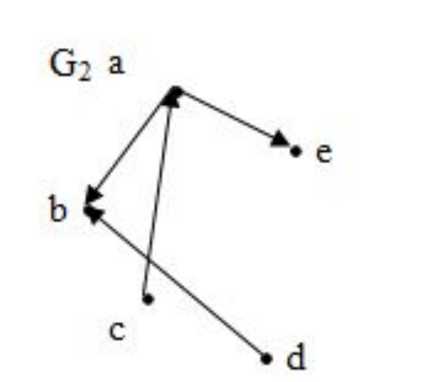
Матрица смежности ребер

G_1



$$C(G_1) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5 \\ e6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) список ребер – список упорядоченных (для орграфа) или неупорядоченных (для неорграфа) пар вершин.



$G_2=\{(a,b),(a,e),(c,a),(d,b)\}$

Встречаются и более экзотические способы представления графов:

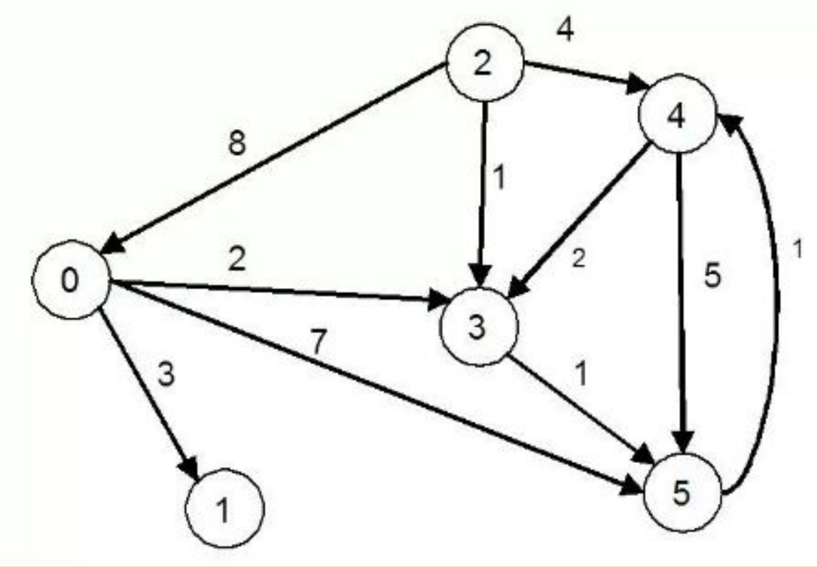
4) матрица смежности ребер;

5) графовый вектор – список степеней вершин;

6) код Харари – матрица смежности (вершин) вытягивается в строку – получается двоичное число. Из всех возможных (при различной нумерации вершин – n! способов) двоичных чисел выбирается минимальное.

Взвешенные графы

В некоторых случаях удобно приписывать ребрам или дугам некоторые числа - веса. Например, если граф изображает сеть дорог между населенными пунктами, то веса могут обозначать расстояние.



Какие бы вы предложили изменения в представлениях графа для взвешенных графов?