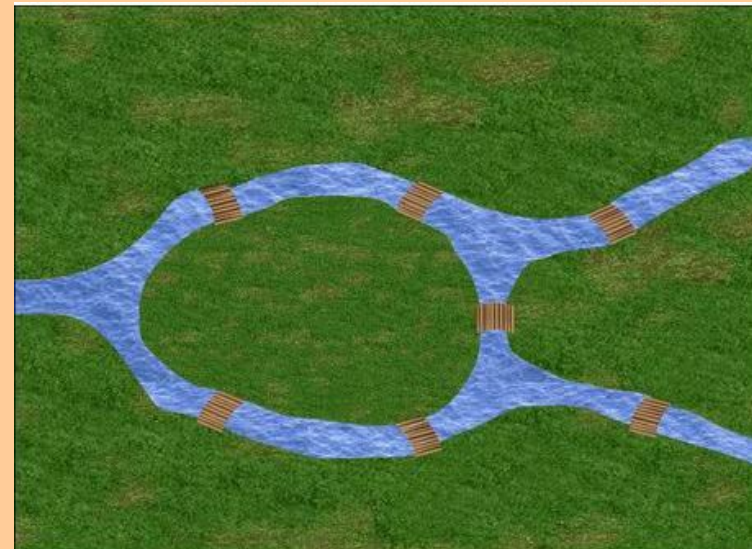
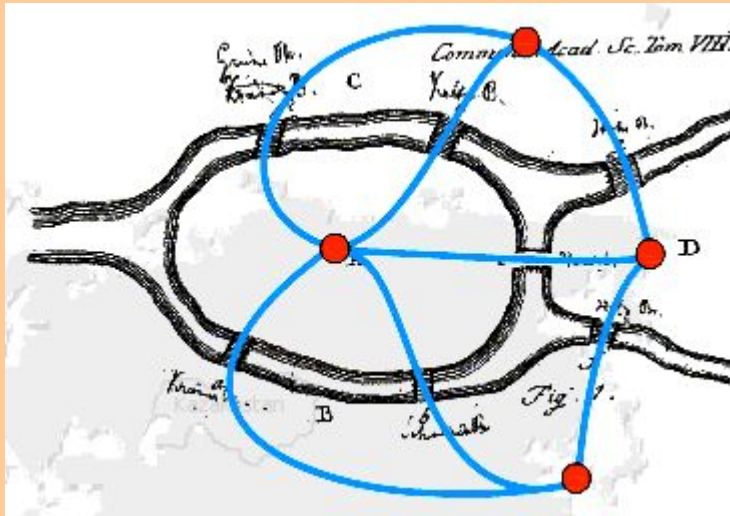


Лекция 6. Теория графов. Основные понятия.

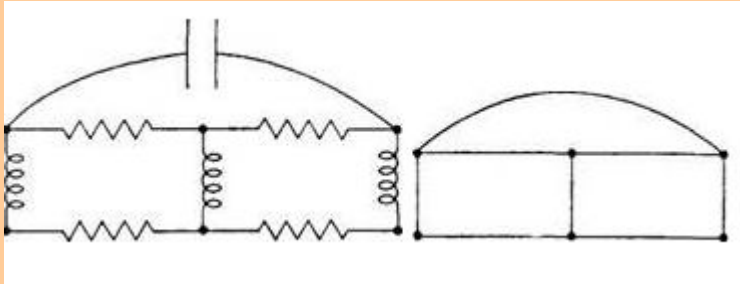
Немного истории

- Задача о кенигсбергских мостах
Леонард Эйлер, 1736 год



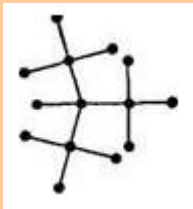
Кирхгоф Г., 1847 г.

Задача о нахождении силы тока в отдельных проводниках

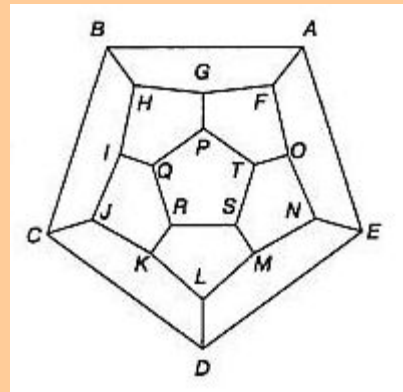


Кэли А., 1857 г.

Задача о нахождении всех изомеров предельных углеводородов



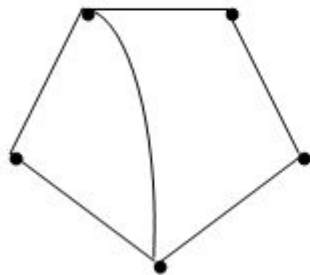
Гамильтон У., 1859 г. Головоломка «кругосветное путешествие»



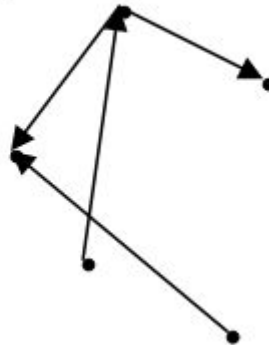
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Графом* Γ называется пара (V, E) , где V – конечное множество вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$; E – конечное множество ребер или дуг $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $|E| = m$.

Обычно $E \subseteq V \times V$, то есть $e_j = (v_{j1}, v_{j2})$. Если порядок вершин важен (как в обычном декартовом произведении), то элементы e_j называют *дугами*, а сам граф G – *ориентированным*. Если же неважен, то элементы множества E называют *ребрами*, и говорят, что множество E – множество неупорядоченных пар вершин. Кроме того, если пары могут повторяться, то такие ребра (дуги) называют кратными и говорят, что G – *мультиграф*. Для дуги $e_j = (v_{j1}, v_{j2})$ вершина v_{j1} называется началом дуги, а вершина v_{j2} – концом; для ребра $e_j = (v_{j1}, v_{j2})$ – обе вершины называют концами ребра. Если существует дуга (ребро) с совпадающими началом и концом, то такая дуга (ребро) называется петлей. Граф, не содержащий кратных дуг и петель, называют *простым*.

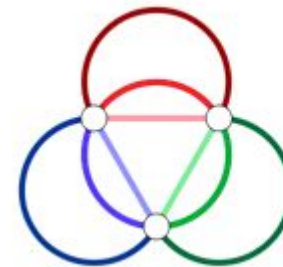
Неориентированный простой граф



Ориентированный граф



Мультиграф

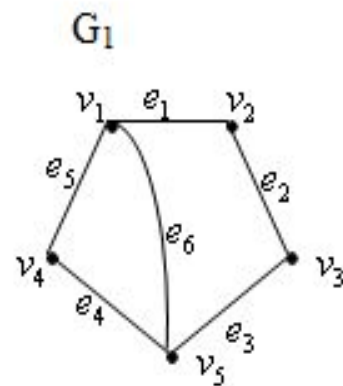


Вершины $a, b \in V$ называются *смежными*, если $(a, b) \in E$ или $(b, a) \in E$, т.е. если эти вершины на картинке соединяются дугой (ребром).

Дуги или ребра графа называются *смежными*, если у них есть общая вершина (это понятие обычно применяется к неориентированным графам).

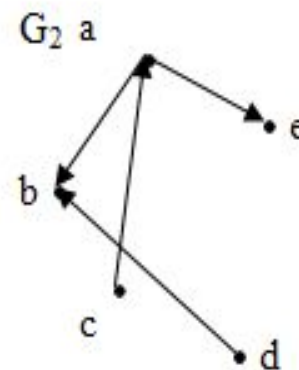
Вершина $a \in V$ и дуга (ребро) $(a, b) \in E$ или $(b, a) \in E$ (т.е. если вершина является одним из концов дуги) называются *инцидентными*.

Граф называется *помеченным*, если его вершины различимы. Обычно пометки это номера вершин.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$



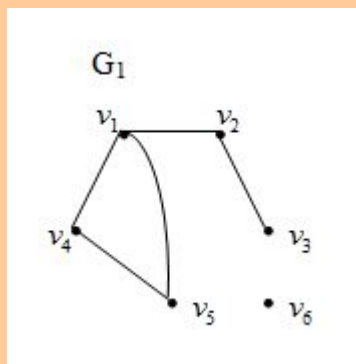
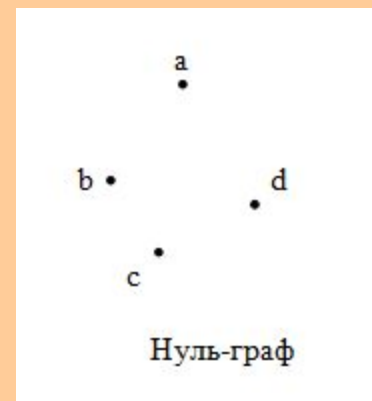
$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, e), (c, a), (d, b)\}$$

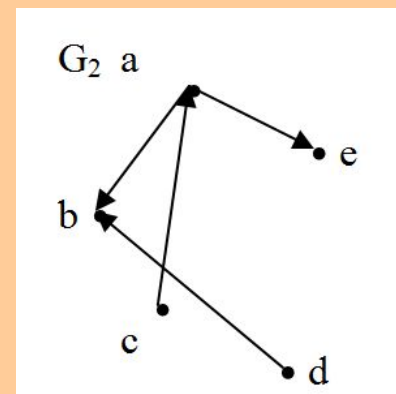
Граф, не содержащий ни одного ребра или дуги (но содержащий произвольное число вершин) называют *нуль-графом*.

Число ребер, инцидентных вершине, называют её *степенью*
 $\deg v_i = |(v_i, v) \in E| + |(v, v_i) \in E|$ (для неориентированных графов). Для ориентированного графа рассматривают *полустепень исхода* - $\deg_- v_i = |(v_i, v) \in E|$ и *полустепень захода* - и $\deg_+ v_i = |(v, v_i) \in E|$.

Если степень какой-то вершины равна нулю, то она называется *изолированной*, вершина, имеющая степень 1, называется *висячей*.



вершина	степень
v_1	3
v_2	2
v_3	1
v_4	2
v_5	2
v_6	0



вершина	Полустепень исхода	Полустепень захода
<u>a</u>	2	1
b	0	2
c	1	0
d	1	0
e	0	1

Некоторые типы графов

1) Простая цепь P_n

P_5

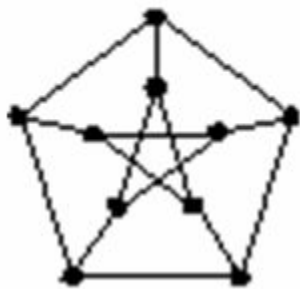


2) Простой цикл C_n

C_4

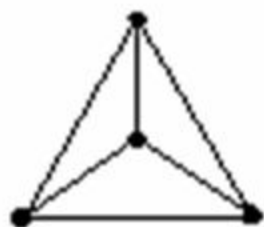


3) Если все вершины графа имеют одну и ту же степень n , то граф называют однородным степени n .

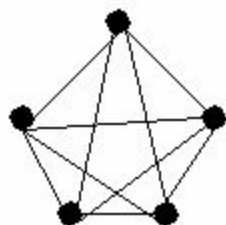


Граф Петерсена – однородный степени?

4) Полный граф K_n – простой граф, в котором проведены все возможные ребра.

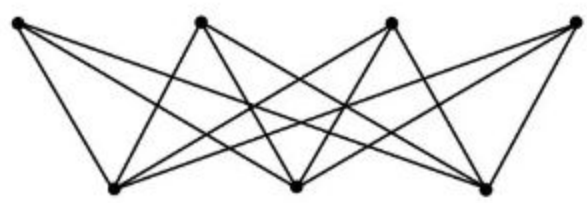
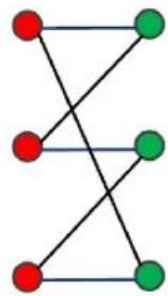
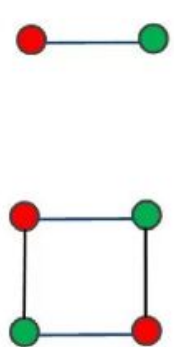


Граф K_4



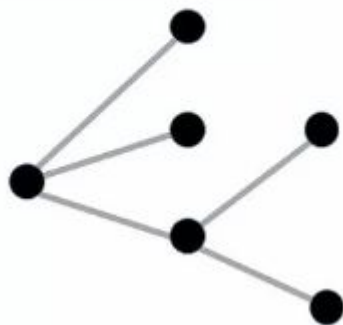
K_5 – полный граф с
5-ю вершинами

5) Двудольные графы. Если множество вершин графа можно разбить на 2 непересекающихся подмножества (их называют долями) так, что бы вершины в каждой доле были смежны только вершинам в другой доле, то такой граф называют двудольным. Двудольный граф, в котором проведены все возможные ребра, обозначают $K_{m,n}$ - где m, n - число вершин в каждой доле. |

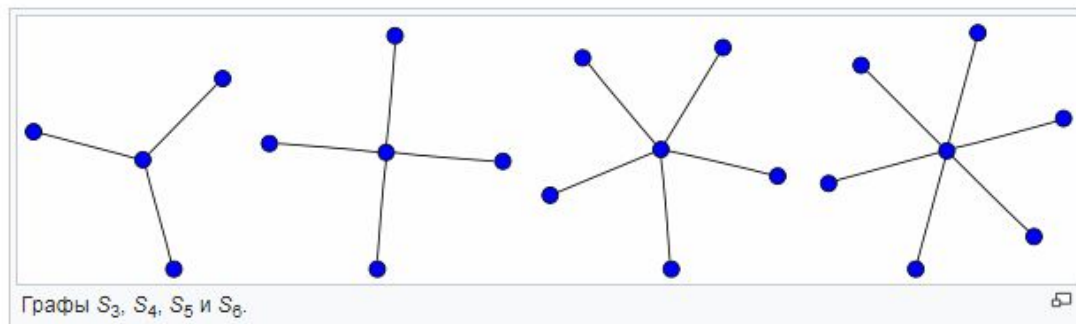


Граф $K_{4,3}$

6) Деревья

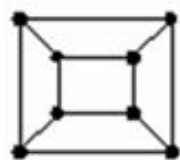


8) Звездный граф

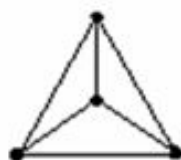


Графы S_3 , S_4 , S_5 и S_6 .

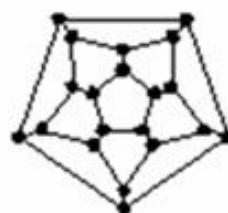
7) Графы платоновых тел



(б)



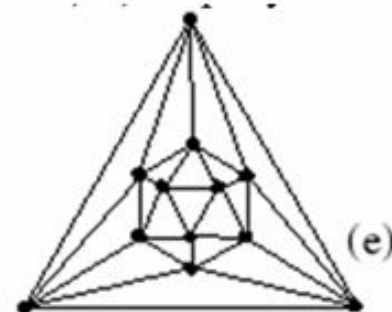
(в)



(г)



(д)



(е)

б) куб

в) тетраэдр

г) додэкаэдр

д) окатаэдр

е) икосаэдр

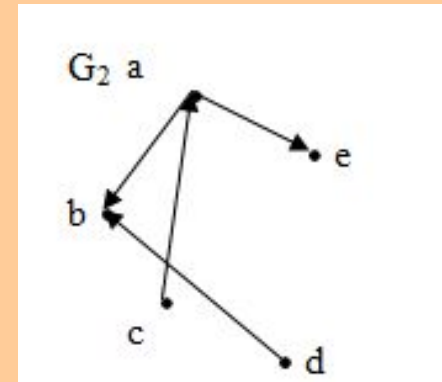
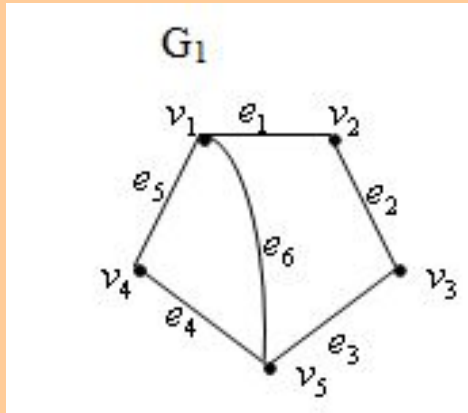
Способы представления графа

Граф $G(V,E)$, $|V|=n, |E|=m$

1) Матрица смежности вершин

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } a_i \text{ и } a_j \text{ смежны} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для мультиграфов с кратными дугами или ребрами 1 заменяется числом кратных дуг.

2) Матрица инцидентности

$$B = \|b_{ij}\|, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

для неорграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ инцидентна ребру } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

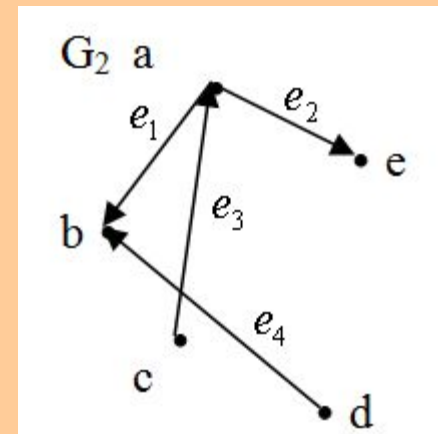
для орграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } i \text{ есть начало дуги } j \\ 1, & \text{если вершина } i \text{ есть конец дуги } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

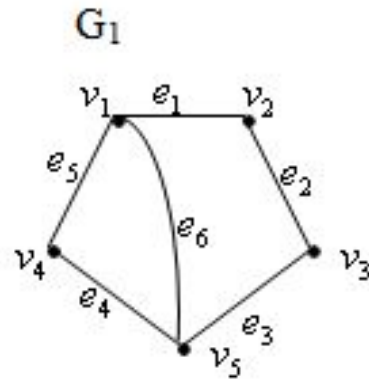
Для орграфа с петлями соответствующий столбец матрицы содержит 2.

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(G_2) = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a & -1 & -1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & -1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & -1 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

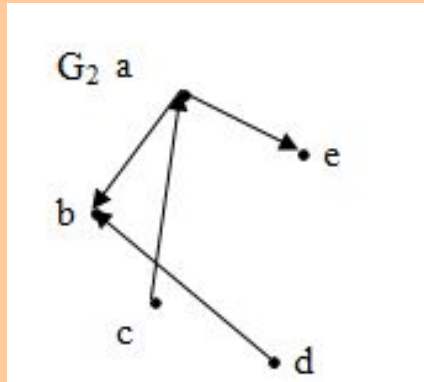


Матрица смежности ребер



$$C(G_1) = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) список ребер – список упорядоченных (для орграфа) или неупорядоченных (для неорграфа) пар вершин.



$$G_2 = \{(a,b), (a,e), (c,a), (d,b)\}$$

Встречаются и более экзотические способы представления графов:

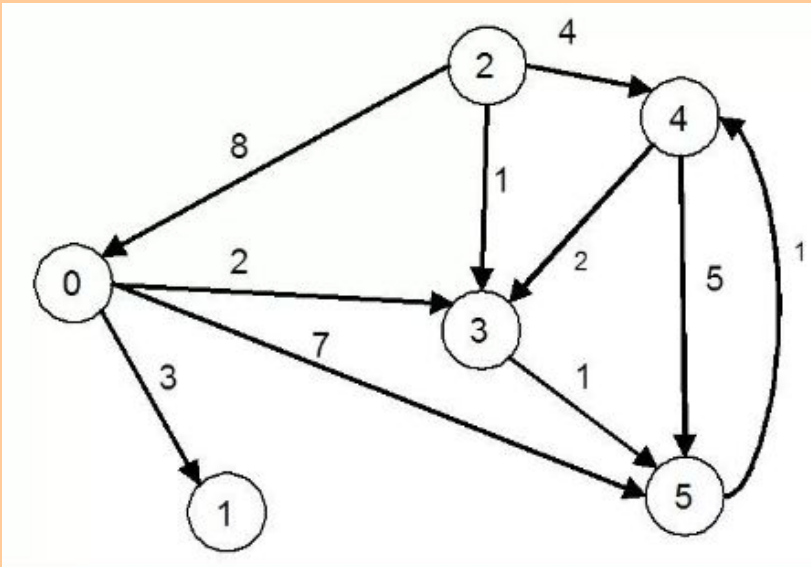
4) матрица смежности ребер;

5) графовый вектор – список степеней вершин;

6) код Харари – матрица смежности (вершин) вытягивается в строку – получается двоичное число. Из всех возможных (при различной нумерации вершин – $n!$ способов) двоичных чисел выбирается минимальное.

Взвешенные графы

В некоторых случаях удобно приписывать ребрам или дугам некоторые числа - веса. Например, если граф изображает сеть дорог между населенными пунктами, то веса могут обозначать расстояние.



Какие бы вы предложили изменения в представлениях графа для взвешенных графов?