



ПОЛИТЕХ

Санкт-Петербургский
Политехнический Университет
Петра Великого

Использование современных программных комплексов в расчете строительных конструкций

*Яваров Александр
Валерьевич, к.
т.н.,
доцент СПбПУ (Политех)*

Санкт-Петербург

2017 г.

Получение матриц элементов:

1. Запись функционала
2. Введение функций формы
3. Интегрирование (как правило, численное)

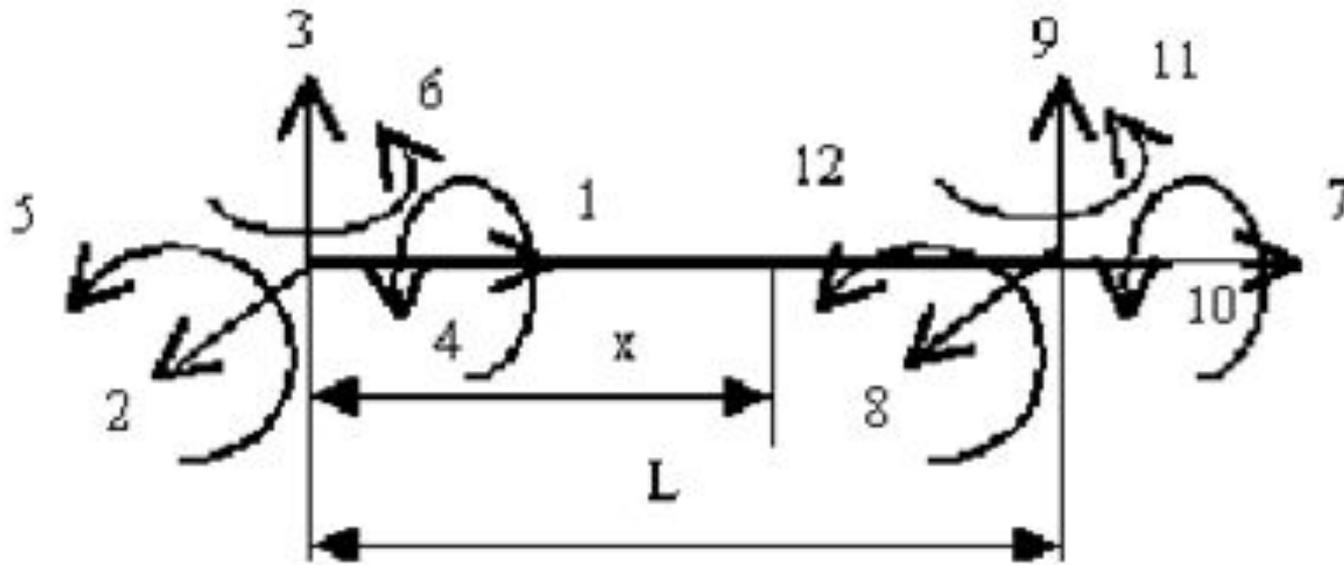
Конечный элемент пространственного стержня

Общее соотношение МКЭ для
статических задач:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P},$$

где \mathbf{K} – глобальная матрица жесткости, \mathbf{U} – вектор-столбец перемещений, \mathbf{P} – вектор-столбец внешних нагрузок.

Степени свободы узлов пространственного стержневого элемента



$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_4 \\ u_3' \\ u_2' \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ \phi_{10} \\ u_9' \\ u_8' \end{pmatrix}$$

Функционал потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(EI_z (u''_2)^2 + EI_y (u''_3)^2 + EA (u'_1)^2 + G_{кр} I_{кр} (\phi'_1)^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(EI_z \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} \right)^2 + EI_y \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} \right)^2 + EA \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + G_{кр} I_{кр} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) dx\end{aligned}$$

Данное выражение получено с учетом известного **соотношения** :

$$M = EIw''$$

например, для первого члена подинтегрального **выражения** :

$$EI_z (u''_2)^2 = EI u''_2 u''_2 = M u''_2$$

Функции формы

Зададим функции формы для продольных перемещений и **кручения** :

$$u[x] = \mathcal{E}_1[x] u_1 + \mathcal{E}_2[x] u_7$$

$$\phi[x] = \mathcal{E}_1[x] \phi_4 + \mathcal{E}_2[x] \phi_{10}$$

Для продольных перемещений и кручения полиномы следует использовать полиномы 1 - го порядка .

$$\mathcal{E}_1[x] = 1 - \frac{x}{l}$$

$$\mathcal{E}_2[x] = \frac{x}{l}$$

Функции формы

Запишем функции формы для вертикальных перемещений v :

$$v[x] = H_1[x] u_2 + H_2[x] u_2' + H_3[x] u_8 + H_4[x] u_8'$$

Вместо коэффициентов подставим полиномы Эрмита (полиномы 3 - го порядка) :

$$H_1[x] = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$H_2[x] = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$H_3[x] = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$H_4[x] = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Подставим значение $x = 0$ и L

$$v[x] / . x \rightarrow 0$$

$$v[x] / . x \rightarrow L$$

Функции формы

Далее запишем функции формы для изгиба

в плоскости xz (z - верт ось, x - вдоль оси стержня) :

$$v' [x] = H_1' [x] u_2 + H_2' [x] u_2' + H_3' [x] u_8 + H_4' [x] u_8'$$

Подставим значение $x = 0$ и L

$$v' [x] / . x \rightarrow 0$$

$$v' [x] / . x \rightarrow L$$

Получается система из 16 коэффициентов и 16 условий, представленная в виде таблицы ниже. Из таблицы видно, что прямая подстановка значений x , позволяет проверить правильность выбора полиномов.

	H1	H2	H3	H4				H'1	H'2	H'3	H'4
x=0	1	0	0	0			x=0	0	1	0	0
x=l	0	0	1	0			x=l	0	0	0	1

Для горизонтально перемещения рассуждения аналогичны

$$w [x] = H_1 [x] u_2 - H_2 [x] u_2' + H_3 [x] u_8 - H_4 [x] u_8'$$

$$w' [x] = H_1' [x] u_2 - H_2' [x] u_2' + H_3' [x] u_8 - H_4' [x] u_8'$$

Функции формы

Составим матрицу функций форм H . Каждой строке соответствует своя функция

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & H_2 [\mathbf{x}] & 0 & H_3 [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & H_4 [\mathbf{x}] \\ 0 & 0 & H_1 [\mathbf{x}] & 0 & -H_2 [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & H_3 [\mathbf{x}] & 0 & -H_4 [\mathbf{x}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 [\mathbf{x}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1' [\mathbf{x}] & 0 & -H_2' [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & H_3' [\mathbf{x}] & 0 & -H_4' [\mathbf{x}] & 0 \\ 0 & H_1' [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & H_2' [\mathbf{x}] & 0 & H_3' [\mathbf{x}] & 0 & 0 & 0 & H_4' [\mathbf{x}] \end{pmatrix}$$

Третья и пятая строка включают члены с минусом, что является следствием гипотезы

Бернулли - Эйлера, по которой деформации выражаются следующим образом :

$$\varepsilon [\mathbf{x}] = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$$

$$\kappa_1 [\mathbf{x}] = \frac{d^2 \mathbf{v}}{d\mathbf{x}^2}$$

$$\kappa_2 [\mathbf{x}] = -\frac{d^2 \mathbf{w}}{d\mathbf{x}^2}$$

$$\varepsilon_{\text{кр}} [\mathbf{x}] = \frac{d\phi}{d\mathbf{x}}$$

Функционал

Запишем функционал в матричной форме :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L (U^T \cdot B^T \cdot D \cdot B \cdot U) dx = U^T \left(\frac{1}{2} \int_0^L (B^T \cdot D \cdot B) dx \right) U$$

Матрица B

$$B = \begin{pmatrix} \vartheta_1' [x] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_2' [x] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1'' [x] & 0 & 0 & 0 & H_2'' [x] & 0 & H_3'' [x] & 0 & 0 & 0 & 0 & H_4'' [x] \\ 0 & 0 & H_1'' [x] & 0 & -H_2'' [x] & 0 & 0 & 0 & H_3'' [x] & 0 & 0 & -H_4'' [x] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_1' [x] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_2' [x] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица D - матрица с жесткостями стержня .

$$DD = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_{xp} \end{pmatrix}$$

Интегрирование

$$\text{Beam} = \int_0^L \text{Dot} [\text{Bt} . \text{DD} . \text{B}] \, d\mathbf{x}$$

Матрица жесткости:

$$\begin{pmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{кр}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{кр}}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{кр}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{кр}}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
 \end{pmatrix}$$

```

"Экспорт координат узлов из Excel. Десятичные с запятой";
DXF = Import["A:/PHD work/Алгоритмы/Стержень Линейный/Координаты узлов.xlsx"];
"Размерность экспортированного массива данных";
d := Dimensions[DXF];
"Число узлов";
Nузлов := Part[d, 3]
"Приведение DXF к списку, а затем к матричному виду";
MatrixImport = Partition[Flatten[DXF], Nузлов];
"Список узлов с координатами";
(*Будем считать, что 1 строка - x, 2 строка - y, 3 строка z*)
Do[Node[n] = {MatrixImport[[1, n]], MatrixImport[[2, n]], MatrixImport[[3, n]]}, {n, 1, Nузлов}]
"Число элементов";
Nэлементов = Nузлов - 1;
"Вычисляем длину всех стержневых элементов. n - нумерация";

Do[L[n] =  $\sqrt{(\text{Node}[n+1][[1]] - \text{Node}[n][[1]])^2 +$ 
       $(\text{Node}[n+1][[2]] - \text{Node}[n][[2]])^2 + (\text{Node}[n+1][[3]] - \text{Node}[n][[3]])^2}$ , {n, 1, Nэлементов}]

"Вычисляем проекции орта i1 всех элементов. Ось x направлена вдоль стержня";

(*i1[1] := (Coords[2].x - Coords[1].x) / L;
i1[2] := (Coords[2].y - Coords[1].y) / L;
i1[3] := (Coords[2].z - Coords[1].z) / L;*)

Do[i1[1]n = (Node[n+1][[1]] - Node[n][[1]]) / L[n], {n, 1, Nэлементов}];
Do[i1[2]n = (Node[n+1][[2]] - Node[n][[2]]) / L[n], {n, 1, Nэлементов}];
Do[i1[3]n = (Node[n+1][[3]] - Node[n][[3]]) / L[n], {n, 1, Nэлементов}];

```

```

(*vector multiplication to calculate j1
      | i      j      k |
j1=-i1 x k= | i1[1] i1[2] i1[3] | =-(i*i1[2]*1-j*i1[1]*1);
      | 0      0      1 |

ort j1

//ort j1
j1[1]:=-i1[2];
j1[2]:=i1[1];
j1[3]:=0;
L:=sqrt(sqr(j1[1])+sqr(j1[2]));
if L<1e-6 then
j1[2]:=1
else
begin
j1[1]:=j1[1]/L;
j1[2]:=j1[2]/L;
end;*)

(*Орт j1*)

Do[locj1[1]n = i1[2]n, {n, 1, NЭЛЕМЕНТОВ}]
Do[locj1[2]n = -i1[1]n, {n, NЭЛЕМЕНТОВ}]
Do[j1[3]n = 0, {n, 1, NЭЛЕМЕНТОВ}]

(*Длина L:=sqrt(sqr(j1[1])+sqr(j1[2]))*)
Do[LJn =  $\sqrt{\text{locj1}[1]_n^2 + \text{locj1}[2]_n^2}$ , {n, 1, NЭЛЕМЕНТОВ}]

```

```

(*vector multiplication to caclulate k1
      | i      j      k      |
k1=-i1 x j1=- | i1[1] i1[2] i1[3] | =
      | j1[1] j1[2]  0      |
      =-(i*(-i1[3]*j1[2])+j*(i1[3]*j1[1])+k*(i1[1]*j1[2]-i1[2]*j1[1]));
local ort k1

k1[1]:=(-i1[3]*j1[2]);
k1[2]:=i1[3]*j1[1];
k1[3:=(i1[1]*j1[2]-i1[2]*j1[1]);

L:=sqrt(sqr(k1[1])+sqr(k1[2])+sqr(k1[3]));
k1[1]:=k1[1]/L;
k1[2]:=k1[2]/L;
k1[3]:=k1[3]/L;*)

(*Орт k1*)
Do[Lock1[1]n = -i1[3]n j1[2]n, {n, 1, Nэлементов}]
Do[Lock1[2]n = i1[3]n j1[1]n, {n, 1, Nэлементов}]
Do[Lock1[3]n = i1[1]n j1[2]n - i1[2]n j1[1]n, {n, 1, Nэлементов}]

(*Длина L:=sqrt(sqr(k1[1])+sqr(k1[2])+sqr(k1[3]))*)
Do[LKn =  $\sqrt{\text{Lock1}[1]_n^2 + \text{Lock1}[2]_n^2 + \text{Lock1}[3]_n^2}$ , {n, 1, Nэлементов}]

(*Проекции орта k1*)
Do[k1[1]n = Lock1[1]n / LKn, {n, 1, Nэлементов}]
Do[k1[2]n = Lock1[2]n / LKn, {n, 1, Nэлементов}]
Do[k1[3]n = Lock1[3]n / LKn, {n, 1, Nэлементов}]

Do[Cn = {{i1[1]n, i1[2]n, i1[3]n},
          {j1[1]n, j1[2]n, j1[3]n},
          {k1[1]n, k1[2]n, k1[3]n}}, {n, 1, Nэлементов}]

(*C:=TMatrix.create(3,3);

```

```
Do[ $LK_n = \sqrt{Lock1[1]_n^2 + Lock1[2]_n^2 + Lock1[3]_n^2}$ , {n, 1, N_элементов}]
```

```
(*Проекции орта k1*)
```

```
Do[k1[1]n = Lock1[1]n / LKn, {n, 1, N_элементов}]
```

```
Do[k1[2]n = Lock1[2]n / LKn, {n, 1, N_элементов}]
```

```
Do[k1[3]n = Lock1[3]n / LKn, {n, 1, N_элементов}]
```

```
Do[Cn = {{i1[1]n, i1[2]n, i1[3]n},  
          {j1[1]n, j1[2]n, j1[3]n},  
          {k1[1]n, k1[2]n, k1[3]n}}, {n, 1, N_элементов}]
```

```
(*C:=TMatrix.create(3,3);
```

```
C[1,1]:=i1[1];C[1,2]:=j1[1];C[1,3]:=k1[1];
```

```
C[2,1]:=i1[2];C[2,2]:=j1[2];C[2,3]:=k1[2];
```

```
C[3,1]:=i1[3];C[3,2]:=j1[3];C[3,3]:=k1[3];*)
```

```
ZeroC = ConstantArray[0, {3, 3}];
```

```
Do[
```

```
MatrixForm[Qn = ArrayFlatten[{{Cn, ZeroC, ZeroC, ZeroC}, {ZeroC, Cn, ZeroC, ZeroC},  
{ZeroC, ZeroC, Cn, ZeroC}, {ZeroC, ZeroC, ZeroC, Cn}}]],
```

```
{n, 1, N_элементов}]
```

Спасибо за внимание!