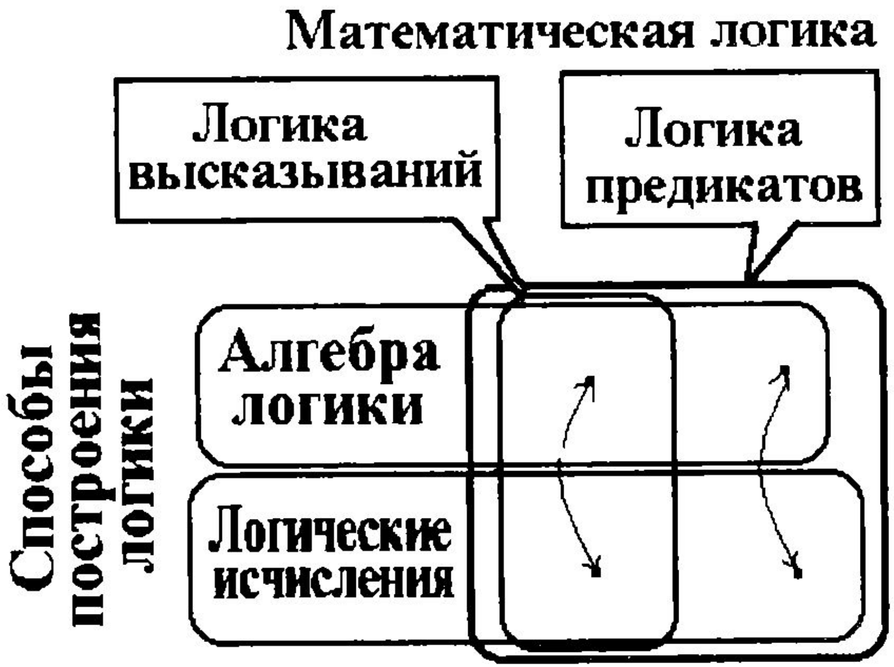
ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

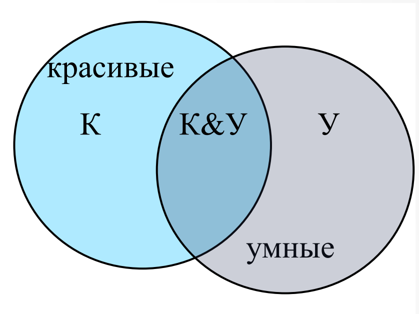
Состав математической логики

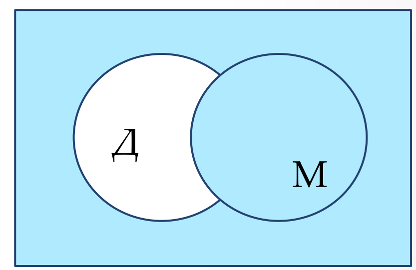


Высказывания

Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

1) ~~Здравствуй~~!
2) Заяц белый или серый .
3) Этот человек умный и красивый.
4) ~~Какая температура на улице~~?
5) Если идёт дождь, то крыши мокрые .
6) ~~Уходя гасите свет~~.
7) Бразилия – страна Северной Америки.
8) Число x не меньше единицы.





Пример.

Предикат

"Икс любит кашу"

Если вместо неизвестного Икс подставить, например Маша, либо Даша, либо Саша, то получатся:

- «Маша любит кашу»
- «Даша любит кашу»
- «Саша любит кашу»

высказывания

Предикат— это предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него конкретных значений переменных.

Примеры предикатов

P(x)=«Икс любит кашу» – одноместный предикат.

M={Маша, Даша, Саша}

Предметная область Предметные переменные

Пусть значения истинности высказываний следующие:

«Маша любит кашу» - И

«Даша любит кашу» - Л

«Саша любит кашу» - И

x	P(x)
Маша	И
Даша	Л
Саша	И

Тогда P(Маша)=И, P(Даша)=Л, P(Саша)=И.

I_p={Маша, Саша} - область истинности предиката P(x).

Одноместный предикат

Определение 1. Одноместным предикатом P(x) называется всякая функция одного переменного, аргумент x которой определен на некотором множестве M, а функция при этом принимает одно из двух значений: истина (1) или ложь (0).

Множество M, на котором задан предикат, называется областью определения (или предметной областью) предиката.

Множество I_p, на котором предикат принимает истинные значения, называется областью истинности предиката P(x).

Примеры одноместных предикатов

$P_1(x)$=«x – простое число» - одноместный предикат.

Пусть M_{P1}- натуральные числа от 2 до 20.

область определения (предметная область)

Тогда, например, P(2)=1, P(4)=0

$I_{P1}=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

область истинности предиката $P_1(x)$

$P_2(x)$=«x – четное число»,

M_{P2} – целые числа от -10 до 10. Тогда I_{p2}=?

$P_3(x)$=«x – больше 10»

M_{P3} – вещественные числа. Тогда I_{p3}=?

Двухместный предикат

Пусть предметное множество М-млекопитающие. Рассмотрим предикат Р(х): «у х четыре ноги». - одноместный

Тогда Р(слон) =1, Р(кошка) = 1, Р(человек) =0.

Пусть N - множество натуральных чисел. Рассмотрим предикат G(x,y): «x<y».

двухместный

Тогда, например, G(l,3) = l, G(8,5) = 0.

Он определен на множестве M=N×N (пары натуральных чисел)

Двухместный предикат

Пусть предметные множества L – {Маша, Саша} – люди,
B – {каша, борщ, солянка}
Рассмотрим предикат K: «*l* любит кушать *b*»

двухместный

Он определен на множестве
M=L×B={(Маша, каша), (Маша, солянка), (Маша, борщ), (Саша, каша), (Саша, солянка), (Саша, борщ)}

Если, например, Маша любит солянку и кашу, то
K(Маша, солянка)=1,
K(Маша, каша)=1,
K(Маша, борщ)=0,

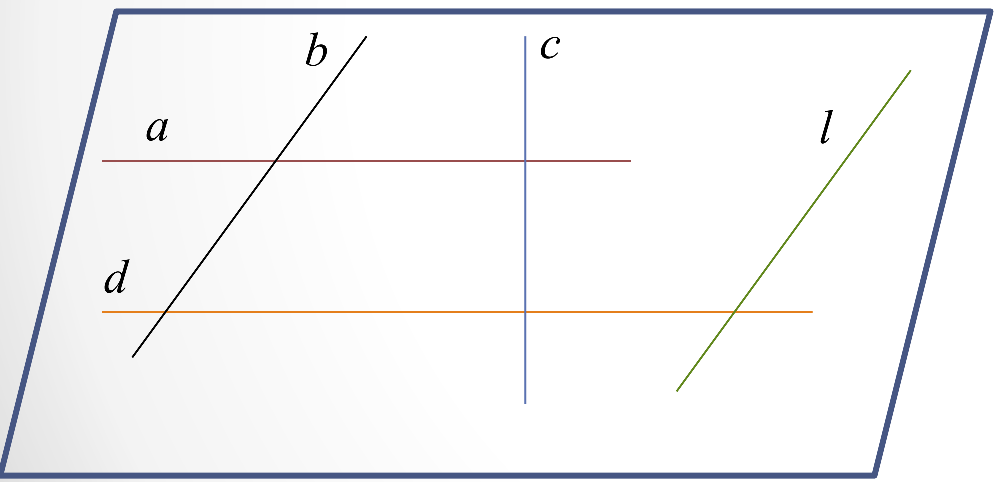
L	B	K(*l*,*b*)
Маша	каша	1
Маша	борщ	0
Маша	солянка	1
Саша	каша	0
Саша	борщ	1
Саша	солянка	0

Двухместный предикат

Определение 2. Двухместным предикатом $P(x,y)$ называется функция двух переменных x и y, определённая на множестве $M=M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества $\{1,0\}$.

Примеры двухместных предикатов

1. Пусть $Q(x,y)$ – «$x = y$», M=R×R.
2. $F(x,y)$ – «$x \parallel y$» - прямая x параллельна прямой y, определённый на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.



$I_Q =$

$I_F =$

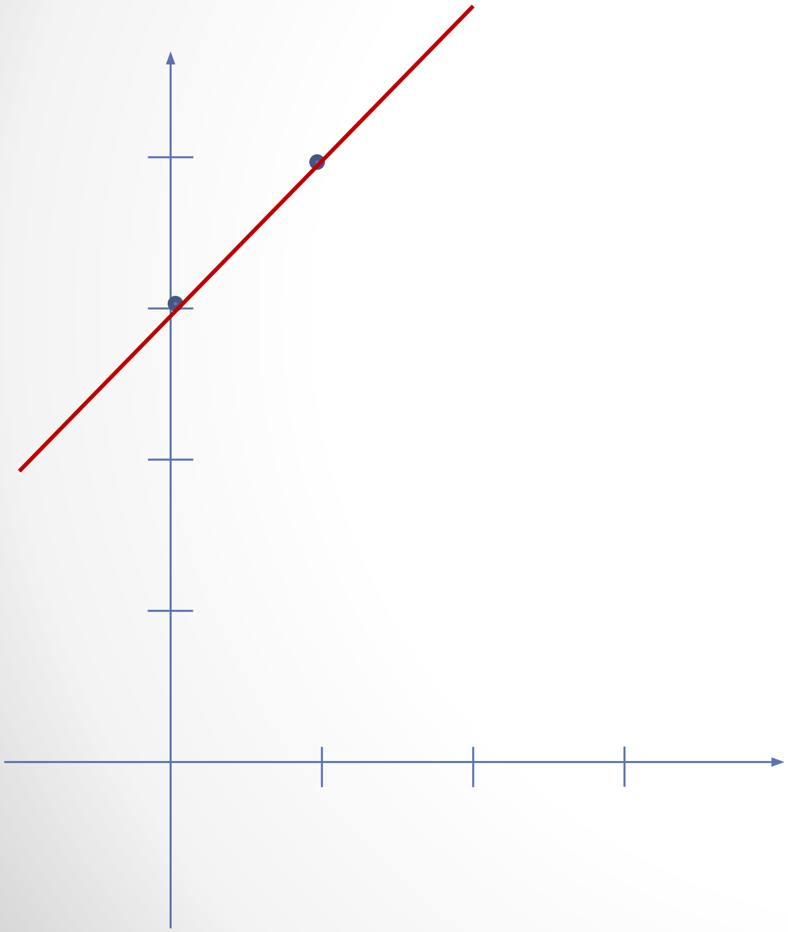
Пример **.** Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если $M = \mathrm{R}$ для одноместных предикатов и $M = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ для двухместных предикатов:

1. $x + 5 = 1$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = \{-4\}$;
2. при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$ ложное высказывание
3. $x^2 - 2x + 1 = 0$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = \{1\}$;
4. существует такое число x, что $x^3 - 2x + 1 = 0$ Истинное высказывание
5. $x + 2 < 3x - 4$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = (3; +\infty)$;
6. однозначное неотрицательное число x кратно 3

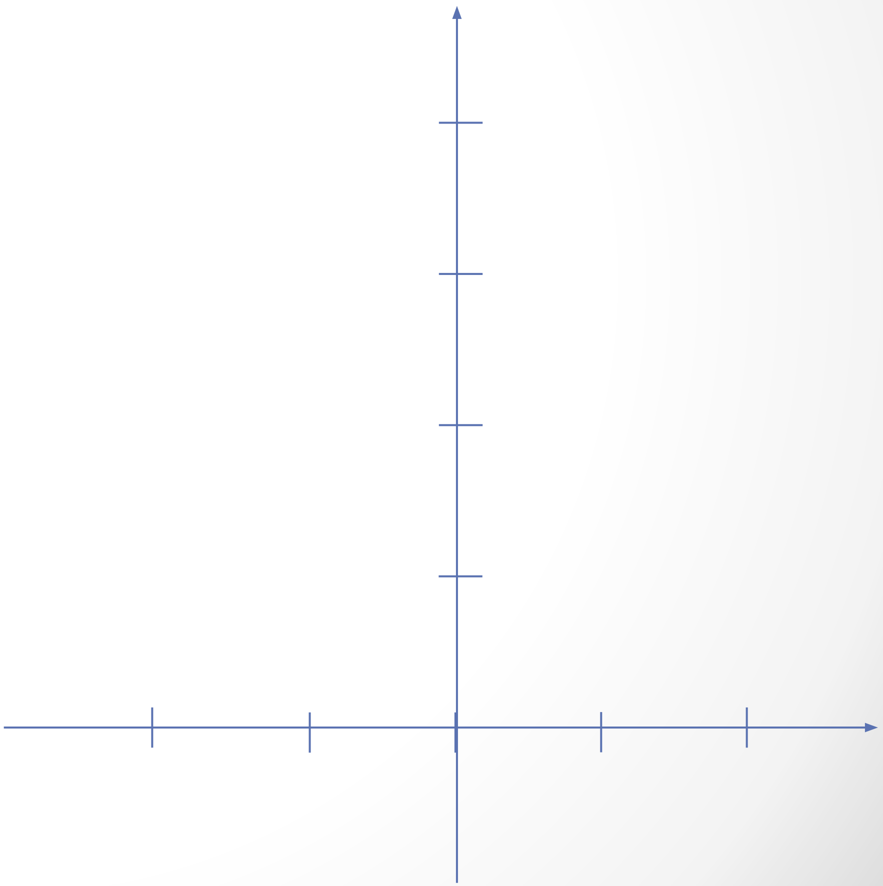
   одноместный предикат $P(x)$, $I_P = \{0; 3; 6; 9\}$;
7. $(x + 2) - (3x - 4)$ предложение не является предикатом
8. $x^2 + y^2 > 0$ двухместный предикат $Q(x,y)$, $I_Q = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \setminus \{(0,0)\}$.

Пример. Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката

$x+3=y$



$x^2-y \geq 1$



Определение предиката

Определение. **Предикатом** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, аргументы которой определены на некоторых множествах $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$ ($x_i \in M_i$), а сама она принимает два значения: И (0) и Л (1).

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются ***предметными переменными***, а множество $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ – ***предметной областью***.

Предикат от *n* переменных называется *n-местным предикатом*. Высказывание есть 0-местный предикат.

Над предикатами можно производить обычные логические операции и получать при этом другие предикаты. Таким образом, можно говорить об ***алгебре предикатов***.

Виды предикатов

$P(x,y)$: $2(x+y)=2y+2x$

Выполняется для всех x и y – тождественно-истинный

$Q(x)$: $x+1=x$

Не выполняется ни для каких x – тождественно-ложный

$F(x,y)$: $x+y=5$

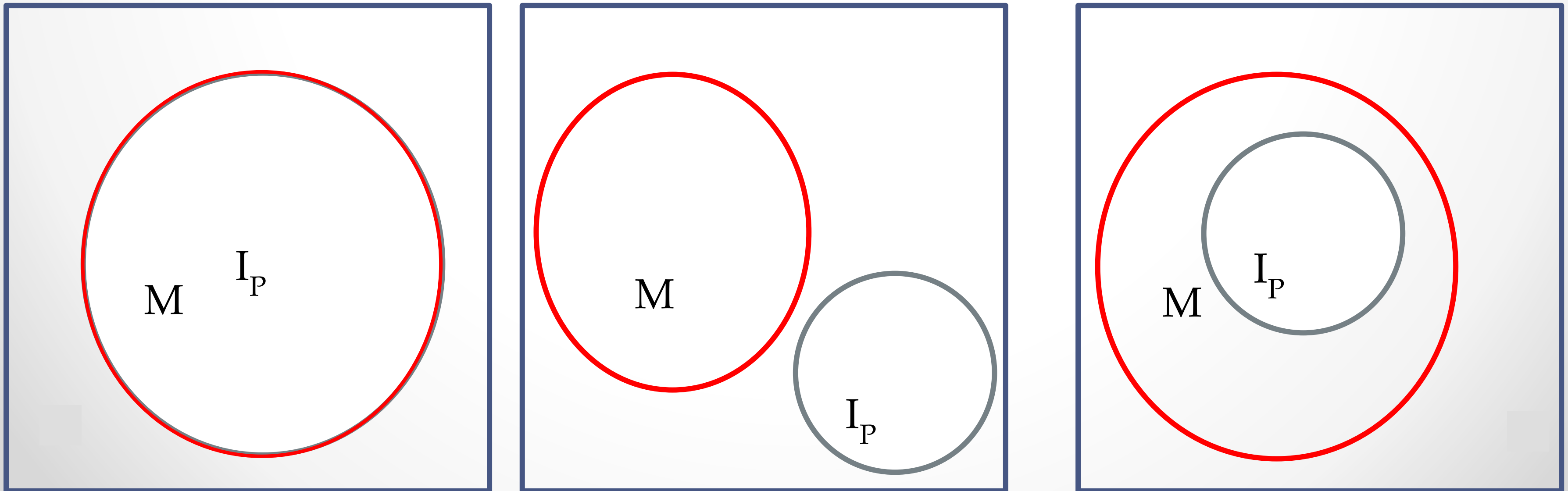
Выполняется для некоторых x и y – выполнимый

Виды предикатов

Предикат называется тождественно истинным, если на всех наборах своих переменных принимает значение 1 ($I_p = M$).

Предикат называется тождественно ложным если на всех наборах своих переменных принимает значение 0 ($I_p \not\subseteq M$).

Предикат называется выполнимым, если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1 ($I_p \subset M$).



Виды предикатов

Примеры.

P(x)- «В месяце x температура воздуха в Ярославле не опускается ниже 0 уже 100 лет».

Если M={Июнь, июль, август}, то P(x) – тождественно-истинный одноместный предикат.

Если M={декабрь, январь, февраль}, то P(x) – тождественно-ложный одноместный предикат.

Если M={январь, февраль, март,… ноябрь, декабрь}, то P(x)–

выполнимый одноместный предикат.

Логические операции над предикатами

Логические операции над высказываниями

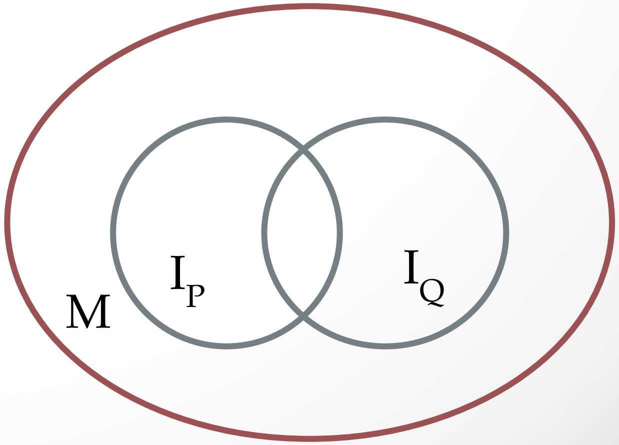
В естественном языке	В логике	Обозначение
неверно, что …	отрицание	$\neg$, $\bar{\ }$,
… и … | … хотя … | … но … | … а … | … однако …	конъюнкция	&, $\wedge$
… или …	дизъюнкция	$\vee$
если …, то … | из … следует … | … влечет … | … необходимо …	импликация	$\rightarrow$
… тогда и только тогда, когда … | … равносильно … | … необходимо и достаточно… | … в том и только в том случае …	эквивалентность	$\leftrightarrow$, ~, $\equiv$

Конъюнкция предикатов

Пример.
Пусть на некотором множестве M – натуральные числа определены предикаты P(x) и Q(x):

P(x): “x – четное число”
Q(x): “x кратно 3”

Тогда
$P(x) \wedge Q(x)$: “x – четное число и x кратно трем” = “x делится на 6”

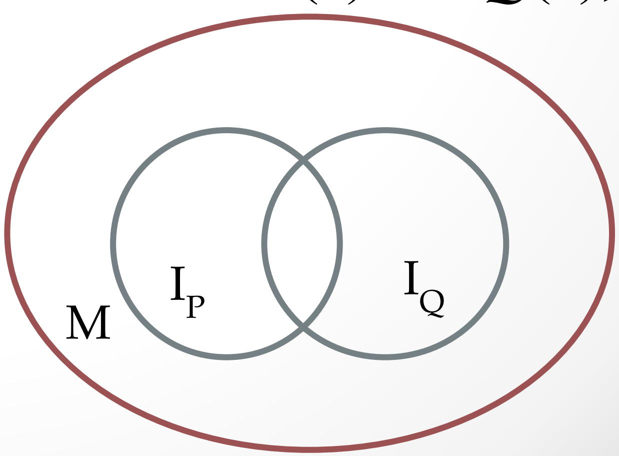


Конъюнкция предикатов

Пусть на некотором множестве М определены два предиката *P*(*x*) и *Q*(*x*).

Определение. Конъюнкцией двух предикатов *P*(*x*) и *Q*(*x*) называется новый предикат *P*(*x*)&*Q*(*x*), который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in$ М, при которых каждый из предикатов *P*(*x*) и *Q*(*x*) принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката *P*(*x*)&*Q*(*x*) является общая часть областей истинности предикатов *P*(*x*) и *Q*(*x*), т.е. пересечение $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q$.

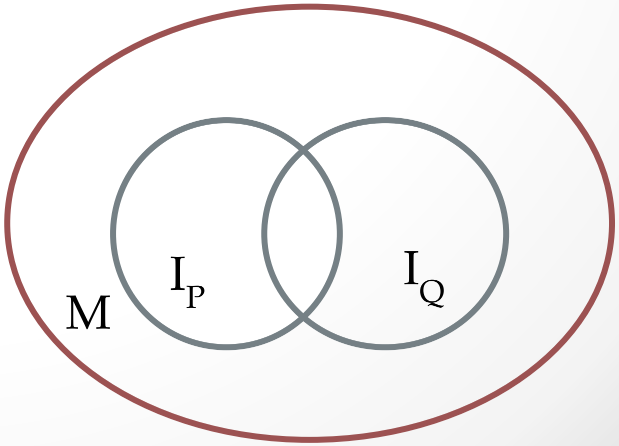


Дизъюнкция предикатов

Пример.
Пусть на некотором множестве M – натуральные числа определены предикаты P(x) и Q(x):

P(x): “x – четное число”
Q(x): “x кратно 3”

Тогда
P(x)vQ(x): “x – четное число или x кратно трем”

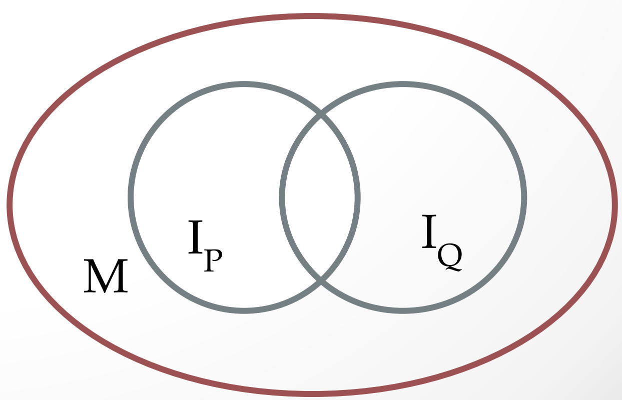


Дизъюнкция предикатов

Пусть на некотором множестве М определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in$ М, при которых каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$.



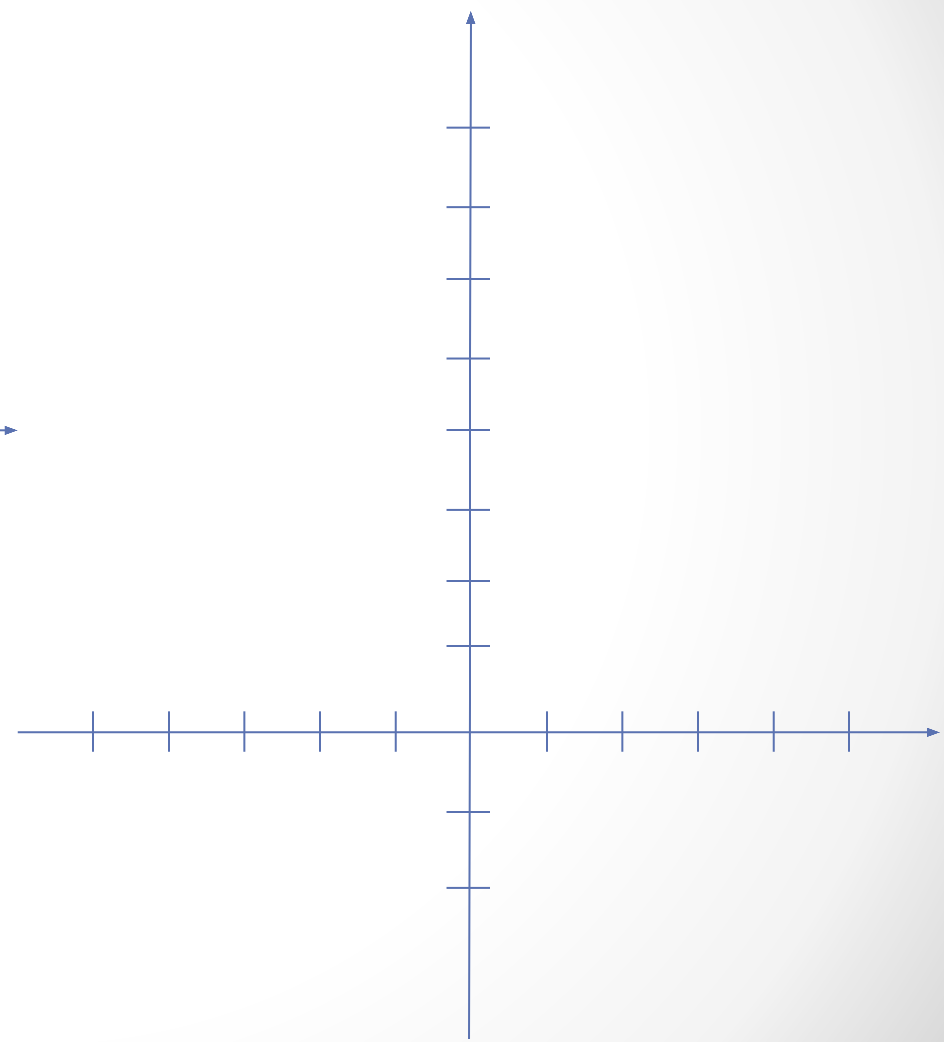
Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката:

$((x+5>0)\&(x<4))$

$((x+5>0) \vee (y<4))$

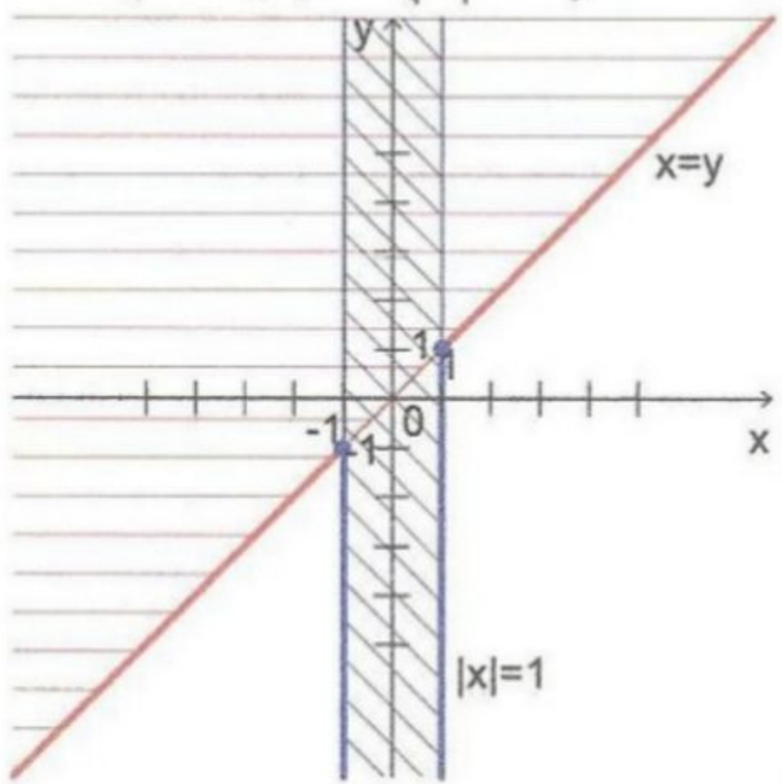
$((x-1>0) \vee (y=4))$

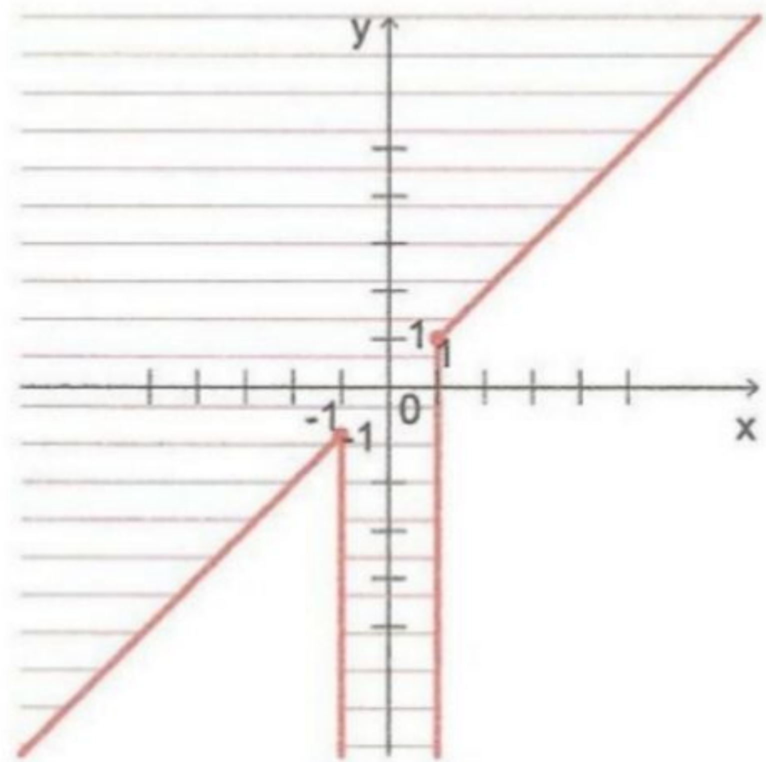
$((x-1>0) \& (y=4))$



Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката

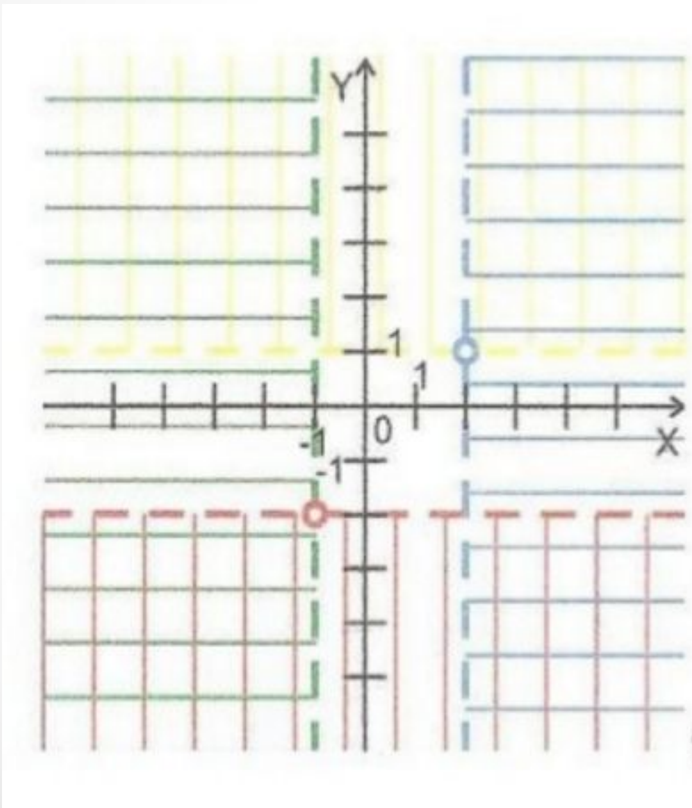
$$(x \le y) \lor (|x| \le 1)$$



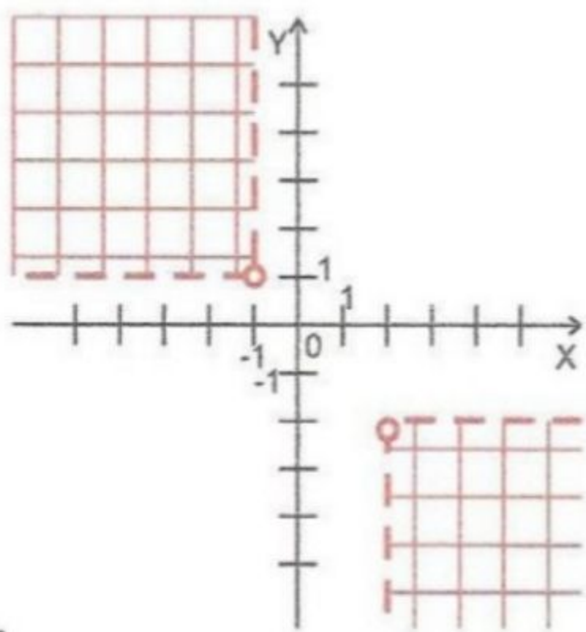


Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката

$$((x>2)\vee(y>1))\wedge((x<-1)\vee(y<-2))$$



т.е.,

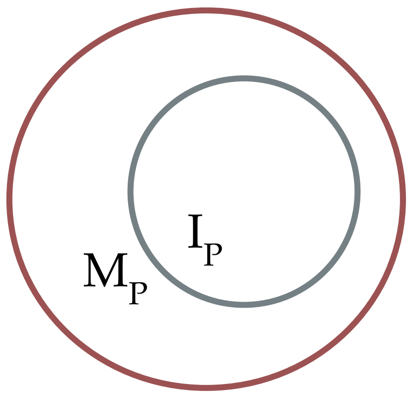


Пример.

Пусть на некотором множестве М – натуральные числа определен предикат P(x):“x – четное число”

Тогда

$\overline{P(x)}$: “x – нечетное число”

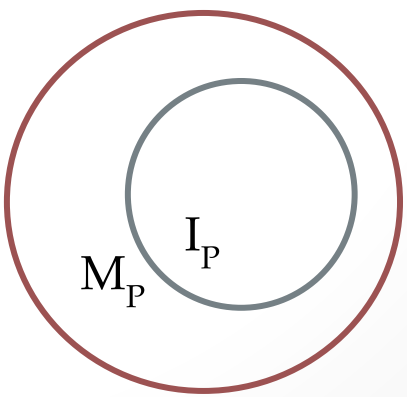


Отрицание предиката

Пусть на некотором множестве M определен предикат $P(x)$.

Определение. Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P(x)}$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина».

$$I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$$



Импликация предикатов

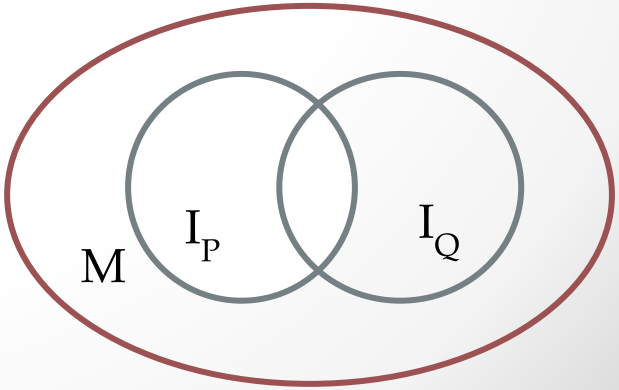
Пример.
Пусть на некотором множестве M – натуральные числа определены предикаты P(x) и Q(x):

P(x): “x – четное число”
Q(x): “x кратно 3”

Тогда

$P(x) \rightarrow Q(x)$: “Если x –четное число, то x кратно трем”

$P(x) \rightarrow Q(x)$: “x – нечетное число или x кратно трем”



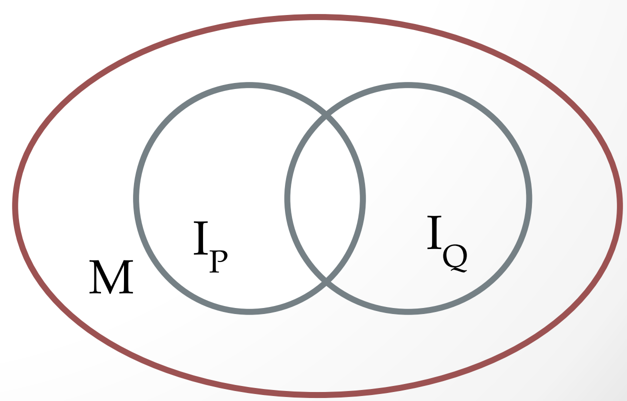
Импликация предикатов

Пусть на некотором множестве М определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \to Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in$ М, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ – значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

$$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P(x) \& \overline{Q(x)}} \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x) \Longrightarrow I_{P \to Q(x)} = I_{\overline{P}} \,\square\, I_Q$$

При выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.

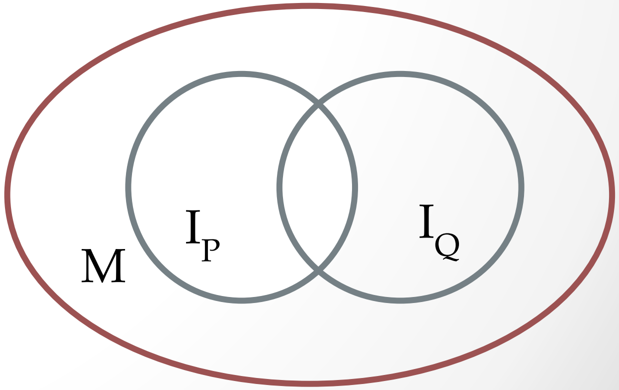


Эквиваленция предикатов

Пусть на некотором множестве М определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. Эквиваленцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \equiv Q(x)$, который является истинным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых *либо* $P(x)$ и $Q(x)$ одновременно принимают значение «*ложь*», *либо* одновременно принимают значение «истина».

При выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.



Изобразите на координатной прямой или координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $(x > 2) \wedge (x < 2)$;

б) $(x > 2) \vee (x<2)$;

в) $(x > 2) \equiv (x< 2)$;

г) $(x > 0) \wedge (y < 0)$;

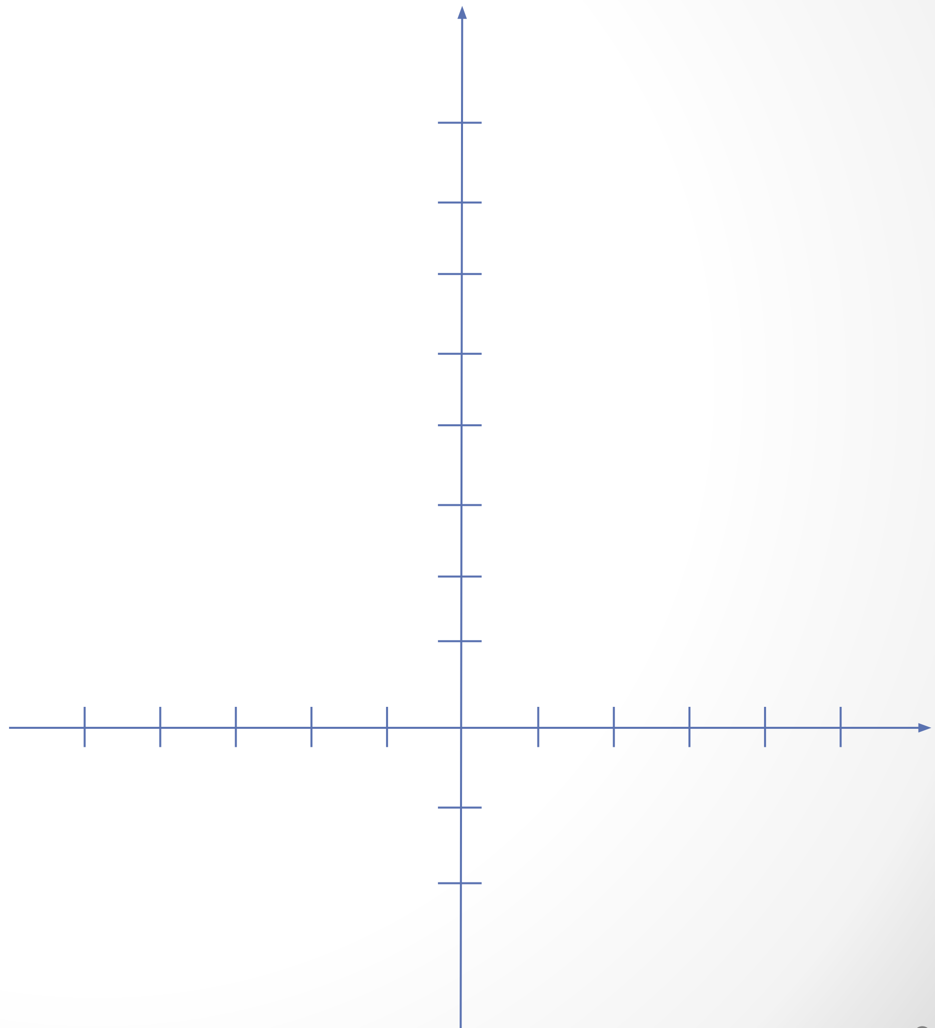
д) $(x > 0) \vee (y < 0)$;

е) $(x > 0) \rightarrow (y < 0)$;

ж) $(|x|<3) \wedge (x \geq 2)$;

з) $(x^2 + y^2 > 1) \leftrightarrow (xy < 0)$;

л) $(x > 2) \rightarrow (x < 2)$;



Тест

Состоит из 7 вопросов.

Правильный вариант ответа может быть не один.

1. Пусть x, y и z переменные со значениями из $(-\infty,\infty)$. Указать какое из следующих выражений является двуместным предикатом

1) $x+y=z$	2) $sin(x+y) > z$	3) $x^2 > z+y$	4) $2 \times 2=4$	5) $x>y$

2. Пусть x, y и z переменные со значениями из $(-\infty,\infty)$. Указать какое из следующих выражений **не** является предикатом

1) $x+y=z$	2) $sin(x)+y$	3) $x^2 > y$	4) $2 \times 2=4$	5) $x^2 < y$

3. Пусть даны предикаты P(x): «x - четное число» и Q(x): «x кратно 4», определенные на множестве N. Укажите области истинности предиката:

P(x) v Q(x):

1) I = {6,12,18,24,…6n,…}
2) I = {2,4,6,8,…2n,…}
3) I = {1,3,5,7,9,…}
4) I = {4,8,12,16,20,…4n,…}

4. Пусть даны предикаты P(x): «x - четное число» и Q(x): «x кратно 4», определенные на множестве N. Укажите области истинности предиката:

$P(x) \wedge Q(x)$:

1) I = {6,12,18,24,…6n,…}
2) I = {2,4,6,8,…2n,…}
3) I = {1,3,5,7,9,…}
4) I = {4,8,12,16,20,…4n,…}

5. Если значения x,y принадлежат отрезку [2;5], то в списке выражений укажите тождественно истинные предикаты:

1) $(x \geq 2)$ или $(y = 7)$
2) $x-y > 0$
3) $x+y < 2$
4) $x^2+5=0$
5) $(2 \leq x \leq 5)$ & $(2 \leq y \leq 5)$
6) $(x > 12)$ и $(y = 3)$

6. Если значения x,y принадлежат отрезку [2;5], то в списке выражений укажите тождественно ложные предикаты:

1) $(x \geq 2)$ или $(y = 7)$
2) $x-y > 0$
3) $x+y<2$
4) $x^2+5<0$
5) $(2\leq x \leq 5)$ & $(2\leq y \leq 5)$
6) $x>12$

7. Множество истинности предиката P(x)=«x+y=0» где x,y - целые числа принадлежат отрезку [-2;4], равно…

1) {-2,-1,1,2}
2) {(-2,2), (-1,1)}
3) {(-2,2), (-1,1), (0,0)}
4) [-2;2]
5) [-1;1]

Критерии оценивания

За каждый правильный ответ начисляется 1 балл

Кол-во баллов	Оценка
5, 6	удовлетворительно
7, 8	хорошо
9, 10	отлично

1. Пусть даны предикаты P(x): «x - четное число» и Q(x): «x кратно 3», определенные на множестве N. Найти области истинности предикатов:

1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$; 3) $\overline{P}(x)$; 4) $P(x) \to Q(x)$

Т.к. $I_p = \{2,4,6,8,10,12,...,2n,...\}$, $I_q = \{3,6,9,12,...,3n,...\}$

1) $I_{P \wedge Q} = I_p \cap I_q = \{6,12,...6n,...\}$

2) $I_{P \vee Q} = I_p \cup I_q = \{2,3,4,6,...,2n,3n,...\}$

3) $I_{\overline{p}} = CI_p = N \setminus I_p = \{1,3,5,...,2n-1,...\}$

4) $I_{P \to Q} = CI_p \cup I_q = \{1,3,5,...,2n-1,...\} \cup \{3,6,9,...,3n,...\}$

Для предиката P(x): "div(x,3)=mod(x,2)", где x изменяется на множестве X= {2,3,5,10,19}, область истинности равна ...

а) {2,3,5,10}

б) {10,19}

b) {2, 3, 5}

г) {2,5, 10}

д) {5}

Примеры предикатов, определенных на множестве натуральных чисел N^2

1. Предикат тождества E: $N^2 \to B$:
$E(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$.
2. Предикат порядка Q: $N^2 \to B$:
$Q(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leq a_2$.
3. Предикат делимости D: $N^2 \to B$:
$D(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда a_1 делится на a_2.
4. Предикат суммы S: $N^3 \to B$:
$S(a_1, a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + a_2 = a_3$.
5. Предикат произведения $П$: $N^3 \to B$:
$П(a_1, a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \cdot a_2 = a_3$.

Пример 3. Записать формулой логики предикатов предложение, отражающее транзитивное свойство делимости целых чисел.

"если a делится на b и b делится на c, то a делится на c",

"если $D(a, b)$ и $D(b, c)$, то $D(a, c)$" или

$$(D(a, b)\ \&\ D(b, c)) \to D(a, c).$$

Пример 4. Дать словесные формулировки следующих составных высказываний (предложений):

1. $S(a, b, c)\ \&\ D(a, d)\ \&\ D(b, d) \to D(c, d)$,

где S и D – предикаты суммы и делимости соответственно (см. пример 1);

2. $\rceil D(a, b)\ \&\ \rceil S(a, b, c)$;

3. $S(a, b, c) \sim S(b, a, c)$;

4. $P_1 \sim P_2$,

где P_1 – предикат “число $3n$ является четным”; P_2 – предикат “число n является четным”.

2. Записать предикатной формулой предложение, которое выражает для произвольных $a, b, c \in N$ в модели

$$N = (N;\, S,\, \Pi,\, E),$$

называемой в логике предикатов *арифметикой натуральных чисел*, где N – множество натуральных чисел и S, Π, E – предикаты суммы, произведения, равенства соответственно, определенные в примере 1:

а) коммутативность умножения;

б) ассоциативность сложения;

в) ассоциативность умножения;

г) дистрибутивность слева умножения относительно сложения;

д) дистрибутивность справа умножения относительно сложения;

е) транзитивность равенства.

Следование и равносильность предикатов

Определение. Предикат Q следует из предиката P, заданного над теми же множествами, что и предикат Q ($P \Rightarrow Q$), если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат P, т.е. если $I_P \subseteq I_Q$

Пример. P(x): x-3=0; Q(x): (x-2)(x-3)=0.

$I_P = \{3\}$, $I_Q = \{2, 3\}$. $\Rightarrow$ $I_P \subseteq I_Q$ $\Rightarrow$ $P \Rightarrow Q$

Следование и равносильность предикатов

Определение. Предикаты P и Q над одними и теми же множествами называют равносильными или эквивалентными ($P \Leftrightarrow Q$), если при любом наборе переменных из соответствующих множеств предикаты принимают одинаковое значение истинности, т.е. если $I_P = I_Q$.

$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$ не являются равносильными.

$\frac{3x + 8}{x^2 + 1} = 0$ и $3x + 8 = 0$ являются равносильными.

Определите, являются ли равносильными предикаты, заданные на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x+3} = x - 1 \text{ и } x + 3 = (x-1)^2$$

$$\frac{4-8x}{2+x} \geq 0 \text{ и } (4-8x)(2+x) \geq 0$$

$$\frac{4-8x}{2+x} > 0 \text{ и } (4-8x)(2+x) > 0$$

$$x^2 - x^4 \geq 0 \text{ и } 1 - x^2 \geq 0$$

Кванторные операции над предикатами

Квантор общности

Определение. Операцией связывания квантором общности называется правило, по которому каждому одноместному предикату P (x), определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$

(читается: «для всякого значения *x* *P(x)* истинное высказывание»

или «Для всех *x* имеет место *P*(*x*)»),

которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x) тождественно истинен, и ложно в противном случае.

Символ $\forall$ происходит от первой буквы англ. all — «все». Сам символ ($\forall$ x) также называют квантором общности по переменной x.

Пример .

Пусть $P(x)$ – предикат “*x* – четное число”.

Тогда $\forall x P(x)$ есть высказывание

«Всякое *x* – четное число» ≡ «Все числа – четные».

Квантор существования

Определение. Операцией связывания квантором существования называется правило, по которому каждому одноместному предикату P (x), определенному на множестве M, ставится в соответствие высказывание, обозначаемое $(\exists x)(P(x))$ (читается: «Существует значение x, такое, что P(x) истинное высказывание» или «Существует x, для которого имеет место $P(x)$»), которое ложно в том и только в том случае, когда P(x) тождественно ложен, и истинно в противном случае.

Символ $\exists$ происходит от первой буквы англ. exist — «существовать». Сам символ $\exists x$ также называют квантором существования по переменной x.

Пример.
Пусть, $P(x)$ – предикат “x – четное число”.
Тогда $\exists x P(x)$ есть высказывание
“Некоторые x – четные числа” ≡ “Существуют четные числа” .

«Выгул кошек и собак воспрещен»

K(x): x-кошка

C(x): x-собака

B(x): для x выгул разрешен

$\forall x((K(x) \lor C(x)) \to \neg B(x))$

$\neg \exists x((K(x) \lor C(x)) \land B(x))$

Примеры

$P(x, y)$ - « x любит y » - двуместный предикат.

$\forall x \exists y$ - « для любого человека существует y – человек, которого он любит»

$\forall y \exists x$ -

$\exists y \forall x$

$\exists x \forall y$

$\forall x \ \forall y$

$\exists y \exists x$

Примеры

Рассмотрим два одноместных предиката на множестве N:

P(x): «$1 \le x$» и Q(x): «$x \vdots 30$».

P(x): «$1 \le x$» - тождественно истинный.

$(\forall x)(1 \le x)$ — «для всякого натурального x число 1 не превосходит x» - истинное высказывание.

$(\exists x)(1 \le x)$ – «существует натуральное x, большее 1» - истинное высказывание.

Q(x): «$x \vdots 30$» - опровержим.

$(\forall x)(x \vdots 30)$ — «для любого x число x является делителем числа 30»

- ложное высказывание.

$(\exists x)(x \vdots 30)$ —

«существует натуральное число x, которое является делителем числа 30»

- истинное высказывание.

Связанные и свободные переменные

Определение. Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется навешивание квантора на переменную x.

Переменная при этом называется связанной и вместо нее подставлять значения уже нельзя.

Несвязанная переменная называется свободной.

Если квантор навешивается на формулу с несколькими переменными, то он уменьшает число несвязанных переменных в этой формуле.

Пример. P(x):«$y<x$» - двухместный предикат определенный на множестве $N^2=N\times N$.

Применим к нему квантор общности по переменной x.

$(\forall\ x)(y < x)$ - одноместный предикат, зависящий от переменной y.

Этот предикат может превратиться как в истинное высказывание (при $y= 1$), так и в ложное (при подстановке вместо y любых натуральных чисел, кроме 1).

Навешивание кванторов на двухместный предикат

При «навешивании» кванторов на двухместную высказывательную форму $Q(x, y)$ можно получить одну из восьми комбинаций:

1) $\forall x \forall y (Q(x, y))$ — «для любого x и любого y $Q(x, y)$»;
2) $\forall y \forall x (Q(x, y))$ — «для любого y и любого x $Q(x, y)$»;
3) $\exists x \exists y (Q(x, y))$ — «существует x и существует y, такие, что $Q(x, y)$»;
4) $\exists y \exists x (Q(x, y))$ — «существует y и существует x, такие, что $Q(x, y)$»;
5) $\exists x \forall y (Q(x, y))$ — «существует x, такой, что для любого y $Q(x, y)$»;
6) $\forall x \exists y (Q(x, y))$ — «для всякого x существует y, такой, что $Q(x, y)$»;
7) $\exists y \forall x (Q(x, y))$ — «существует y, такой, что для любого x $Q(x, y)$»;
8) $\forall y \exists x (Q(x, y))$ — «для всякого y существует x, такой, что $Q(x, y)$».

Одноименные кванторы можно менять местами, что не влияет на истинность высказывания.

Например: $(\exists y)\ (\exists x)\ (x + y = 5)$. Это утверждение имеет тот же смысл, что и $(\exists x)\ (\exists y)\ (x + y = 5)$.

Для разноименных кванторов изменение порядка может привести к изменению истинности высказывания.

Например: $(\forall x)\ (\exists y)\ \ x<y$, т.е. для всякого числа x существует большее число y – истинное высказывание.

Поменяем местами кванторы: $(\exists x)\ (\forall y)\ \ x<y$ – существует число y большее любого числа x – ложное высказывание.

Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Для доказательства истинности утверждения $(\forall x)\ P(x)$ с квантором общности, определенного на множестве М, необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений $x \in$ М в предикат Р(х) последний обращается в истинное высказывание. Если множество М конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество М бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Высказывание $(\forall x)\ P(x)$ ложно, если можно указать такое значение $a \in$ М, при котором $P(x)$ обращается в ложное высказывание $P(a)$. Поэтому, для опровержения высказывания с квантором общности достаточно привести пример.

Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Высказывание $\exists x\ P(x)$ истинно, если можно указать такое значение $a\in$M при котором $P(x)$ обращается в истинное высказывание $P(a)$ Поэтому, чтобы убедиться в истинности высказывания с квантором существования, достаточно привести пример.

Для доказательства ложности утверждения $(\exists\ x)\ P(x)$ с квантором существования, определенного на множестве М, необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений $x\in$M в предикат P(x) последний обращается в ложное высказывание. Если множество М конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество М бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Упражнения

Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

а) $(\forall x)\ (\exists y)\ (x + y = 7)$;
б) $(\exists y)\ (\forall x)\ (x + y = 7)$;
в) $(\exists x)\ (\forall y)\ (x + y = 7)$;
г) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x + y = 7)$;
д) $[(\forall x)\ (\forall y)\ (x + y = 3)] \to (3 = 4)$;
е) $(\forall x)\ [(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0))]$;
ж) $(\forall a)\ \{[(\exists x)\ (ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$;
з) $(\forall b)\ (\exists a)\ (\forall x)\ \{x^2 + ax + b > 0\}$;
и) $(\forall x)\ [((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)]$;
к) $(\exists b)\ (\forall a)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$;
л) $(\exists a)\ (\forall b)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$.

Упражнения

Выяснить, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие предикатами:

a) найдется такое x, что $x + y = 2$;

b) для любых x и y имеет место равенство $x + y = y + x$.

Записать с помощью формул логики предикатов следующее утверждение: «Для лечения любого известного компьютерного вируса имеются программы. Существуют новые (неизвестные) компьютерные вирусы, для лечения которых программы еще не разработаны».

Если обозначить A(x) – «известен компьютерный вирус x», B(x) – «для лечения вируса x существует программа», то с помощью логических связок и кванторов получим формулы:

$\overline{B}(x)$ - против вируса x нет программы;

$\forall x(A(x))$ - любой вирус известен;

$\exists x(\overline{A}(x))$- существуют новые (неизвестные) вирусы;

$\forall x(A(x) \to B(x))$ - если вирус давно известен, то имеется программа для его лечения;

$\exists x(\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x))$ - существуют (появились) новые вирусы, для лечения которых программы ещё не разработаны.

- На языке логики предикатов записать определение убывающей функции

Функция f(x) называется убывающей а множестве M, если для любых чисел x1 и x2, принадлежащих множеству M, из неравенства x1 < x2 следует неравенство f(x1) < f(x2)).

$$(\forall x_1, x_2 \in M,\ x_1 < x_2) : f(x_1) < f(x_2).$$

Домашнее задание

1. Записать словами формулу

$$\exists x \forall y (A(x) \& B(y) \to C(x,y))$$

где, A(x) = “x – студент”; B(y) = “y – экзамен”, C(x, y) = ”x сдал экзамен y”.

2. Записать предикатной формулой высказывание: «Все кошки знают русский язык»

Упражнения

Найти формулу соответствующую предложению. “По меньшей мере один объект обладает свойством P”.
Ответы:

$$а)\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y) \qquad б)\exists x(P(x))$$

$$в)\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge x\neq y) \qquad г)(\exists xP(x))\wedge(\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y))$$

Найти формулу соответствующую предложению. “Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством P”.
Ответы:

$$а)\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y) \qquad б)\exists x(P(x))$$

$$в)\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge x\neq y) \qquad г)(\exists xP(x))\wedge(\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y))$$

Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Определение. Формула логики предикатов определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.
2. Предметные переменные x, y, z, ... есть формулы.
3. Предикаты $P(x)$, $Q(x, y)$, ... , а также выражения с кванторами $\forall xP(x)$, $\exists xR(x)$, $\forall x\exists yQ(x, y)$,... есть формулы.
4. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \vee B$, $A \& B$, $A \to B$, $A \sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.
5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

Являются ли формулами следующие выражения

а) $A \,\&\, B \rightarrow C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x \exists y Q(x, y, z) \,\&\, \forall x \exists y P(x, y, u)$.

в) $\forall \mathrm{x} \exists \mathrm{y} \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \Rightarrow \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$

Пример.

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов:

а) $A \& B \to C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$.

Проанализируем последовательно это выражение.

Предикат $Q(x, y, z)$ – формула;

Выражение $\forall x \exists y Q(x, y, z)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная z – свободная.

Предикат $P(x, y, u)$ – формула.

Выражение $\forall x \exists y P(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменная u – свободная.

Выражение $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$ – формула; переменные x, y – связанные, переменные z, u – свободные.

2. Выражение $\forall x \exists y P(x,y,z) \Rightarrow Q(x,y,z)$ формулой **не** является. Действительно, выражение $\forall x \exists y P(x,y,z)$ есть формула, в которой переменные x и y связанные, а переменная z свободная. Выражение $Q(x,y,z)$ также формула, но в ней все переменные x, y, z свободные.

Равносильные формулы

Определение. Формулы F и G, определенные на некотором множестве М, называются ***равносильными на этом множестве***, если при любых подстановках констант вместо переменных они принимают одинаковые значения.

Определение. Формулы, равносильные на любых множествах, будем называть просто ***равносильными***.

Являются ли равносильными предикаты:
а) $P(x)$: $(3x+8)/(x^2+1)=0$ и $Q(z)$: $-6z-16=0$

б) $P(x)$:$(x+2)(x-3)=0$ и $Q(x)$: $(x-3)=0$
На множестве действительных чисел?

Следствия и равносильности логики предикатов

Переход от одних формул к равносильным им другим формулам логики предикатов может быть произведен по следующим правилам:

1. **Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.**

2. Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда

$$(\overline{\forall x A(x)}) \equiv \exists x(\overline{A(x)}).$$

$$(\overline{\exists x A(x)}) \equiv \forall x(\overline{A(x)}).$$

3. Вынос квантора за скобки.
Пусть формула $A(x)$ содержит переменную x, а формула B не содержит переменной x, и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$$\forall xA(x) \vee B \equiv \forall x(A(x) \vee B).$$
$$\forall xA(x) \& B \equiv \forall x(A(x) \& B).$$
$$\exists xA(x) \vee B \equiv \exists x(A(x) \vee B).$$
$$\exists xA(x) \& B \equiv \exists x(A(x) \& B).$$

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции **и квантора существования** относительно дизъюнкции**.**
Пусть формула B, так же, как и формула A, зависит от x. Тогда

$$\forall xA(x) \ \& \ \forall xB(x) \equiv \forall x(A(x) \ \& \ B(x)).$$

$$\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \equiv \exists x(A(x) \vee B(x)).$$

5. Перестановка одноименных кванторов.

$$\forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y).$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y).$$

Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя!

Следствия и равносильности логики предикатов

Равносильности для $\exists$	Правила	Равносильности для $\forall$
$\exists x \exists y\, Q(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, Q(x, y)$	Правила перестановки кванторов	$\forall x \forall y\, Q(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, Q(x, y)$
$\exists x \forall y\, Q(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x\, Q(x, y)$		
$\overline{\exists} x\, F(x) \Leftrightarrow \forall x\, \overline{F}(x)$	Перенос отрицания с квантора на предикат	$\overline{\forall} x\, F(x) \Leftrightarrow \exists x\, \overline{F}(x)$
$\overline{\exists} x\, \overline{F}(x) \Leftrightarrow \forall x\, F(x)$		$\overline{\forall} x\, \overline{F}(x) \Leftrightarrow \exists x\, F(x)$
$\exists x\, (F(x) \vee \Phi(x)) \Leftrightarrow \exists x\, F(x) \vee \exists x\, \Phi(x)$	Правила дистрибутивности кванторов	$\forall x\, (F(x) \wedge \Phi(x)) \Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall x\, \Phi(x)$
$\exists x\, (F(x) \wedge \Phi(x)) \Rightarrow \exists x\, F(x) \wedge \exists x\, \Phi(x)$		$\forall x\, (F(x) \vee \Phi(x)) \Rightarrow \forall x\, F(x) \vee \forall x\, \Phi(x)$
$\exists x\, (M \wedge F(x)) \Rightarrow M \wedge \exists x\, F(x)$		$\forall x\, (M \wedge F(x)) \Rightarrow M \wedge \forall x\, F(x)$
$\exists x\, (M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \exists x\, F(x)$		$\forall x\, (M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \forall x\, F(x)$

Приведенные и нормальные формулы

Определение. Формулы, в которых из логических символов имеются только символы &, V и ¬, причем символ ¬ встречается лишь перед символами предикатов, называются ***приведенными*** формулами.

Пример.

1. $\boldsymbol{A(x) \& B(x, y)}$.
2. $\boldsymbol{\forall x A(x) \vee \exists x \neg B(x, y)}$.
3. $\neg(A(x) \& B(x, y))$.
4. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg B(x, y)$.
5. $\neg(\forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg B(x, y))$.

Теорема. Для **каждой** формулы существует **равносильная** ей **приведенная формула**, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.

Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Существуют две задачи, определяющие связь между суждениями и формулами логики предикатов:
1) выражение суждения в виде формулы логики предикатов;
2) интерпретация формулы логики предикатов.

Суждение – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие свойств предметов, отношений между предметами.

Простым суждением назовем суждение, в котором нельзя выделить часть, в свою очередь являющуюся суждением.

Среди простых суждений выделяют ***атрибутивные суждения*** и ***суждения об отношениях.***

Атрибутивные суждения

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы:

Типы атрибутивных суждений	На языке логики предикатов
"a есть P"	$P(a)$
"Все S есть P"	$\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$
"Ни один S не есть P"	$\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$
"Некоторые S есть P"	$\exists x(S(x) \,\&\, P(x))$
"Некоторые S не есть P"	$\exists x(S(x) \,\&\, \neg P(x))$

Если кванторная переменная связана квантором общности ($\forall$), то в формуле используется знак **импликации** ($\Rightarrow$), а если кванторная переменная связана квантором существования ($\exists$), то в формуле используется знак **конъюнкции** (&).

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) **Веста – собака.**

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат $P(x)$ = "x – собака".

Наше суждение можно выразить формулой: P(в).

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

б) **Всякая логическая функция может быть задана таблицей**.

Введем предикаты:

$S(x)$ = "x – логическая функция";

$P(x)$ = "x может быть задана таблицей".

Искомая формула: $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

в) **Ни один народ не хочет войны**.

Введем предикаты:
$S(x)$ = "x – народ";
$P(x)$ = "x хочет войны".
Суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

г) **Некоторые журналисты были в космосе**.

Введем предикаты:
$S(x)$ = "x – журналист";
$P(x)$ = "x был в космосе".
Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \,\&\, P(x))$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

д) **Некоторые современники динозавров не вымерли**.

Введем предикаты:
$S(x)$ = "x – современник динозавров";
$P(x)$ = "x вымер".
Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \mathbin{\&} \neg P(x))$.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений: определений, теорем, необходимых и достаточных условий.

Пример. Теорема Ферма

«Для любого целого $n > 2$ не существует натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству: $x^n+y^n = z^n$».

Введем предикаты:

$N(x)$ = "x – натуральное число";

$M(x)$ = "$x > 2$";

$P(x,y,z,n)$ = "$x^n + y^n = z^n$".

Для любых чисел x, y, z, n условие (посылка) теоремы Ферма есть конъюнкция $N(x)\&N(y)\&N(z)\&N(n)\&M(n)$, а заключение есть $\neg P(x, y, z, n)$.

Поэтому теорема Ферма формулируется следующим образом:

$$\forall x \forall y \forall z \forall n (N(x)\&N(y)\&N(z)\&N(n)\&M(n) \Rightarrow \neg P(x, y, z, n)).$$

Если теорема имеет вид $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, то предикат $Q(x)$ является ***следствием*** предиката $P(x)$. При этом предикат $Q(x)$ называется ***необходимым*** условием предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ – ***достаточным*** условием предиката $Q(x)$.

Пример.

Запишем в виде формулы логики предикатов утверждение: "Если число делится на 6, то оно делится на 3".

Введем предикаты $P(x)$ = "x делится на 6";

$Q(x)$ = "x делится на 3". Наше утверждение формулируется следующим образом:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Предикат $P(x)$ (делимость на 6) является достаточным условием предиката $Q(x)$ (делимость на 3).

Предикат $Q(x)$ (делимость на 3) является необходимым условием предиката $P(x)$ (делимость на 6).