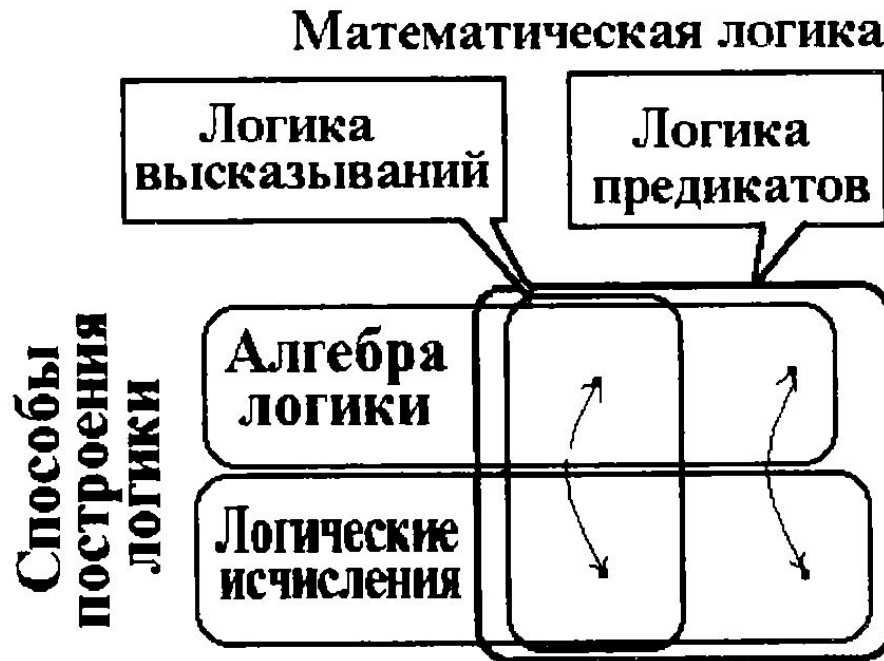


# ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

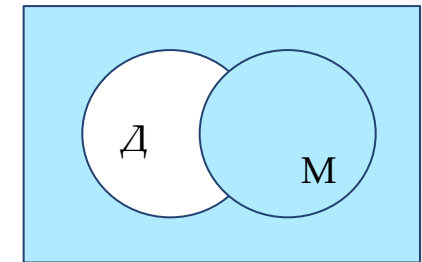
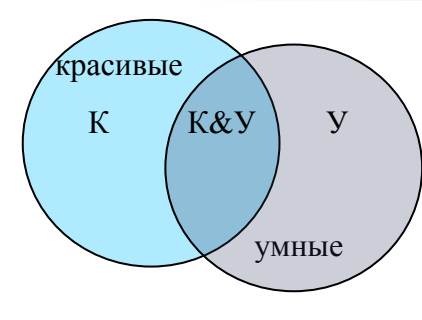
# Состав математической ЛОГИКИ



# Высказывания

Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

- 1) ~~Здравствуй!~~
- 2) Заяц белый или серый .
- 3) Этот человек умный и красивый.
- 4) ~~Какая температура на улице?~~
- 5) Если идёт дождь, то крыши мокрые .
- 6) ~~Уходя гасите свет.~~
- 7) Бразилия – страна Северной Америки.
- 8) Число  $x$  не меньше единицы.



# Пример.

## Предикат

"Икс любит кашу"

Если вместо неизвестного Икс подставить, например Маша, либо Даша, либо Саша, то получится:

- «Маша любит кашу»
  - «Даша любит кашу»
  - «Саша любит кашу»
- } высказывания

Предикат — это предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него конкретных значений переменных.

# Примеры предикатов

$P(x)$  = «Икс любит кашу» – одноместный предикат.

$M = \{\text{Маша, Даша, Саша}\}$

Предметная область

Предметные переменные

Пусть значения истинности высказываний следующие:

«Маша любит кашу» - И

«Даша любит кашу» - Л

«Саша любит кашу» - И

$x$	$P(x)$
Маша	И
Даша	Л
Саша	И

Тогда  $P(\text{Маша}) = \text{И}$ ,  $P(\text{Даша}) = \text{Л}$ ,  $P(\text{Саша}) = \text{И}$ .

$I_p = \{\text{Маша, Саша}\}$  - область истинности предиката  $P(x)$ .

# Одноместный предикат

**Определение 1.** Одноместным предикатом  $P(x)$  называется всякая функция одного переменного, аргумент  $x$  которой определен на некотором множестве  $M$ , а функция при этом принимает одно из двух значений: истина (1) или ложь (0).

Множество  $M$ , на котором задан предикат, называется областью определения (или предметной областью) предиката.

Множество  $I_p$ , на котором предикат принимает истинные значения, называется областью истинности предиката  $P(x)$ .

# Примеры одноместных предикатов

$P_1(x)$  = « $x$  – простое число» - одноместный предикат.

Пусть  $M_{P_1}$  - натуральные числа от 2 до 20.

область определения  
(предметная область)

Тогда, например,  $P(2)=1$ ,  $P(4)=0$

$I_{P_1} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ .

область истинности  
предиката  $P_1(x)$

$P_2(x)$  = « $x$  – четное число»,

$M_{P_2}$  – целые числа от -10 до 10. Тогда  $I_{P_2} = ?$

$P_3(x)$  = « $x$  – больше 10»

$M_{P_3}$  – вещественные числа. Тогда  $I_{P_3} = ?$

# Двухместный предикат

Пусть предметное множество  $M$  - млекопитающие. Рассмотрим предикат  $P(x)$ : «у  $x$  четыре ноги». - **одноместный**

Тогда  $P(\text{слон}) = 1$ ,  $P(\text{кошка}) = 1$ ,  $P(\text{человек}) = 0$ .

Пусть  $N$  - множество натуральных чисел. Рассмотрим предикат

$G(x, y)$ : « $x < y$ ».

Тогда, например,  $G(1, 3) = 1$ ,  $G(8, 5) = 0$ .

Он определен на множестве  $M = N \times N$  (пары натуральных чисел)

**двухместный**



# Двухместный предикат

Пусть предметные множества  $L = \{\text{Маша, Саша}\}$  – люди,

$B = \{\text{каша, борщ, солянка}\}$

Рассмотрим предикат  $K$ : « $l$  любит кушать  $b$ »

двухместный

Он определен на множестве

$M = L \times B = \{(\text{Маша, каша}), (\text{Маша, солянка}), (\text{Маша, борщ}), (\text{Саша, каша}), (\text{Саша, солянка}), (\text{Саша, борщ})\}$

Если, например, Маша любит солянку и кашу, то

$K(\text{Маша, солянка})=1,$

$K(\text{Маша, каша})=1,$

$K(\text{Маша, борщ})=0,$

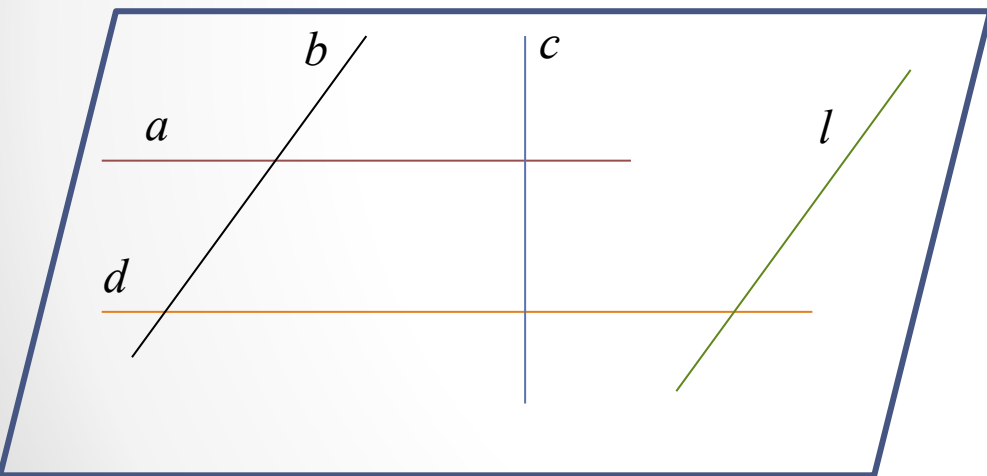
L	B	$K(l,b)$
Маша	каша	1
Маша	борщ	0
Маша	солянка	1
Саша	каша	0
Саша	борщ	1
Саша	солянка	0

# Двухместный предикат

**Определение 2.** Двухместным предикатом  $P(x,y)$  называется функция двух переменных  $x$  и  $y$ , определённая на множестве  $M=M_1 \times M_2$  и принимающая значения из множества  $\{1,0\}$ .

# Примеры двухместных предикатов

1. Пусть  $Q(x,y)$  – « $x = y$ »,  $M=R \times R$ .
2.  $F(x,y)$  – « $x \parallel y$ » - прямая  $x$  параллельна прямой  $y$ , определённый на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.



$I_Q =$

$I_F =$

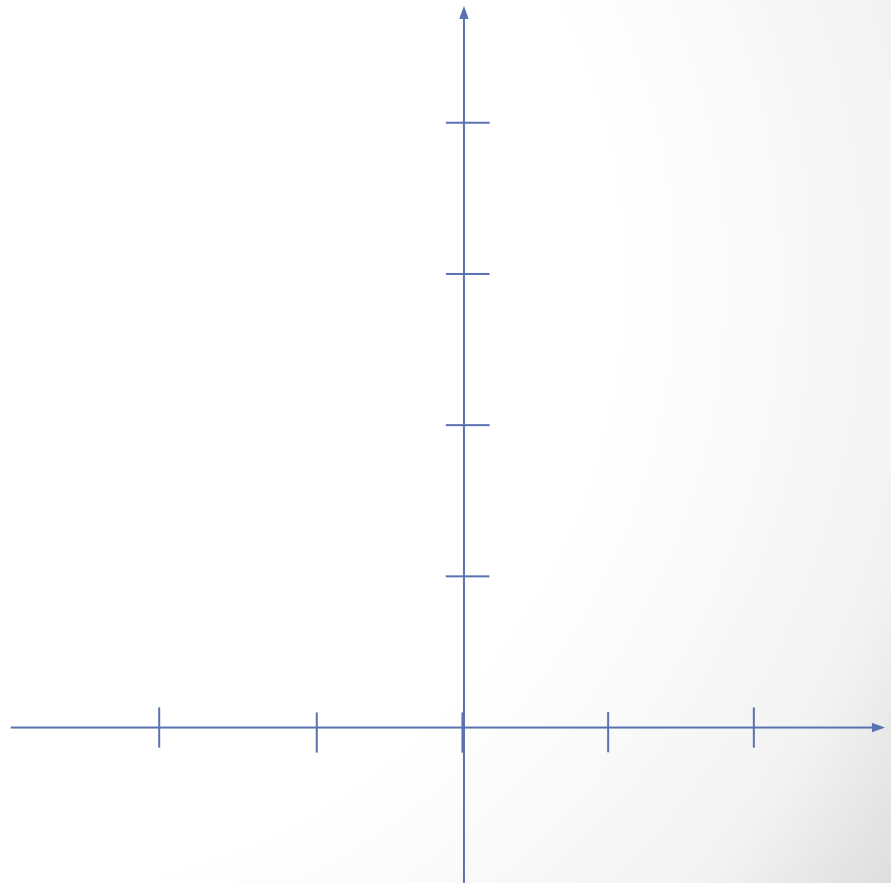
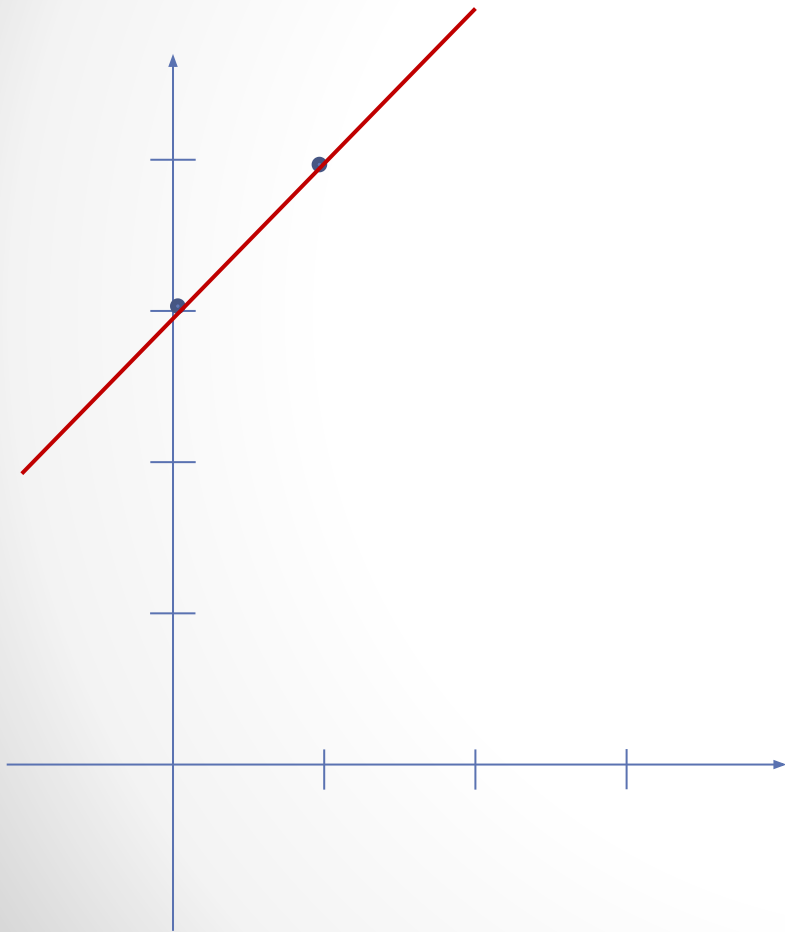
**Пример.** Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если  $M = \mathbb{R}$  для одноместных предикатов и  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  для двухместных предикатов:

1.  $x + 5 = 1$       одноместный предикат  $P(x), I_P = \{-4\}$ ;
2. при  $x = 2$  выполняется равенство  $x^2 - 1 = 0$       ложное высказывание
3.  $x^2 - 2x + 1 = 0$       одноместный предикат  $P(x), I_P = \{1\}$ ;
4. существует такое число  $x$ , что  $x^3 - 2x + 1 = 0$       Истинное высказывание
5.  $x + 2 < 3x - 4$       одноместный предикат  $P(x), I_P = (3; +\infty)$ ;
6. однозначное неотрицательное число  $x$  кратно 3  
одноместный предикат  $P(x), I_P = \{0; 3; 6; 9\}$ ;
7.  $(x + 2) - (3x - 4)$       предложение не является предикатом
8.  $x^2 + y^2 > 0$       двухместный предикат  $Q(x, y), I_Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Пример.** Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката

$$x+3=y$$

$$x^2-y \geq 1$$



# Определение предиката

**Определение.** Предикатом  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется функция, аргументы которой определены на некоторых множествах  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  ( $x_i \in M_i$ ), а сама она принимает два значения: И (0) и Л (1).

Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются *предметными переменными*, а множество  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  – *предметной областью*.

Предикат от  $n$  переменных называется  *$n$ -местным предикатом*.  
Высказывание есть 0-местный предикат.

Над предикатами можно производить обычные логические операции и получать при этом другие предикаты. Таким образом, можно говорить об *алгебре предикатов*.

# Виды предикатов

$$P(x,y): 2(x+y)=2y+2x$$

Выполняется для всех  $x$  и  $y$  –  
тождественно-истинный

$$Q(x): x+1=x$$

Не выполняется ни для каких  $x$  –  
тождественно-ложный

$$F(x,y): x+y=5$$

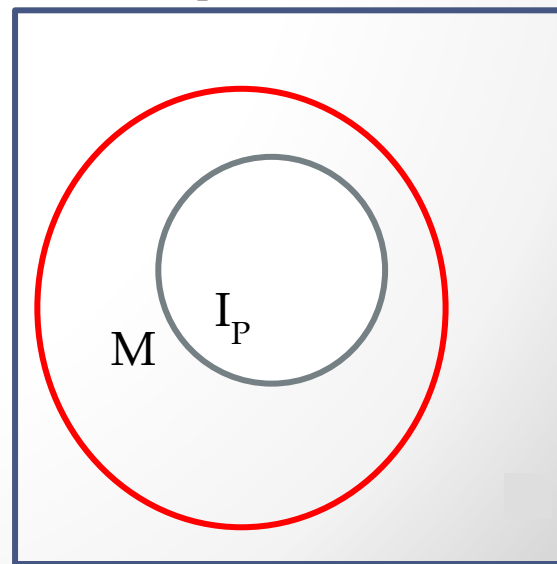
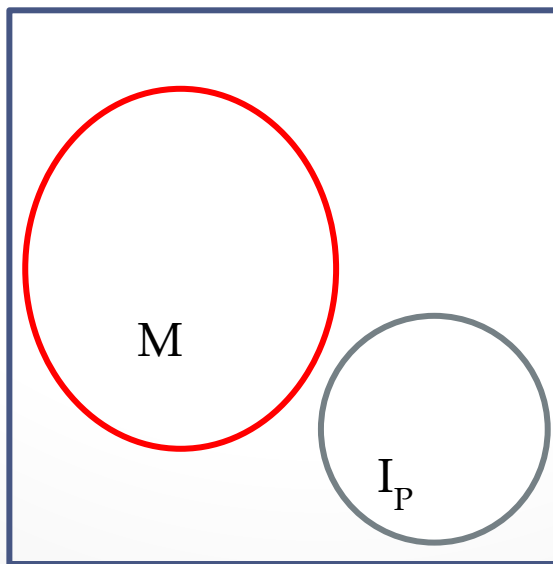
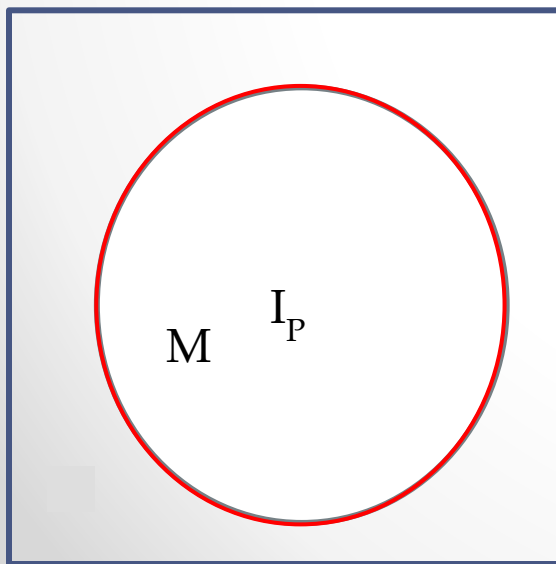
Выполняется для некоторых  $x$  и  $y$  –  
выполнимый

# Виды предикатов

Предикат называется **тождественно истинным**, если на всех наборах своих переменных принимает значение 1 ( $I_p = M$ ).

Предикат называется **тождественно ложным** если на всех наборах своих переменных принимает значение 0 ( $I_p \not\subseteq M$ ).

Предикат называется **выполнимым**, если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1 ( $I_p \subset M$ ).





# Виды предикатов

Примеры.

$P(x)$ - «В месяце  $x$  температура воздуха в Ярославле не опускается ниже 0 уже 100 лет».

Если  $M = \{\text{Июнь, июль, август}\}$ , то  $P(x)$  – тождественно-истинный  
одноместный предикат.

Если  $M = \{\text{декабрь, январь, февраль}\}$ , то  $P(x)$  – тождественно-ложный  
одноместный предикат.

Если  $M = \{\text{январь, февраль, март, ... ноябрь, декабрь}\}$ , то  $P(x)$  –  
выполнимый одноместный предикат.

# Логические операции над предикатами

...

# Логические операции над высказываниями

В естественном языке	В логике	Обозначение
неверно, что ...	отрицание	$\neg, \bar{\phantom{x}}$
... и ...   ... хотя ...   ... но ...   ... а ...   ... однако ...	конъюнкция	$\&, \wedge$
... или ...	дизъюнкция	$\vee$
если ..., то ...   из ... следует ...   ... влечет ...   ... необходимо ...	импликация	$\rightarrow$
... тогда и только тогда, когда ...   ... равносильно ...   ... необходимо и достаточно...   ... в том и только в том случае ...	эквивалентность	$\leftrightarrow, \sim, \equiv$

# Конъюнкция предикатов

Пример.

Пусть на некотором множестве  $M$  – натуральные числа определены предикаты  $P(x)$  и  $Q(x)$ :

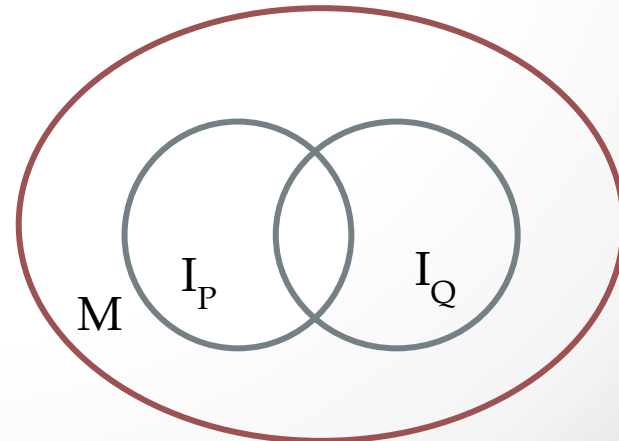
$P(x)$ : “ $x$  – четное число”

$Q(x)$ : “ $x$  кратно 3”

Тогда

$P(x) \wedge Q(x)$  “ $x$  – четное число и  $x$  кратно трем” = “ $x$  делится на 6”

$\wedge Q(x)$ :

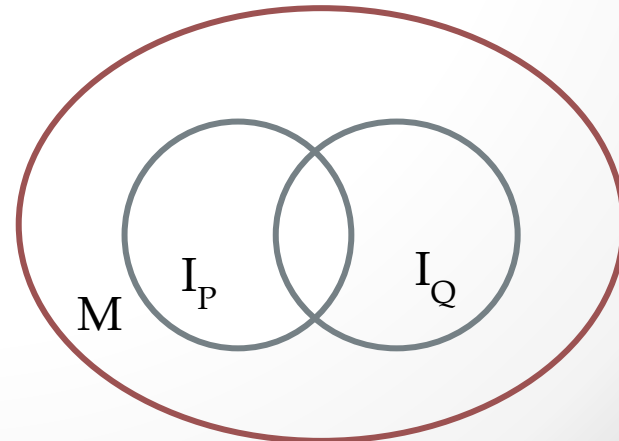


# Конъюнкция предикатов

Пусть на некотором множестве  $M$  определены два предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$ .

**Определение.** Конъюнкцией двух предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \& Q(x)$ , который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях  $x \in M$ , при которых **каждый** из предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката  $P(x) \& Q(x)$  является общая часть областей истинности предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , т.е. пересечение  $I_{P \& Q} = I_P \cap I_Q$ .



# Дизъюнкция предикатов

Пример.

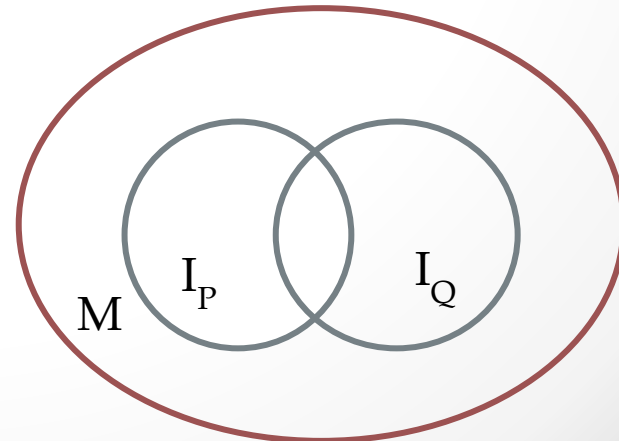
Пусть на некотором множестве  $M$  – натуральные числа определены предикаты  $P(x)$  и  $Q(x)$ :

$P(x)$ : “ $x$  – четное число”

$Q(x)$ : “ $x$  кратно 3”

Тогда

$P(x) \vee Q(x)$ : “ $x$  – четное число или  $x$  кратно трем”

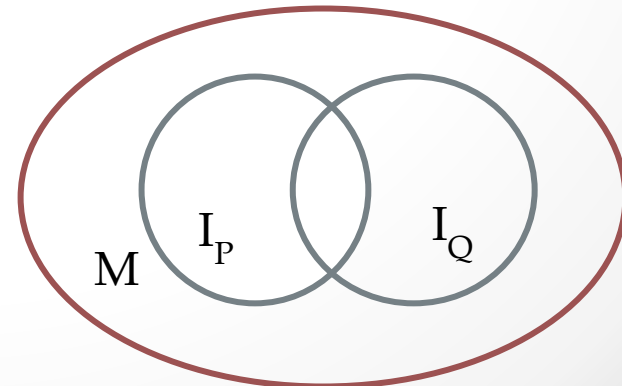


# Дизъюнкция предикатов

Пусть на некотором множестве  $M$  определены два предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$ .

**Определение.** Дизъюнкцией двух предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \vee Q(x)$ , который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях  $x \in M$ , при которых **каждый** из предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката  $P(x) \vee Q(x)$  является объединение областей истинности предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , т. е.  $I_{P \vee Q} = I_P \sqcup I_Q$ .



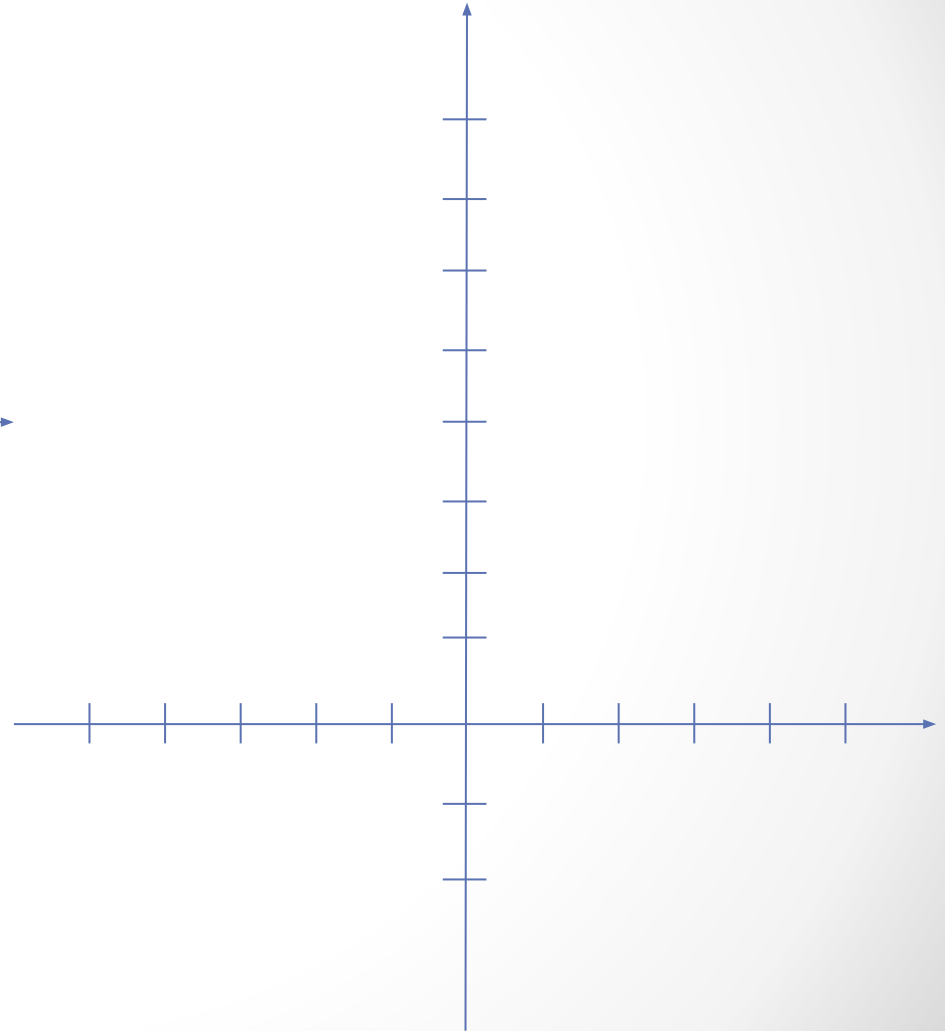
Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката:

$$((x+5>0)\&(x<4))$$

$$((x+5>0) \vee (y<4))$$

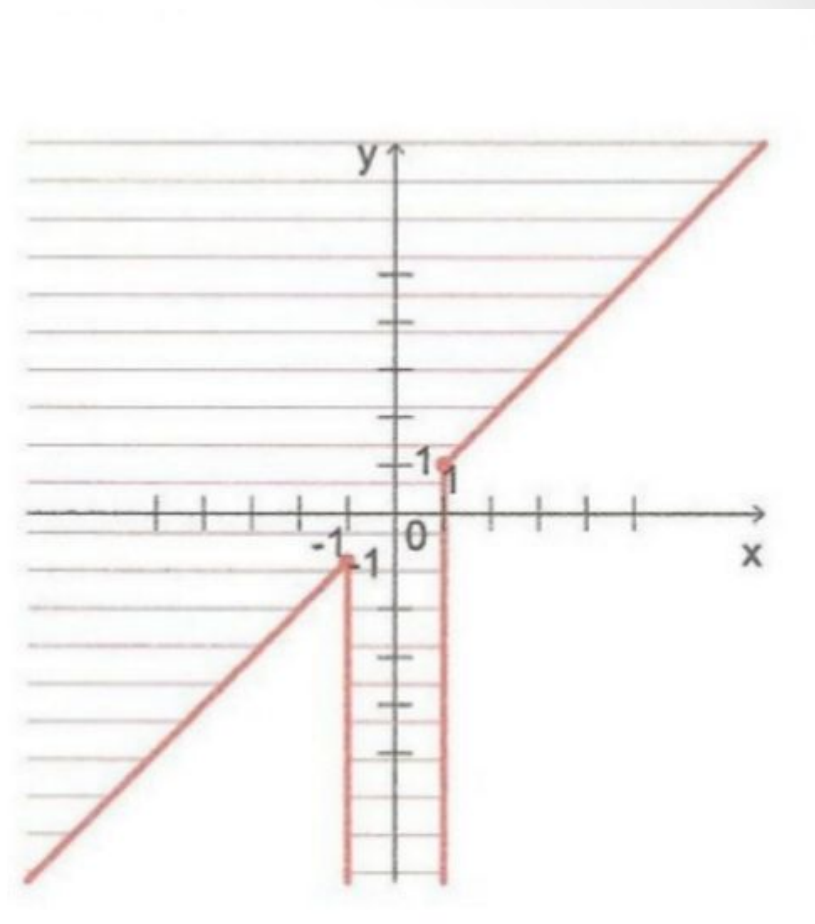
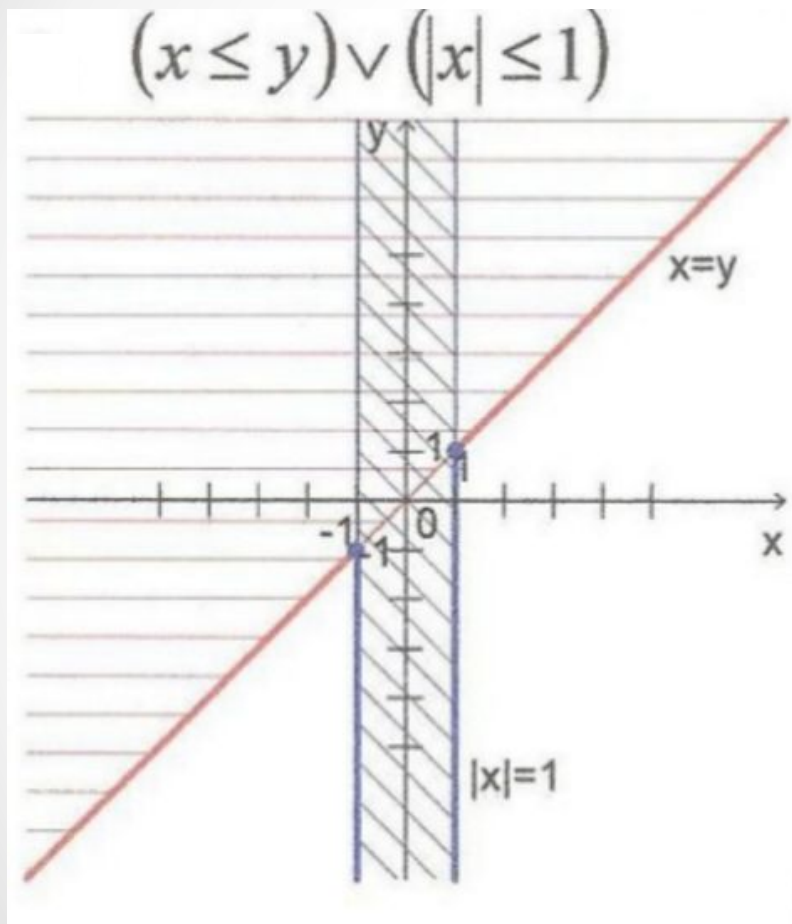
$$((x-1>0) \vee (y=4))$$

$$((x-1>0) \& (y=4))$$



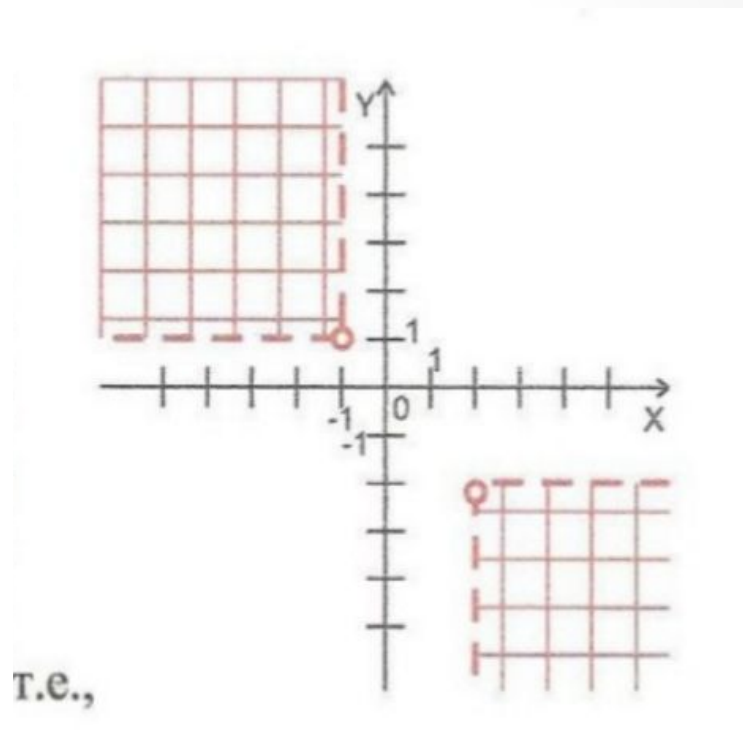
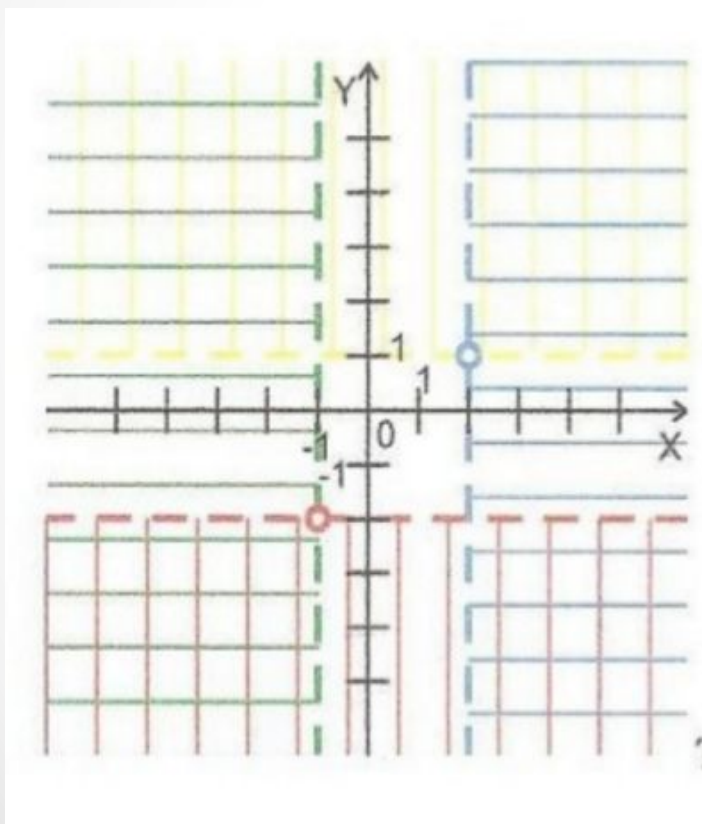


Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката



Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката

$$((x > 2) \vee (y > 1)) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2))$$

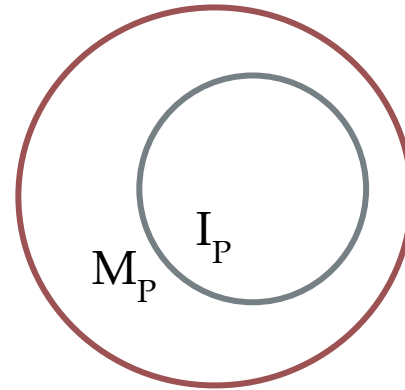


Пример.

Пусть на некотором множестве  $M$  – натуральные числа  
определен предикат  $P(x)$ : “ $x$  – четное число”

Тогда

$\overline{P(x)}$ : “ $x$  – нечетное число”

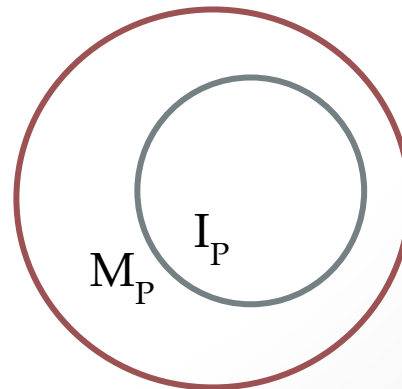


# Отрицание предиката

Пусть на некотором множестве  $M$  определен предикат  $P(x)$ .

**Определение.** Отрицанием предиката  $P(x)$  называется новый предикат  $\overline{P(x)}$ , который принимает значение «истина» при всех значениях  $x \in M$ , при которых предикат  $P(x)$  принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях  $x \in M$ , при которых предикат  $P(x)$  принимает значение «истина».

$$I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = C I_P$$



# Импликация предикатов

Пример.

Пусть на некотором множестве  $M$  – натуральные числа определены предикаты  $P(x)$  и  $Q(x)$ :

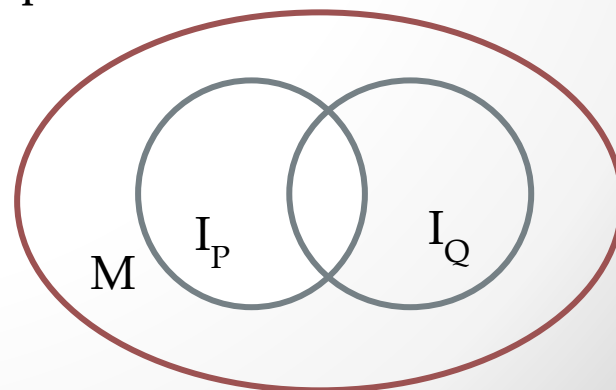
$P(x)$ : “ $x$  – четное число”

$Q(x)$ : “ $x$  кратно 3”

Тогда

$P(x) \rightarrow Q(x)$ : “Если  $x$  – четное число, то  $x$  кратно трем”

$\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ : “ $x$  – нечетное число или  $x$  кратно трем”



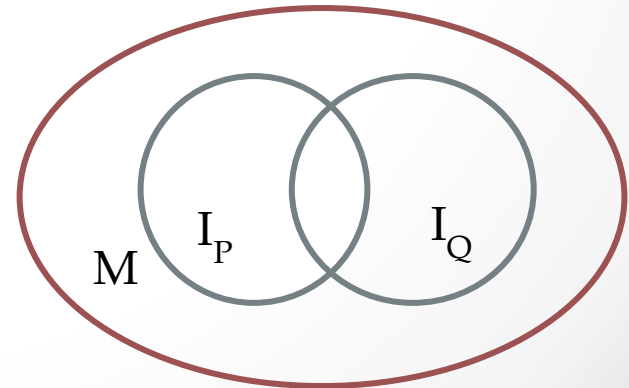
# Импликация предикатов

Пусть на некотором множестве  $M$  определены два предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$ .

**Определение.** Импликацией предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \rightarrow Q(x)$ , который является ложным при тех и только тех значениях  $x \in M$ , при которых одновременно  $P(x)$  принимает значение «истина», а  $Q(x)$  – значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \overline{P(x) \& \overline{Q(x)}} \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x) \Rightarrow I_{P \rightarrow Q(x)} = I_P^- \square I_Q$$

При выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.

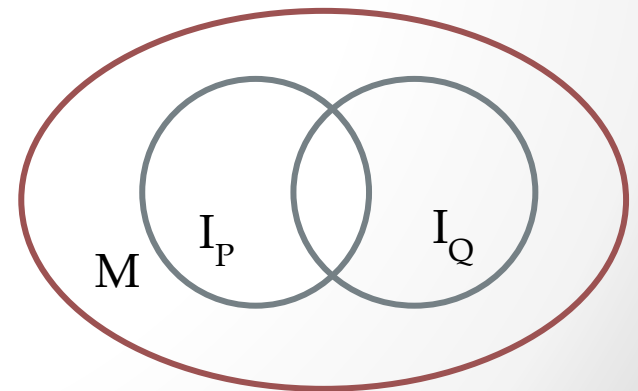


# Эквиваленция предикатов

Пусть на некотором множестве  $M$  определены два предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$ .

**Определение.** Эквиваленцией предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \equiv Q(x)$ , который является истинным при тех и только тех значениях  $x \in M$ , при которых либо  $P(x)$  и  $Q(x)$  одновременно принимают значение «ложь», либо одновременно принимают значение «истина».

При выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.



Изобразите на координатной прямой или координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а)  $(x > 2) \wedge (x < 2)$ ;

б)  $(x > 2) \vee (x < 2)$ ;

в)  $(x > 2) \equiv (x < 2)$ ;

г)  $(x > 0) \wedge (y < 0)$ ;

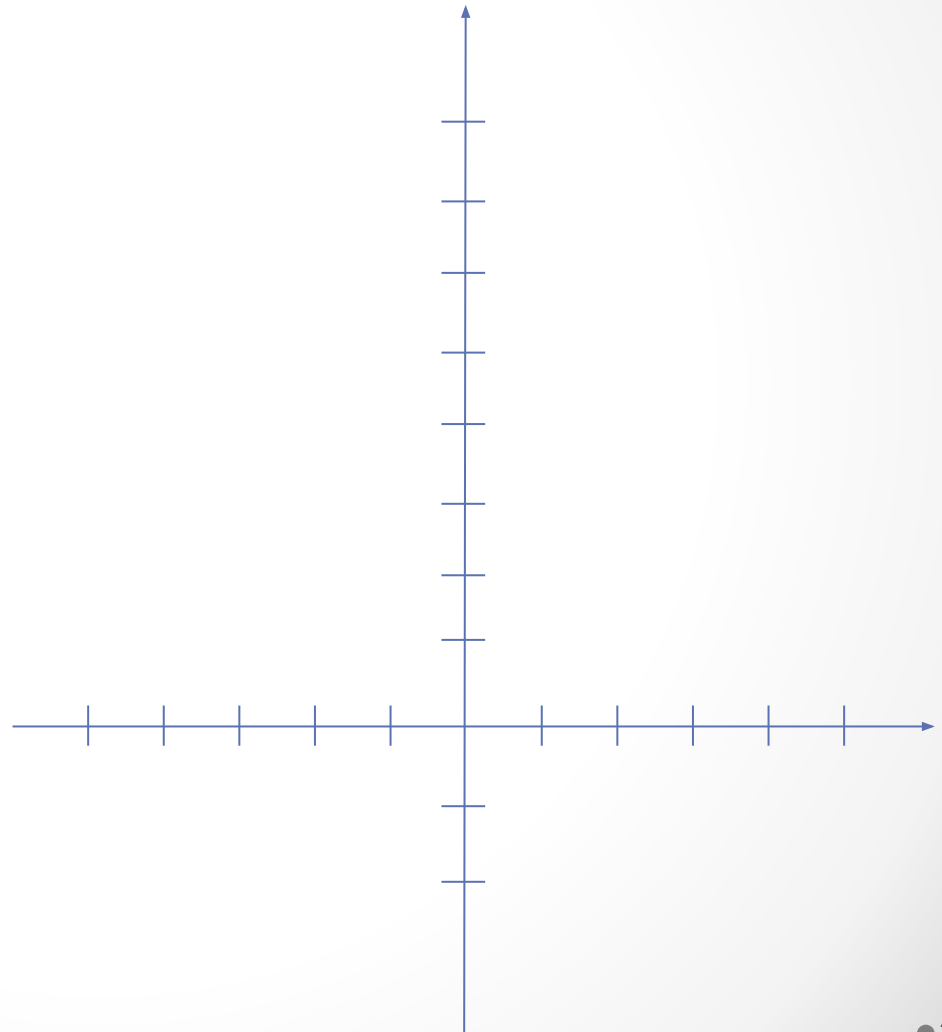
д)  $(x > 0) \vee (y < 0)$ ;

е)  $(x > 0) \rightarrow (y < 0)$ ;

ж)  $(|x| < 3) \wedge (x \geq 2)$ ;

з)  $(x^2 + y^2 > 1) \leftrightarrow (xy < 0)$ ;

л)  $(x > 2) \rightarrow (x < 2)$ ;





# Тест

Состоит из 7 вопросов.

Правильный вариант ответа может быть не один.

1. Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  переменные со значениями из  $(-\infty, \infty)$ . Указать какое из следующих выражений является двуместным предикатом

1) $x+y=z$	2) $\sin(x+y) > z$	3) $x^2 > z+y$	4) $2 \times 2 = 4$	5) $x > y$
------------	--------------------	----------------	---------------------	------------

2. Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  переменные со значениями из  $(-\infty, \infty)$ . Указать какое из следующих выражений **не** является предикатом

1) $x+y=z$	2) $\sin(x)+y$	3) $x^2 > y$	4) $2 \times 2 = 4$	5) $x^2 < y$
------------	----------------	--------------	---------------------	--------------

3. Пусть даны предикаты  $P(x)$ : « $x$  - четное число» и  $Q(x)$ : « $x$  кратно 4», определенные на множестве  $\mathbb{N}$ . Укажите области истинности предиката:

$P(x) \vee Q(x)$ :

- 1)  $I = \{6, 12, 18, 24, \dots, 6n, \dots\}$
- 2)  $I = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}$
- 3)  $I = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- 4)  $I = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots, 4n, \dots\}$

4. Пусть даны предикаты  $P(x)$ : « $x$  - четное число» и  $Q(x)$ : « $x$  кратно 4», определенные на множестве  $\mathbb{N}$ . Укажите области истинности предиката:

- |                 |   |
|-----------------|---|
| $P(x)$          | 1) $I = \{6, 12, 18, 24, \dots, 6n, \dots\}$    |
| $\wedge Q(x)$ : | 2) $I = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}$       |
|                 | 3) $I = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$               |
|                 | 4) $I = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots, 4n, \dots\}$ |

5. Если значения  $x, y$  принадлежат отрезку  $[2; 5]$ , то в списке выражений укажите тождественно истинные предикаты:

- 1)  $(x \geq 2)$  или  $(y = 7)$
- 2)  $x - y > 0$
- 3)  $x + y < 2$
- 4)  $x^2 + 5 = 0$
- 5)  $(2 \leq x \leq 5) \ \& \ (2 \leq y \leq 5)$
- 6)  $(x > 12)$  и  $(y = 3)$

6. Если значения  $x, y$  принадлежат отрезку  $[2;5]$ , то в списке выражений укажите тождественно ложные предикаты:

1)  $(x \geq 2)$  или  $(y = 7)$

2)  $x - y > 0$

3)  $x + y < 2$

4)  $x^2 + 5 < 0$

5)  $(2 \leq x \leq 5) \& (2 \leq y \leq 5)$

6)  $x > 12$

7. Множество истинности предиката  $P(x) = \langle x + y = 0 \rangle$  где  $x, y$  - целые числа принадлежат отрезку  $[-2;4]$ , равно...

1)  $\{-2, -1, 1, 2\}$

2)  $\{(-2, 2), (-1, 1)\}$

3)  $\{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0)\}$

4)  $[-2; 2]$

5)  $[-1; 1]$

# Критерии оценивания

За каждый правильный ответ начисляется 1 балл

Кол-во баллов	Оценка
5, 6	удовлетворительно
7, 8	хорошо
9, 10	отлично

1. Пусть даны предикаты  $P(x)$ : « $x$  - четное число» и  $Q(x)$ : « $x$  кратно 3», определенные на множестве  $\mathbb{N}$ . Найти области истинности предикатов:

1)  $P(x) \wedge Q(x)$ ; 2)  $P(x) \vee Q(x)$ ; 3)  $\overline{P(x)}$ ; 4)  $P(x) \rightarrow Q(x)$

Т.к.  $I_P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots\}$ ,  $I_Q = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\}$

1)  $I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{6, 12, \dots, 6n, \dots\}$

2)  $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, \dots, 2n, 3n, \dots\}$

3)  $I_{\overline{P}} = CI_P = \mathbb{N} \setminus I_P = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$

4)  $I_{P \rightarrow Q} = CI_P \cup I_Q = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\} \cup \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$

Для предиката  $P(x)$ : " $\text{div}(x,3) = \text{mod}(x,2)$ ", где  $x$  изменяется на множестве  $X = \{2, 3, 5, 10, 19\}$ , область истинности равна ...

а)  $\{2, 3, 5, 10\}$

б)  $\{10, 19\}$

в)  $\{2, 3, 5\}$

г)  $\{2, 5, 10\}$

д)  $\{5\}$

# Примеры предикатов, определенных на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}^2$

1. Предикат тождества  $E: \mathbb{N}^2 \rightarrow B$ :

$E(a_1, a_2) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2$ .

2. Предикат порядка  $Q: \mathbb{N}^2 \rightarrow B$ :

$Q(a_1, a_2) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a_1 \leq a_2$ .

3. Предикат делимости  $D: \mathbb{N}^2 \rightarrow B$ :

$D(a_1, a_2) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a_1$  делится на  $a_2$ .

4. Предикат суммы  $S: \mathbb{N}^3 \rightarrow B$ :

$S(a_1, a_2, a_3) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a_1 + a_2 = a_3$ .

5. Предикат произведения  $\Pi: \mathbb{N}^3 \rightarrow B$ :

$\Pi(a_1, a_2, a_3) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a_1 \cdot a_2 = a_3$ .

**Пример 3.** Записать формулой логики предикатов предложение, отражающее транзитивное свойство делимости целых чисел.

“если  $a$  делится на  $b$  и  $b$  делится на  $c$ , то  $a$  делится на  $c$ ”,

“если  $D(a, b)$  и  $D(b, c)$ , то  $D(a, c)$ ” или  
 $(D(a, b) \& D(b, c)) \rightarrow D(a, c)$ .



**Пример 4.** Дать словесные формулировки следующих составных высказываний (предложений):

$$1. S(a, b, c) \ \& \ D(a, d) \ \& \ D(b, d) \ \rightarrow \ D(c, d),$$

где  $S$  и  $D$  – предикаты суммы и делимости соответственно (см. пример 1);

$$2. \exists D(a, b) \ \& \ \exists S(a, b, c);$$

$$3. S(a, b, c) \sim S(b, a, c);$$

$$4. P_1 \sim P_2,$$

где  $P_1$  – предикат “число  $3n$  является четным”;  $P_2$  – предикат “число  $n$  является четным”.

2. Записать предикатной формулой предложение, которое выражает для произвольных  $a, b, c \in N$  в модели

$$N = (N; S, П, E),$$

называемой в логике предикатов *арифметикой натуральных чисел*, где  $N$  – множество натуральных чисел и  $S, П, E$  – предикаты суммы, произведения, равенства соответственно, определенные в примере 1:

- а) коммутативность умножения;
- б) ассоциативность сложения;
- в) ассоциативность умножения;
- г) дистрибутивность слева умножения относительно сложения;
- д) дистрибутивность справа умножения относительно сложения;
- е) транзитивность равенства.

# Следование и равносильность предикатов

**Определение.** Предикат  $Q$  **следует** из предиката  $P$ , заданного над теми же множествами, что и предикат  $Q$  ( $P \Rightarrow Q$ ), если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат  $P$ , т.е. если

$$I_P \subseteq I_Q$$

**Пример.**  $P(x): x-3=0$ ;  $Q(x): (x-2)(x-3)=0$ .

$$I_P = \{3\}, I_Q = \{2, 3\}. \Rightarrow I_P \subseteq I_Q \Rightarrow P \Rightarrow Q$$

# Следование и равносильность предикатов

**Определение.** Предикаты  $P$  и  $Q$  над одними и теми же множествами называют равносильными или эквивалентными ( $P \Leftrightarrow Q$ ), если при любом наборе переменных из соответствующих множеств предикаты принимают одинаковое значение истинности, т.е. если  $I_P = I_Q$ .

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0 \text{ и } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ не являются равносильными.}$$

$$\frac{3x + 8}{x^2 + 1} = 0 \text{ и } 3x + 8 = 0 \text{ являются равносильными.}$$

Определите, являются ли равносильными предикаты, заданные на множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x+3} = x-1 \text{ и } x+3 = (x-1)^2$$

$$\frac{4-8x}{2+x} \geq 0 \text{ и } (4-8x)(2+x) \geq 0$$

$$\frac{4-8x}{2+x} > 0 \text{ и } (4-8x)(2+x) > 0$$

$$x^2 - x^4 \geq 0 \text{ и } 1 - x^2 \geq 0$$

# Кванторные операции над предикатами

...

# Квантор общности

**Определение.** Операцией связывания квантором общности называется правило, по которому каждому одноместному предикату  $P(x)$ , определенному на множестве  $M$ , сопоставляется высказывание, обозначаемое  $(\forall x)(P(x))$

(читается: «для всякого значения  $x$   $P(x)$  истинное высказывание» или «Для всех  $x$  имеет место  $P(x)$ »),

которое истинно в том и только в том случае, когда предикат  $P(x)$  тождественно истинен, и ложно в противном случае.

Символ  $\forall$  происходит от первой буквы англ. all — «все». Сам символ  $(\forall x)$  также называют квантором общности по переменной  $x$ .

**Пример .**

Пусть  $P(x)$  – предикат “ $x$  – четное число”.

Тогда  $\forall xP(x)$  есть высказывание

«Всякое  $x$  – четное число»  $\equiv$  «Все числа – четные».

# Квантор существования

**Определение.** Операцией связывания квантором существования называется правило, по которому каждому одноместному предикату  $P(x)$ , определенному на множестве  $M$ , ставится в соответствие высказывание, обозначаемое  $(\exists x)(P(x))$

(читается: «Существует значение  $x$ , такое, что  $P(x)$  истинное высказывание» или «Существует  $x$ , для которого имеет место  $P(x)$ »), которое ложно в том и только в том случае, когда  $P(x)$  тождественно ложен, и истинно в противном случае.

Символ  $\exists$  происходит от первой буквы англ. exist — «существовать». Сам символ  $\exists x$  также называют квантором существования по переменной  $x$ .

## **Пример.**

Пусть,  $P(x)$  – предикат “ $x$  – четное число”.

Тогда  $\exists xP(x)$  есть высказывание

“Некоторые  $x$  – четные числа”  $\equiv$  “Существуют четные числа” .



«Выгул кошек и собак воспрещен»

$K(x)$  :  $x$ -кошка

$S(x)$  :  $x$ -собака

$B(x)$  : для  $x$  выгул разрешен

$\forall x ( (K(x) \vee S(x))$

$\rightarrow \neg B(x) )$   
 $\neg \exists x ( (K(x) \vee S(x))$

$\wedge B(x) )$

# Примеры

$P(x, y)$  - «  $x$  любит  $y$  » - двуместный предикат.

$\forall x \exists y$  - « для любого человека существует  $y$  – человек, которого он любит»

$\forall y \exists x$  .

$\exists y \forall x$

$\exists x \forall y$

$\forall x \forall y$  :

$\exists y \exists x$

# Примеры

Рассмотрим два одноместных предиката на множестве  $\mathbb{N}$ :

$P(x)$ : « $1 \leq x$ » и  $Q(x)$ : « $x \vdots 30$ ».

$P(x)$ : « $1 \leq x$ » - тождественно истинный.

$(\forall x)(1 \leq x)$  — «для всякого натурального  $x$  число 1 не превосходит  $x$ » - истинное высказывание.

$(\exists x)(1 \leq x)$  — «существует натуральное  $x$ , большее 1» - истинное высказывание.

$Q(x)$ : « $x \vdots 30$ » - опровержим.

$(\forall x)(x \vdots 30)$  — «для любого  $x$  число  $x$  является делителем числа 30»

- ложное высказывание.

$(\exists x)(x \vdots 30)$  —

«существует натуральное число  $x$ , которое является делителем числа 30»

- истинное высказывание.

# Связанные и свободные переменные

**Определение.** Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется **навешивание** квантора на переменную  $x$ .

Переменная при этом называется **связанной** и вместо нее подставлять значения уже нельзя.

Несвязанная переменная называется **свободной**.

Если квантор навешивается на формулу с несколькими переменными, то он уменьшает число несвязанных переменных в этой формуле.

**Пример.**  $P(x): \langle u < x \rangle$  - двухместный предикат определенный на множестве  $N^2 = N \times N$ .

Применим к нему квантор общности по переменной  $x$ .

$(\forall x)(u < x)$  - одноместный предикат, зависящий от переменной  $u$ .

Этот предикат может превратиться как в истинное высказывание (при  $u = 1$ ), так и в ложное (при подстановке вместо  $u$  любых натуральных чисел, кроме 1).

# Навешивание кванторов на двухместный предикат

При «навешивании» кванторов на двухместную высказывательную форму  $Q(x, y)$  можно получить одну из восьми комбинаций:

- 1)  $\forall x \forall y (Q(x, y))$  — «для любого  $x$  и любого  $y$   $Q(x, y)$ »;
- 2)  $\forall y \forall x (Q(x, y))$  — «для любого  $y$  и любого  $x$   $Q(x, y)$ »;
- 3)  $\exists x \exists y (Q(x, y))$  — «существует  $x$  и существует  $y$ , такие, что  $Q(x, y)$ »;
- 4)  $\exists y \exists x (Q(x, y))$  — «существует  $y$  и существует  $x$ , такие, что  $Q(x, y)$ »;
- 5)  $\exists x \forall y (Q(x, y))$  — «существует  $x$ , такой, что для любого  $y$   $Q(x, y)$ »;
- 6)  $\forall x \exists y (Q(x, y))$  — «для всякого  $x$  существует  $y$ , такой, что  $Q(x, y)$ »;
- 7)  $\exists y \forall x (Q(x, y))$  — «существует  $y$ , такой, что для любого  $x$   $Q(x, y)$ »;
- 8)  $\forall y \exists x (Q(x, y))$  — «для всякого  $y$  существует  $x$ , такой, что  $Q(x, y)$ ».

Одноименные кванторы можно **менять местами**, что не влияет на истинность высказывания.

Например:  $(\exists y) (\exists x) (x + y = 5)$ . Это утверждение имеет тот же смысл, что и  $(\exists x) (\exists y) (x + y = 5)$ .

Для **разноименных** кванторов изменение порядка может привести к **изменению истинности** высказывания.

Например:  $(\forall x) (\exists y) x < y$ , т.е. для всякого числа  $x$  существует большее число  $y$  – истинное высказывание.

Поменяем местами кванторы:  $(\exists x) (\forall y) x < y$  – существует число  $x$  большее любого числа  $y$  – ложное высказывание.

## Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Для доказательства истинности утверждения  $(\forall x) P(x)$  с квантором общности, определенного на множестве  $M$ , необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений  $x \in M$  в предикат  $P(x)$  последний обращается в истинное высказывание. Если множество  $M$  конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество  $M$  бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Высказывание  $(\forall x) P(x)$  ложно, если можно указать такое значение  $a \in M$ , при котором  $P(x)$  обращается в ложное высказывание  $P(a)$ . Поэтому, для опровержения высказывания с квантором общности достаточно привести пример.

## Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Высказывание  $\exists x P(x)$  истинно, если можно указать такое значение  $a \in M$  при котором  $P(x)$  обращается в истинное высказывание  $P(a)$ . Поэтому, чтобы убедиться в истинности высказывания с квантором существования, достаточно привести пример.

Для доказательства ложности утверждения  $(\exists x) P(x)$  с квантором существования, определенного на множестве  $M$ , необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений  $x \in M$  в предикат  $P(x)$  последний обращается в ложное высказывание. Если множество  $M$  конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество  $M$  бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.



# Упражнения

Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

- а)  $(\forall x) (\exists y) (x + y = 7)$ ;
- б)  $(\exists y) (\forall x) (x + y = 7)$ ;
- в)  $(\exists x) (\forall y) (x + y = 7)$ ;
- г)  $(\forall x) (\forall y) (x + y = 7)$ ;
- д)  $[(\forall x) (\forall y) (x + y = 3)] \rightarrow (3 = 4)$ ;
- е)  $(\forall x) [(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0))]$ ;
- ж)  $(\forall a) \{[(\exists x) (ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$ ;
- з)  $(\forall b) (\exists a) (\forall x) \{x^2 + ax + b > 0\}$ ;
- и)  $(\forall x) [((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)]$ ;
- к)  $(\exists b) (\forall a) (\exists x) (x^2 + ax + b = 0)$ ;
- л)  $(\exists a) (\forall b) (\exists x) (x^2 + ax + b = 0)$ .

# Упражнения

Выяснить, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие предикатами:

а) найдется такое  $x$ , что  $x + y = 2$ ;

б) для любых  $x$  и  $y$  имеет место равенство  $x + y = y + x$ .

Записать с помощью формул логики предикатов следующее утверждение: «Для лечения любого известного компьютерного вируса имеются программы. Существуют новые (неизвестные) компьютерные вирусы, для лечения которых программы еще не разработаны».

Если обозначить  $A(x)$  – «известен компьютерный вирус  $x$ »,  $B(x)$  – «для лечения вируса  $x$  существует программа», то с помощью логических связок и кванторов получим формулы:

$\bar{B}(x)$  - против вируса  $x$  нет программы;

$\forall x(A(x))$  - любой вирус известен;

$\exists x(\bar{A}(x))$  - существуют новые (неизвестные) вирусы;

$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$  - если вирус давно известен, то имеется программа для его лечения;

$\exists x(\bar{A}(x) \wedge \bar{B}(x))$  - существуют (появились) новые вирусы, для лечения которых программы ещё не разработаны.

- На языке логики предикатов записать определение убывающей функции

Функция  $f(x)$  называется убывающей а множестве  $M$ , если для любых чисел  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих множеству  $M$ , из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

$$(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2) : f(x_1) < f(x_2).$$

# Домашнее задание

1. Записать словами формулу

$$\exists x \forall y (A(x) \& B(y) \rightarrow C(x, y))$$

где,  $A(x)$  = “ $x$  – студент”;  $B(y)$  = “ $y$  – экзамен”,  
 $C(x, y)$  = “ $x$  сдал экзамен  $y$ ”.

2. Записать предикатной формулой высказывание:  
«Все кошки знают русский язык»

# Упражнения

Найти формулу соответствующую предложению. “По меньшей мере один объект обладает свойством  $P$ ”.

Ответы:

$$a) \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$$

$$б) \exists x (P(x))$$

$$в) \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$$

$$г) (\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

Найти формулу соответствующую предложению. “Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством  $P$ ”.

Ответы:

$$a) \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$$

$$б) \exists x (P(x))$$

$$в) \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$$

$$г) (\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$$

# Формулы логики предикатов. Равносильность формул

*Определение.* *Формула логики предикатов* определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.
2. Предметные переменные  $x, y, z, \dots$  есть формулы.
3. Предикаты  $P(x), Q(x, y), \dots$ , а также выражения с кванторами  $\forall xP(x), \exists xR(x), \forall x \exists yQ(x, y), \dots$  есть формулы.
4. Если  $A$  и  $B$  – формулы, то  $\neg A, A \vee B, A \& B, A \rightarrow B, A \sim B$  есть формулы, в которых свободные переменные формул  $A$  и  $B$  остаются свободными, а связанные переменные формул  $A$  и  $B$  остаются связанными.
5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

Являются ли формулами следующие выражения

а)  $A \& B \rightarrow C$ , где  $A, B, C$  – высказывания.

б)  $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$ .

в)  $\forall x \exists y P(x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z)$



**Пример.**

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов:

а)  $A \& B \rightarrow C$ , где  $A, B, C$  – высказывания.

б)  $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$ .

Проанализируем последовательно это выражение.

Предикат  $Q(x, y, z)$  – формула;

Выражение  $\forall x \exists y Q(x, y, z)$  – формула; переменные  $x, y$  – связанные, переменная  $z$  – свободная.

Предикат  $P(x, y, u)$  – формула.

Выражение  $\forall x \exists y P(x, y, u)$  – формула; переменные  $x, y$  – связанные, переменная  $u$  – свободная.

Выражение  $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$  – формула; переменные  $x, y$  – связанные, переменные  $z, u$  – свободные.

2. Выражение  $\forall x \exists y P(x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z)$  формулой **не** является.

Действительно, выражение  $\forall x \exists y P(x, y, z)$  есть формула, в которой переменные  $x$  и  $y$  связанные, а переменная  $z$  свободная. Выражение  $Q(x, y, z)$  также формула, но в ней все переменные  $x, y, z$  свободные.

# Равносильные формулы

**Определение.** Формулы  $F$  и  $G$ , определенные на некотором множестве  $M$ , называются **равносильными на этом множестве**, если при **любых** подстановках констант вместо переменных они принимают одинаковые значения.

**Определение.** Формулы, равносильные на любых множествах, будем называть просто **равносильными**.

Являются ли равносильными предикаты:

а)  $P(x): (3x+8)/(x^2+1)=0$  и  $Q(z): -6z-16=0$

б)  $P(x): (x+2)(x-3)=0$  и  $Q(x): (x-3)=0$

На множестве действительных чисел?

# Следствия и равносильности логики предикатов

Переход от одних формул к равносильным им другим формулам логики предикатов может быть произведен по следующим правилам:

**1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.**

**2. Перенос квантора через отрицание.**

Пусть  $A$  – формула, содержащая свободную переменную  $x$ .

Тогда

$$\overline{(\forall x A(x))} \equiv \exists x (\overline{A(x)}).$$

$$\overline{(\exists x A(x))} \equiv \forall x (\overline{A(x)}).$$

### 3. Вынос квантора за скобки.

Пусть формула  $A(x)$  содержит переменную  $x$ , а формула  $B$  не содержит переменной  $x$ , и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x (A(x) \vee B).$$

$$\forall x A(x) \& B \equiv \forall x (A(x) \& B).$$

$$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x (A(x) \vee B).$$

$$\exists x A(x) \& B \equiv \exists x (A(x) \& B).$$

### 4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции.

Пусть формула  $B$ , так же, как и формула  $A$ , зависит от  $x$ . Тогда

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \& B(x)).$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

## 5. Перестановка одноименных кванторов.

$$\forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y).$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y).$$

*Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя!*

# Следствия и равносильности логики предикатов

Равносильности для $\exists$	Правила	Равносильности для $\forall$
$\exists x \exists y Q(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x Q(x, y)$	Правила перестановки кванторов	$\forall x \forall y Q(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$
$\exists x \forall y Q(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$		
$\bar{\exists} x F(x) \Leftrightarrow \forall x \bar{F}(x)$	Перенос отрицания с квантора на предикат	$\bar{\forall} x F(x) \Leftrightarrow \exists x \bar{F}(x)$
$\bar{\forall} x \bar{F}(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$		$\bar{\forall} x \bar{F}(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$
$\exists x (F(x) \vee \Phi(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \Phi(x)$	Правила дистрибутивности кванторов	$\forall x (F(x) \wedge \Phi(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \Phi(x)$
$\exists x (F(x) \wedge \Phi(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x \Phi(x)$		$\forall x (F(x) \vee \Phi(x)) \Rightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \Phi(x)$
$\exists x (M \wedge F(x)) \Rightarrow M \wedge \exists x F(x)$		$\forall x (M \wedge F(x)) \Rightarrow M \wedge \forall x F(x)$
$\exists x (M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \exists x F(x)$		$\forall x (M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \forall x F(x)$

## Приведенные и нормальные формулы

**Определение.** Формулы, в которых из логических символов имеются только символы  $\&$ ,  $\forall$  и  $\neg$ , причем символ  $\neg$  встречается лишь перед символами предикатов, называются *приведенными* формулами.

**Пример.**

1.  $A(x)\&B(x, y)$ .
2.  $\forall xA(x) \vee \exists x\neg B(x, y)$ .
3.  $\neg(A(x)\&B(x, y))$ .
4.  $\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg B(x, y)$ .
5.  $\neg(\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg B(x, y))$ .

**Теорема.** Для каждой формулы существует равносильная ей **приведенная формула**, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.



# Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Существуют две задачи, определяющие связь между суждениями и формулами логики предикатов:

- 1) выражение суждения в виде формулы логики предикатов;
- 2) интерпретация формулы логики предикатов.

*Суждение* – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие свойств предметов, отношений между предметами.

*Простым суждением* назовем суждение, в котором нельзя выделить часть, в свою очередь являющуюся суждением.

Среди простых суждений выделяют *атрибутивные суждения* и *суждения об отношениях*.

# Атрибутивные суждения

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы:

Типы атрибутивных суждений	На языке логики предикатов
" $a$ есть $P$ "	$P(a)$
"Все $S$ есть $P$ "	$\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$
"Ни один $S$ не есть $P$ "	$\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$
"Некоторые $S$ есть $P$ "	$\exists x(S(x) \& P(x))$
"Некоторые $S$ не есть $P$ "	$\exists x(S(x) \& \neg P(x))$

Если кванторная переменная связана квантором общности ( $\forall$ ), то в формуле используется знак **импликации** ( $\Rightarrow$ ), а если кванторная переменная связана квантором существования ( $\exists$ ), то в формуле используется знак **конъюнкции** ( $\&$ ).

## *Примеры*

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) **Веста – собака.**

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат  $P(x) = "x \text{ – собака}"$ .

Наше суждение можно выразить формулой:  $P(в)$ .

## *Примеры*

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

**б) Всякая логическая функция может быть задана таблицей.**

Введем предикаты:

$S(x)$  = "x – логическая функция";

$P(x)$  = "x может быть задана таблицей".

Искомая формула:  $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$ .

## *Примеры*

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

**в) Ни один народ не хочет войны.**

Введем предикаты:

$S(x)$  = "x – народ";

$P(x)$  = "x хочет войны".

Суждение можно выразить формулой:  $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$ .

## *Примеры*

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

**г) Некоторые журналисты были в космосе.**

Введем предикаты:

$S(x)$  = "x – журналист";

$P(x)$  = "x был в космосе".

Наше суждение можно выразить формулой:  $\exists x(S(x) \& P(x))$ .

## *Примеры*

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

**д) Некоторые современники динозавров не вымерли.**

Введем предикаты:

$S(x)$  = "x – современник динозавров";

$P(x)$  = "x вымер".

Наше суждение можно выразить формулой:  $\exists x(S(x) \ \& \ \neg P(x))$ .

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений: определений, теорем, необходимых и достаточных условий.

**Пример.** Теорема Ферма

«Для любого целого  $n > 2$  не существует натуральных чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющих равенству:  $x^n + y^n = z^n$ ».

Введем предикаты:

$N(x) =$  "x – натуральное число";

$M(x) =$  "x > 2";

$P(x, y, z, n) =$  " $x^n + y^n = z^n$ ".

Для любых чисел  $x, y, z, n$  условие (посылка) теоремы Ферма есть конъюнкция  $N(x) \& N(y) \& N(z) \& N(n) \& M(n)$ , а заключение есть  $\neg P(x, y, z, n)$ .

Поэтому теорема Ферма формулируется следующим образом:

$$\forall x \forall y \forall z \forall n (N(x) \& N(y) \& N(z) \& N(n) \& M(n) \Rightarrow \neg P(x, y, z, n)).$$



Если теорема имеет вид  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ , то предикат  $Q(x)$  является *следствием* предиката  $P(x)$ . При этом предикат  $Q(x)$  называется *необходимым* условием предиката  $P(x)$ , а предикат  $P(x)$  – *достаточным* условием предиката  $Q(x)$ .

### *Пример.*

Запишем в виде формулы логики предикатов утверждение:  
"Если число делится на 6, то оно делится на 3".

Введем предикаты  $P(x) = "x \text{ делится на } 6"$ ;

$Q(x) = "x \text{ делится на } 3"$ . Наше утверждение формулируется следующим образом:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Предикат  $P(x)$  (делимость на 6) является достаточным условием предиката  $Q(x)$  (делимость на 3).

Предикат  $Q(x)$  (делимость на 3) является необходимым условием предиката  $P(x)$  (делимость на 6).