

# **Элементы нелинейного функционального анализа**

## **Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах**

## § 6. Дифференцируемость по Фреше отображения, имеющего непрерывную производную Гато

Пусть  $E$  и  $F$  – линейные нормированные пространства,  $U$  – открытое множество в  $E$ ,  $x_0 \in U$ . Рассмотрим отображение  $f: U \rightarrow F$ .

**Теорема.** Пусть отображение  $f: U \rightarrow F$  дифференцируемо по Гато в некоторой окрестности точки  $x_0$ , причем производная Гато непрерывна в точке  $x_0$  (как операторное отображение  $x \mapsto f'_G(x)$ ). Тогда отображение  $f$  дифференцируемо по Фреше в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) = f'_G(x_0)$ .

*(Без доказательства)*

## §8. Функционал и его градиент

**Определение.** Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал  $V$  на банаховом пространстве  $E$ . Предположим, что  $E$  непрерывно вложено в банахово пространство  $F$ ,  $F$  непрерывно вложено в гильбертово пространство  $H$  и  $E$  плотно в  $H$ .

**Замечание 1.** Говорят, что банахово пространство  $E$  непрерывно вложено в банахово пространство  $F$ , если:

- 1)  $E$  является подмножеством  $F$ ;
- 2) из сходимости последовательности  $\{x_n\} \subset E$  по норме пространства  $E$  следует сходимость этой последовательности по норме пространства  $F$ .

**Замечание 2.** Говорят, что пространство  $E$  плотно в пространстве  $H$ , если замыкание  $E$  по норме  $H$  совпадает с  $H$ , то есть для любой точки  $a \in H$  существует последовательность  $\{x_n\} \subset E$ , сходящаяся к  $a$  по норме  $H$ .

Предположим также, что задано отображение  $f : E \rightarrow F$ , такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E$$

( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в ГП  $H$ ).

Отображение  $f : E \rightarrow F$  называется *градиентом функционала  $V$*  и обозначается  $grad V$ .

В этом случае говорят, что функционал  $V$  обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств  $\{E, F, H\}$ .

**Пример.** Пусть  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , то есть  $V$  – функция  $n$  переменных. Тогда значение производной Фреше функции  $V$  в точке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  на векторе  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$  имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)h_n = \langle f(x), h \rangle,$$

где  $f(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = \text{grad } V.$

где  $f(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = \mathit{grad} V.$

Итак, в данном случае «новое» определение градиента равносильно «старому» (из матем. анализа).

Заметим также, что в этом случае  $E = F = H = \mathbb{R}^n.$

**Определение.** Точка  $x_0 \in E$  называется *критической точкой* функционала  $V$ , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = \langle f(x_0), h \rangle = 0$$

для любого  $h \in E$ .



**Лемма.** Точка  $x_0 \in E$  является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда  $f(x_0) = 0$ .

*Доказательство.*

*Достаточность* очевидна.

*Необходимость.* Если  $x_0$  – критическая точка функционала  $V$ , то  $\langle f(x_0), h \rangle = 0$  при всех  $h \in E$ .

В силу плотности  $E$  в  $H$ , существует последовательность  $\{h_n\} \subset E$ , сходящаяся к  $f(x_0) \in F$  по норме  $H$ .

Учитывая, что  $\langle f(x_0), h_n \rangle = 0$  при любом  $n$ , и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\begin{aligned}\|f(x_0)\|_H^2 &= \langle f(x_0), f(x_0) \rangle = |\langle f(x_0), f(x_0) \rangle - \langle f(x_0), h_n \rangle| = \\ &= |\langle f(x_0), f(x_0) - h_n \rangle| \leq \|f(x_0)\|_H \cdot \|f(x_0) - h_n\|_H \rightarrow 0\end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Так как число  $\|f(x_0)\|_H^2$  от  $n$  не зависит, то

$$\|f(x_0)\|_H^2 = 0. \text{ Таким образом, } f(x_0) = 0.$$

Лемма доказана.

## § 9. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах  $H = L_2[0,1]$ ,  $E$ ,  $F$  – вещественные банаховы линейные пространства,  $E$  линейно и непрерывно вложено в  $F$ ,  $F$  линейно и непрерывно вложено в  $H$ .

**Пример 1.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 (Ax)x dt,$$

где  $x \in E$ ,  $A: E \rightarrow F$  – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется симметрическим, если  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in E$ ).

Вычислим градиент функционала  $V$ .

Рассмотрим приращение функционала  $V$ :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим приращение функционала  $V$ :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

В силу симметричности оператора  $A$ ,  
 $\langle Ah, x \rangle = \langle h, Ax \rangle = \langle Ax, h \rangle$ .

Следовательно,  $V(x+h) - V(x) = \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$ .

Таким образом,  $\text{grad}V(x) = Ax$ , если  $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$ .

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:  $|\langle Ah, h \rangle| \leq \|Ah\|_H \cdot \|h\|_H$ .

Следовательно,  $\frac{|\langle Ah, h \rangle|}{\|h\|_E} \leq \|Ah\|_H \cdot \frac{\|h\|_H}{\|h\|_E} \leq k_1 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_H \leq$

$\leq k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_F \leq k_1 \cdot k_2^2 \cdot \|A\| \cdot \|h\|_E \rightarrow 0$  при  $\|h\|_E \rightarrow 0$ ,

так как  $\|h\|_F \leq k_1 \|h\|_E$ ,  $\|h\|_H \leq k_2 \|h\|_F$

(в силу непрерывности вложений  $E$  в  $F$  и  $F$  в  $H$ ).

Итак,  $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$ .

Следовательно,  $\text{grad } V(x) = Ax$ .

**Пример 2.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

заданный на БП  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ , которое непрерывно вложено в БП  $F = C[0,1]$ ; пространство  $F$  непрерывно вложено в ГП  $H = L_2[0,1]$ ;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим  $\text{grad } V(x)$ .

Используя равенство  $\dot{x}\dot{x} + \ddot{x}x = (\dot{x}x)'$ , получим:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{x}x)' dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = (\dot{x}x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d^2x}{dt^2} x dt = \frac{1}{2} \left\langle -\frac{d^2}{dt^2} x, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Обозначим  $-\frac{d^2}{dt^2} = A$ .



Сравним нормы пространств  $E$ ,  $F$  и  $H = L_2[0,1]$ .

$$1) \quad \|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt \leq \int_0^1 \left( \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \right)^2 dt = \int_0^1 \|x\|_F^2 dt = \|x\|_F^2,$$

следовательно,  $\|x\|_H \leq \|x\|_F$ .

2) Очевидно, что  $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ .

Из полученных неравенств вытекает непрерывность вложений  $E$  в  $F$  и  $F$  в  $H$ .

Нетрудно проверить симметричность оператора  $A$  (проверьте самостоятельно!).

Таким образом, этот пример является частным случаем примера 1.

Следовательно,  $f(x) = \text{grad } V(x) = Ax = -\frac{d^2}{dt^2}x$  и

$$f'(x) = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

**Пример 3.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \varphi(x(t)) dt,$$

заданный на БП  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ , где  $\varphi$  – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на  $\mathbb{R}^1$ . Пространство  $E$  непрерывно вложено в БП  $F = C[0,1]$ ; пространство  $F$  непрерывно вложено в ГП  $H = L_2[0,1]$ ;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим  $\text{grad } V$  в некоторой точке  $a \in E$ .

Воспользуемся формулой Тейлора в форме

Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где  $P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что  $a$  и  $h$  – значения функций  $a(t)$  и  $h(t)$  при некотором  $t \in [0,1]$  (число  $\theta$  зависит от значения  $h(t)$ ).

При  $n = 1$  получим:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + r_1(a), \quad (1)$$

где

$$r_1(a) = \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2. \quad (2)$$

Рассмотрим приращение функционала  $V$  (с учетом (1) и (2)) :

$$\begin{aligned} V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\ &= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\
&= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \\
&= \int_0^1 \varphi'(a(t))h(t) dt + \int_0^1 r_1(a(t)) dt = \langle \varphi'(a), h \rangle_H + \int_0^1 r_1(a(t)) dt.
\end{aligned}$$

Докажем, что  $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$ . Тогда, очевидно,

$$\text{grad } V(a) = \varphi'(a).$$

Итак, поскольку  $\|h\|_E \rightarrow 0$ , можно считать, что  $\|h\|_E \leq 1$ .

Тогда получаем следующую оценку (при  $\forall \theta \in (0,1)$ ,  $\forall t \in [0,1]$ ):

$$\begin{aligned} |a(t) + \theta \cdot h(t)| &\leq |a(t)| + |\theta| \cdot |h(t)| \leq |a(t)| + |h(t)| \leq \\ &\leq \|a\|_E + \|h\|_E \leq \|a\|_E + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, значения функции  $a(t) + \theta \cdot h(t)$ , где  $h(t)$  – достаточно малая (по норме) добавка, при  $\forall t \in [0,1]$  и  $\forall \theta \in (0,1)$  можно считать заключёнными в некотором отрезке  $[-c, c]$ .



Функция  $\varphi''$  непрерывна на  $\mathbb{R}^1$  и, следовательно, ограничена на любом отрезке, поэтому существует такая константа  $k$ , что  $|\varphi''(x)| \leq k$  для любого  $x \in [-c, c]$ . Отсюда следует, что  $|\varphi''(a(t) + \theta h(t))| \leq k \quad \forall \theta \in (0, 1), \forall t \in [0, 1]$ .

Используя последнее неравенство и равенство (2), установим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left( \max_{t \in [0, 1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left( \max_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right|}{\|h\|_E} \leq \frac{k}{2} \cdot \|h\|_E \rightarrow 0 \text{ при } \|h\|_E \rightarrow 0,$$

то есть  $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$ .

Следовательно,  $\text{grad } V(a) = \varphi'(a)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dt,$$

где  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ ,  $F = C[0,1]$ ,  $H = L_2[0,1]$ ,

$\lambda$  – параметр,  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ .

Представим функционал в виде суммы

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

где  $V_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt$ ,  $V_2(x) = \int_0^1 \frac{\lambda x}{2} dt$ ,  $V_3(x) = \int_0^1 \frac{x^4}{4} dt$ .

Очевидно, что

$$f(x) = \text{grad}V(x) = \sum_{i=1}^3 \text{grad}V_i(x) = -\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{\lambda}{2} + x^3$$

(см. примеры 2 и 3).

**Задача 9.1.** Пусть  $\varphi$  – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на  $\mathbb{R}^1$ .

Отображение  $f$  действует из БП  $E = C^2[0,1]$  в БП  $F = C[0,1]$ :

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения  $f$ .

## § 10. Производные высших порядков

Рассмотрим отображение  $f: U \rightarrow F$  ( $E, F$  – ЛНП-ва,  $U$  – открытое множество в  $E$ ). Пусть для любой точки  $x \in U$  существует производная Фреше  $f'(x): E \rightarrow F$ , то есть определено операторное отображение  $f': U \rightarrow L(E, F)$  ( $f$  действует из  $U$  в ЛНП  $F_1 = L(E, F)$  и переводит  $x \in U$  в ЛОО  $f'(x)$ , являющийся элементом пространства  $F_1$ ).

Предположим, что отображение  $f' : U \rightarrow F_1$  также дифференцируемо по Фреше на множестве  $U$ , то есть для любой точки  $x \in U$  существует производная Фреше  $(f')'(x) : E \rightarrow F_1$ . ЛОО  $(f')'(x)$  называется **второй производной** отображения  $f$  (в точке  $x$ ) и обозначается  $f''(x)$ .

Рассмотрим операторное отображение  $f'' : U \rightarrow L(E, F_1)$ , переводящее  $x \in U$  в ЛОО  $f''(x)$ , являющийся элементом пространства  $F_2 = L(E, F_1)$ . Если отображение  $f''$  дифференцируемо по Фреше на множестве  $U$ , то для любой точки  $x \in U$  определен ЛОО  $f'''(x) = (f'')'(x)$ , называемый **третьей производной** отображения  $f$  (в точке  $x$ ).

Очевидно, что оператор  $f'''(x)$  является элементом пространства

$$F_3 = L(E, F_2) = L(E, L(E, F_1)) = L(E, L(E, L(E, F))).$$

Итак, можно определить производную любого порядка:  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

# § 11. Вторая производная как билинейное отображение

## 1. Билинейные отображения.

Пусть  $E$  и  $F$  — ЛНП-ва,  $B: E \times E \rightarrow F$  — отображение.  
(вещное)

Опр. 1. Отобр-е  $B$  называется билинейным, если

$\forall h, k, h_1, h_2, k_1, k_2 \in E$  и  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$1) B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k),$$

$$2) B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).$$

Опр. 2. Билинейное от-е  $B$  называется симметричным, если  $\forall h, k \in E$   $B(h, k) = B(k, h)$ .



## 2. Производная второго порядка.

Пусть  $E$  и  $F$  — ЛНП-ва (вещные),  $U$  — открытое множество в  $E$ ,  $f: U \rightarrow F$  — отображение.

Пусть отображение  $f$  дважды непрерывно дифференцируемо (по Фреше) на множестве  $U$ , т.е.  $\forall x \in U$

существуют  $f'(x)$  и  $f''(x)$ , причем  $f''(x)$  непрерывна по  $x$  на  $U$  как операторное отображение

$f'': U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ .

Рассмотрим отображение  $B: E \times E \rightarrow F$ ,  
 $B(h, k) = [f''(x)h]k = [Ah]k$ , где  $A = f''(x): E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$

— ЛОО, элемент  $x \in U$  — фиксирован.

Проверим условия 1) и 2) из опр. 1.

$$\begin{aligned}
 1) \quad B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) &= \underbrace{[A(\alpha h_1 + \beta h_2)]}_{\text{100}} k = [\alpha \cdot \underbrace{Ah_1}_{\substack{\text{100} \\ (\text{из } E \text{ и } F)}} + \beta \cdot \underbrace{Ah_2}_{\text{100}}] k = \\
 &= [\alpha \cdot Ah_1] k + [\beta \cdot Ah_2] k = \\
 &= \alpha \cdot [Ah_1] \cdot k + \beta \cdot [Ah_2] k = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) &= \underbrace{[Ah]}_{\substack{\text{100 из } E \text{ и } F}} (\alpha k_1 + \beta k_2) = \\
 &= \alpha \cdot [Ah] k_1 + \beta \cdot [Ah] k_2 = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).
 \end{aligned}$$

Итак,  $B(h, k) = [Ah]k$  — билинейное отображение.

Положим, что  $B(h, k)$  — симметричное дил. от-е.  
Зафиксируем произвольные  $h, k \in E$  и рассмотрим  $l \in F^*$  (нона произвольный).

Рассмотрим функцию  $\varphi(t, s) = l[f(x + th + sk)]$ ,  
 $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^1$ . Вычислим частные производные  
функции  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) = l[f'(x + th + sk)h]$$

$$(l'(y) = l, \text{ т.к. } l - \text{лин. ф-л; } (x + th + sk)'_t = h);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) \right] = l[(f''(x + th + sk)k)h];$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) \right] = l[(f''(x + th + sk)h)k].$$

Пр-е  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s)$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s)$  непрерывны (как

композиция непрерывных отображений)  $\Rightarrow$

Стр-е  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t, s)$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t, s)$  непрерывны (как композиции непрерывных отображений)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  эти производные равны (по теореме о маб. анализа).

Тогда при  $t = s = 0$  имеем:

$$\mathcal{L}[(f''(x)k)h] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(0, 0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(0, 0) = \mathcal{L}[(f''(x)h)k] (*)$$

---

а) точным вид ф-ла  $\ell$ .

Следствие из теоремы Хаана-Банаха:

для любого  $y \in F$  ( $y \neq \theta$ )  $\exists$  л.о.ф.  $\ell \in F^*$ :

1)  $\ell(y) = \|y\|$  и 2)  $\|\ell\| = 1$ .

---

Пусть  $y = (f''(x)k)h - (f''(x)h)k \in F$ .  $\Pi: y \neq \theta$ .

Тогда из (\*)  $\Rightarrow \|y\| = \ell(y) = 0 \Rightarrow \underline{y = \theta}$ .

Получили противоречие. След-но,  $y = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow (f''(x)k)h = (f''(x)h)k \Rightarrow B(k, h) = B(h, k)$ .

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Теорема. Если отображение  $f: U \rightarrow F$  дважды непрерывно дифференцируемо на множестве  $U$ , то вторая производная  $f''(x)$  при  $\forall x \in U$  представляет собой симметричное билинейное отображение.

---

Пусть  $h = k$ . Выражение  $[f''(x)h]h \stackrel{\text{обозн.}}{=} d^2 f(x, h)$   
наз-ая вторым дифференциалом отображения  $f$  в т.  $x$ .