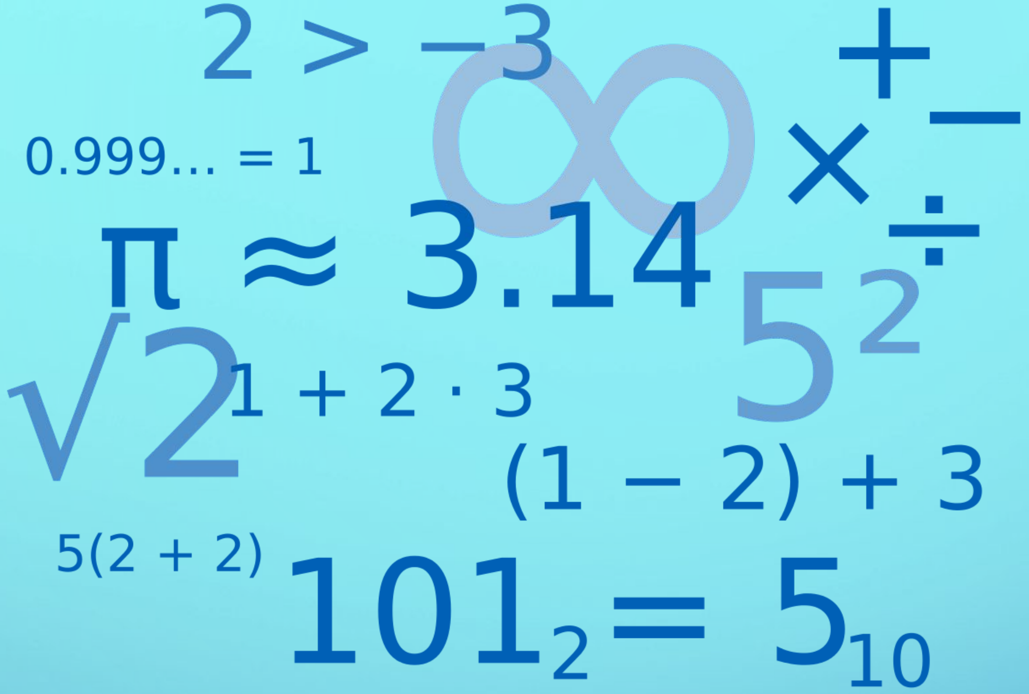


ПРЕЗЕНТАЦИЯ

НА ТЕМУ: ЗАЧЕМ НУЖНА МАТРИЦА

СТУДЕНТА ГРУППЫ ТАКОЙ-ТО МАКСИМА МАМЕДГУСЕЙНОВА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Матрицей размера $n \times m$ называется прямоугольная таблица специального вида, состоящая из n строк и m столбцов, заполненная числами
- Количество строк и столбцов является размером матрицы

Матрица - это таблица данных, которая берется в круглые скобки

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы A обозначаются a_{ij}, где i - номер строки, в которой находится элемент, j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Главной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол.

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Прямоугольной называется матрица, в которой число строк не равно числу столбцов

Определитель (детерминант) – числовая характеристика квадратной матрицы.

Он «определяет» свойства матрицы A. Матрица A обратима только тогда, когда ее определитель является обратимым элементом кольца R.

В случае, когда R — поле, определитель матрицы A равен нулю только тогда, когда ранг матрицы A меньше n или когда системы строк и столбцов матрицы A являются линейно зависимыми

Обозначение: $|A|,\ det\,A,\ \Delta$

Свойства определителей

- Транспонирование матрицы не меняет значения ее определителя
- При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак
- Если соответствующие элементы двух параллельных рядов равны или пропорциональны, то определитель равен 0
- Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя
- Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.
- Определитель матрицы, содержащей целый ряд из нулей, равен нулю.
- $\det E = 1$
- Если элементы какой-либо ряда квадратной матрицы А состоят из двух слагаемых, то определитель А равен сумме определителей двух матриц.

Минором квадратной матрицы называется определитель $(n\text{-}1)$-го порядка матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания из A строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij}

Пример

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}$$

Рангом матрицы называется наивысший из порядков отличных от нуля миноров матрицы

Квадратная матрица называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$det\ B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Вырожденной называется матрица, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 6 - 6 + 3 - 4 = 0$$

Две матрицы и называются равными, если

Размеры матриц совпадают

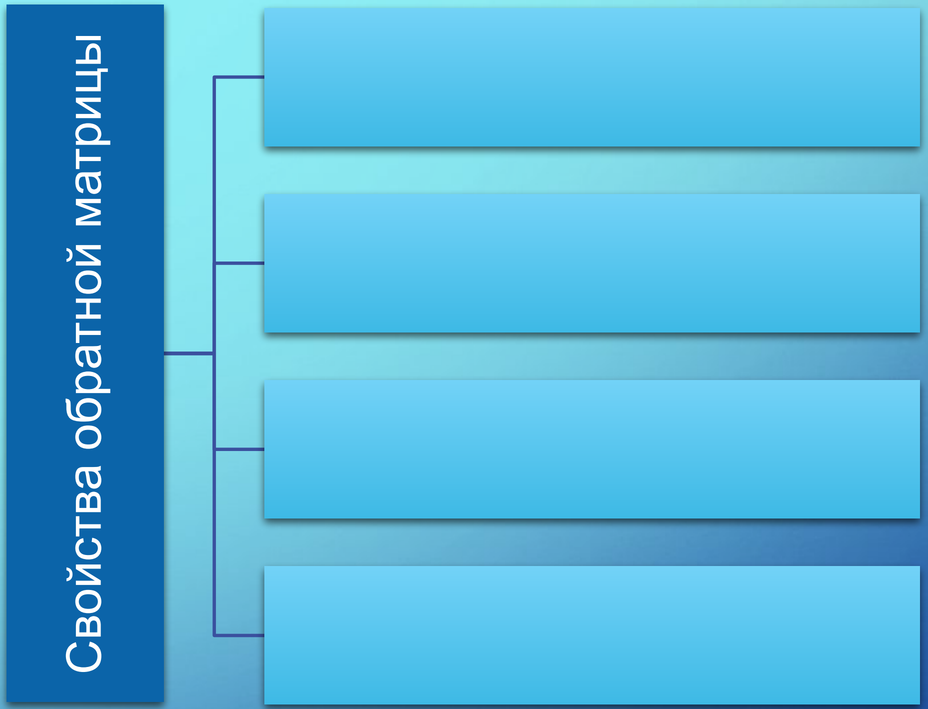
Соответствующие элементы матриц равны: $i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$

Вектор-строка	Вектор-столбец

Матрица размера $1\times n$ называется строчной или вектор-строкой. Столбцевой или вектор-столбцом называется матрица размера $n\times 1$

Обратной матрицей, к квадратной матрице A, называется такая матрица A^{-1}, для которой справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$



Найти определитель матрицы А и убедиться, что $\Delta A \neq 0$, т.е. что матрица A – невырожденная

Составить алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A и записать матрицу из найденных алгебраических дополнений

Записать обратную матрицу с учетом формулы

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

 Метод присоединённой (союзной) матрицы

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Метод Гаусса-Жордана

Составляем блочную матрицу $A|E$, приписав к данной матрице A справа единичную матрицу того же порядка

При помощи элементарных преобразований, выполняемыми над строками матрицы $(A|E)$ приводим ее левую часть к простейшему виду

Если $\lambda=E$, то блок если $\lambda \neq E$, то матрица A - не имеет обратной, т.е. она вырожденная

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n–го порядка называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

- Алгебраическое дополнение элемента — это коэффициент, с которым этот самый элемент входит в определитель матрицы.

Это утверждается теоремой о разложении определителя по строке/столбцу

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

Транспонирование матрицы - это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами

Свойства транспонированной матрицы

- Алгебраические операции с матрицами
  - Сложение матриц, имеющих один и тот же размер
  - Умножение матрицы на число
  - Умножение матриц

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- При сложении матриц (одного размера) складываются их соответствующие элементы

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{pmatrix}$, $A+B=C$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \\ c_{21} c_{22} \end{pmatrix}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

- При умножении матрицы на число, каждый элемент матрицы умножается на это число

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda = const$, то $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} \lambda a_{22} \end{pmatrix}$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \lambda = 3, \lambda A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ ОДНОГО РАЗМЕРА

- Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{pmatrix}$, $AB{=}C$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \\ c_{21} c_{22} \end{pmatrix}$, где $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$; $c_{12}{=}a_{11}b_{12}{+}a_{12}b_{22}$; $c_{21}{=}a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$; $c_{22}{=}a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

- Прямоугольные матрицы можно перемножать тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

- A+B=B+A
- (A+B)+C=A+(B+C)
- k(A+B)=kA+kB
- AB≠BA
- (AB)C=A(BC)
- A(B+C)=AB+AC
- A+O=A
- AE=EA=A
- Если A и B две квадратные матрицы одного порядка, то =

- Элементарные преобразования матрицы
  - Умножение всех элементов строк на одно и то же число не равное 0
  - Перестановка строк местами
  - Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и тоже число
  - Отбрасывание одной из двух одинаковых строк
  - Отбрасывание нулевой строки

Алгоритм решения систем линейных уравнений матричным методом

1. Составление матриц A, B и X
2. Вычисление определителя матрицы A
3. Нахождение обратной матрицы
4. Решение системы уравнений по формуле

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К МАТРИЦЕ

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

состоящая из m линейных уравнений, содержащая n неизвестных величин, может быть записана в виде матричного уравнения: $A\bar{x} = \bar{b}$, где

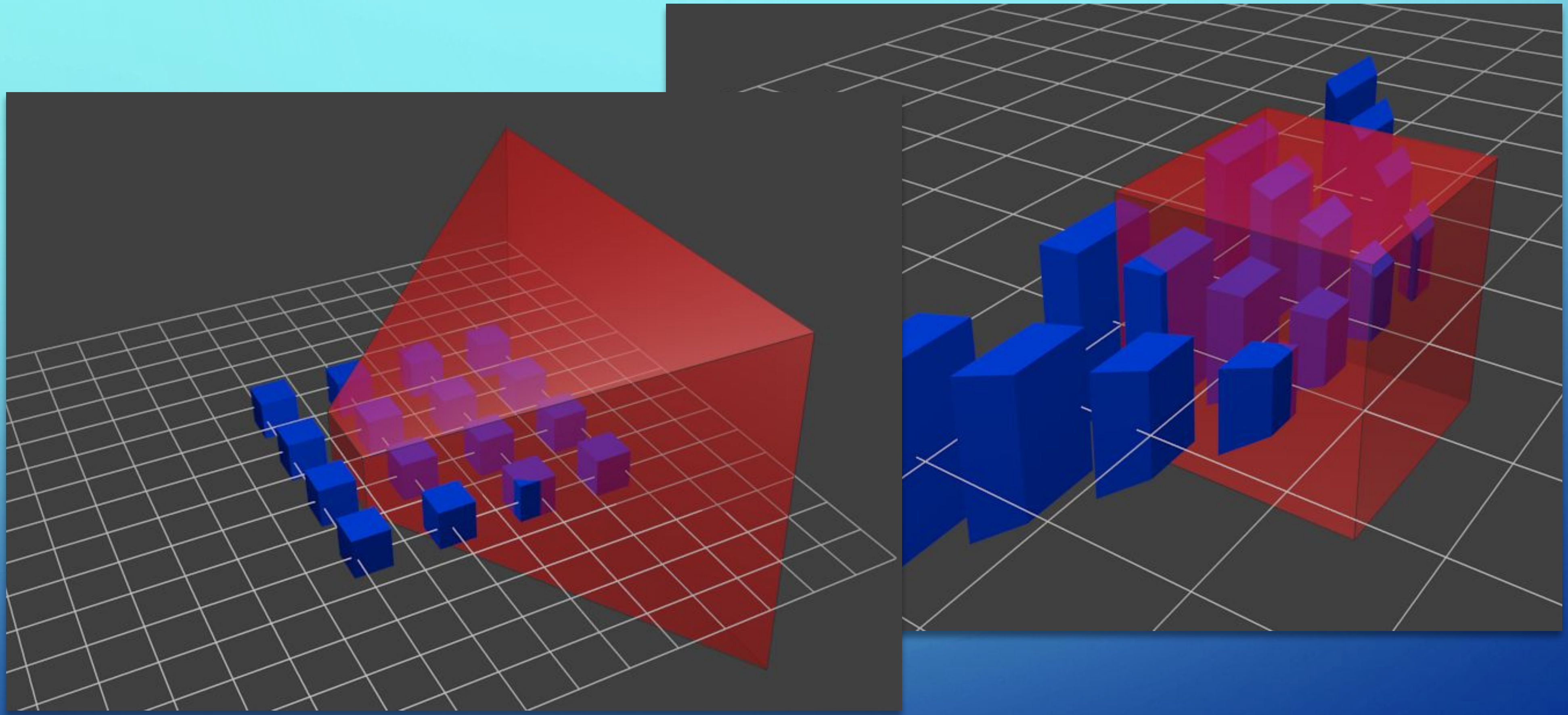
$$A = \begin{cases} a_{11} + a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} + a_{m2} \dots a_{mn} \end{cases} ; \bar{x} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{cases} \quad \bar{b} \begin{cases} b_1 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{cases}$$

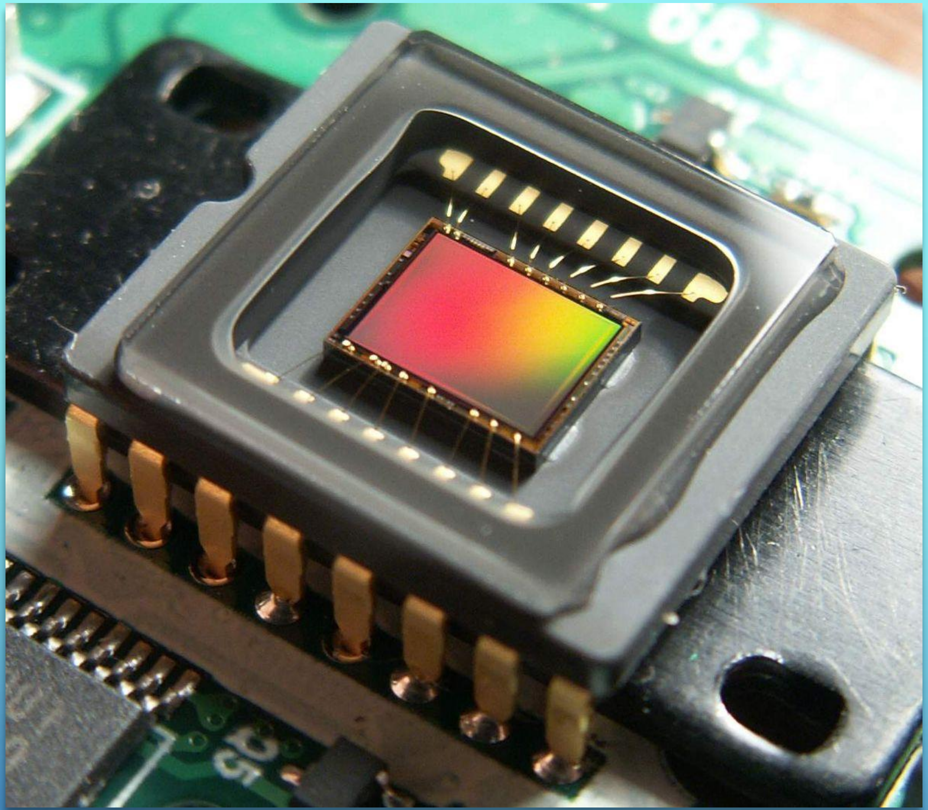
Матрица *A* — это матрица коэффициентов системы линейных уравнений, вектор-столбец *x* — вектор неизвестных, а вектор-столбец *b* — вектор значений системы линейных уравнений.

Применение матриц

- Компактная запись и решение систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений
- Как средство записи данных и их преобразование (в физике и других прикладных науках)
- Обратные матрицы используются при программировании трёхмерной графики
- Линейные матричные неравенства применяются в задачах теории управления, идентификации систем, обработки сигналов
- Матрицы Адамара используются в рентгеновских телескопах. Также применяются при кодировании информации

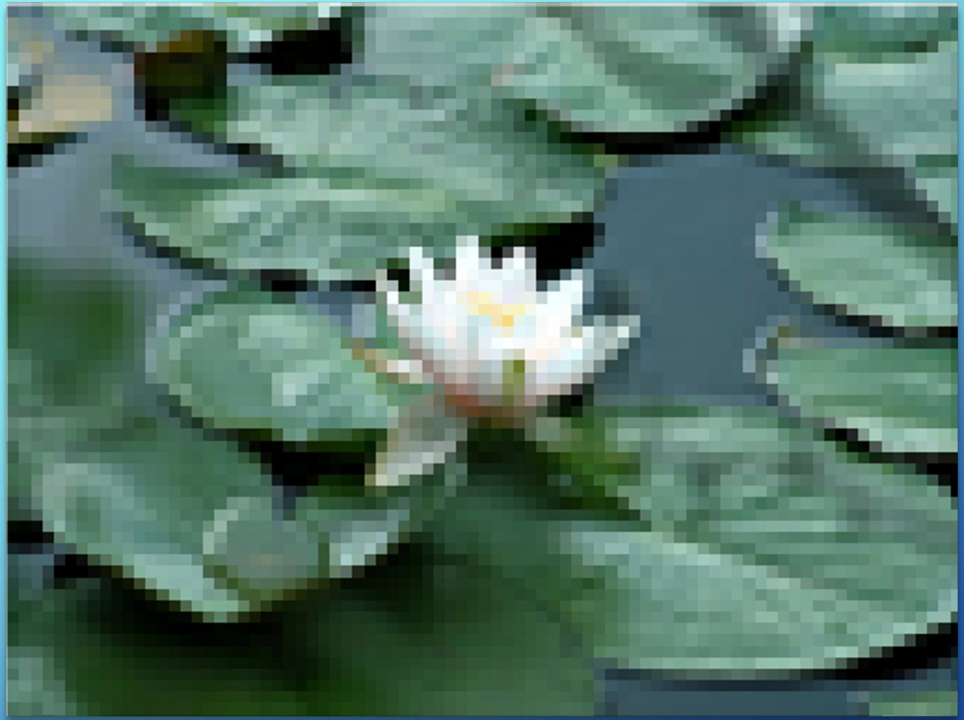
Применение матриц в трехмерной графике

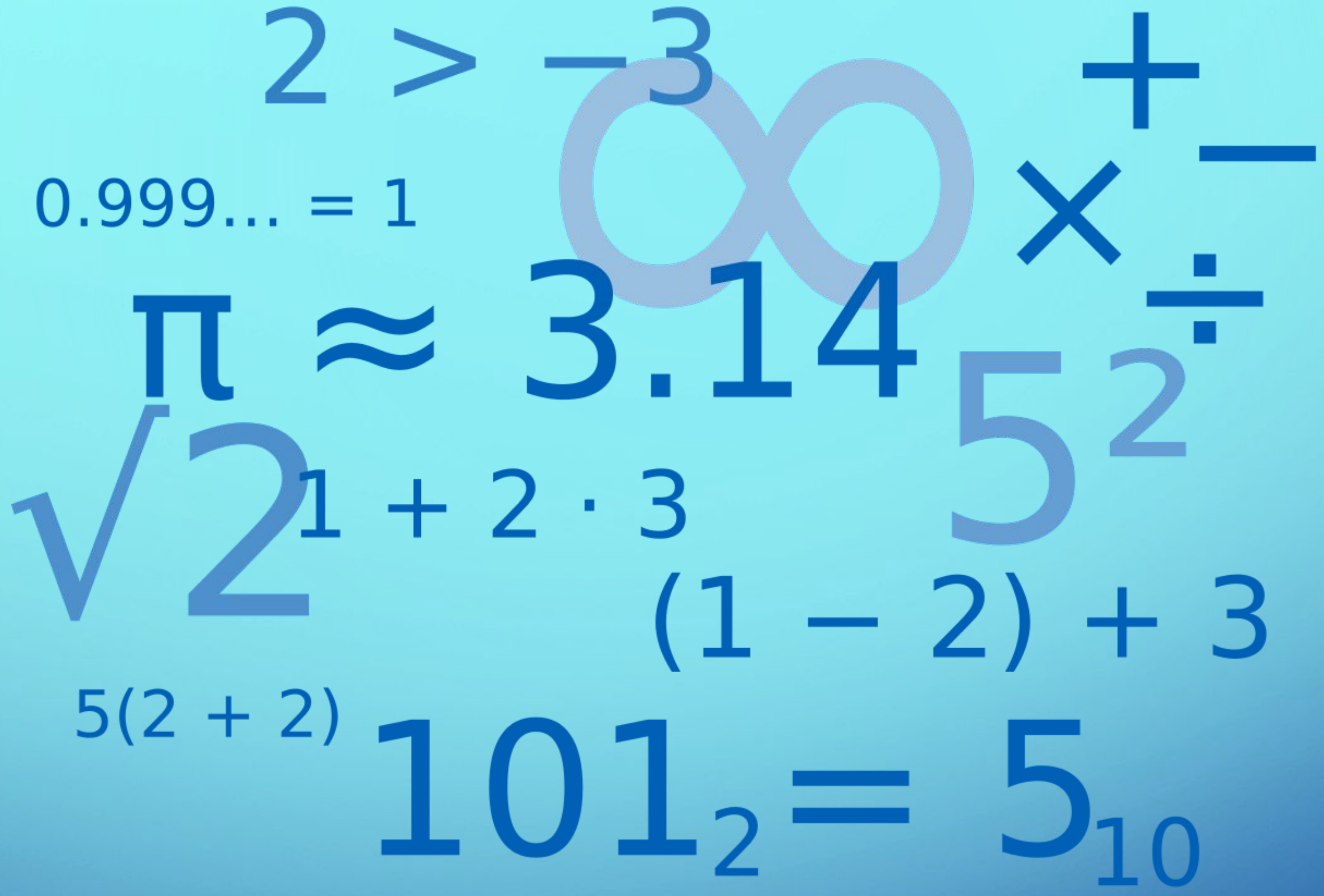




В современных телескопах в качестве приемников излучения используют ПЗС-матрицы.
ПЗС-матрица состоит из большого количества (1000х1000 и более) полупроводниковых чувствительных ячеек

Растровое изображение представляет собой мозаику (таблицу, матрицу, растр – графическую сетку) из мелких точек - пикселей





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!