Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

§ 6. Дифференцируемость по Фреше отображения, имеющего непрерывную производную Гато

Пусть E и F – линейные нормированные пространства, U – открытое множество в E, $x_0 \in U$. Рассмотрим отображение $f: U \to F$.

Теорема. Пусть отображение $f: U \to F$ дифференцируемо по Гато в некоторой окрестности точки x_0, причем производная Гато непрерывна в точке x_0 (как операторное отображение $x \mapsto f'_G(x)$). Тогда отображение f дифференцируемо по Фреше в точке x_0 и $f'(x_0) = f'_G(x_0)$.

(Без доказательства)

§8. Функционал и его градиент

Определение. Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал V на банаховом пространстве E. Предположим, что E непрерывно вложено в банахово пространство F, F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H.

Замечание 1. Говорят, что банахово пространство E непрерывно вложено в банахово пространство F, если:

1) E является подмножеством F;

2) из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset E$ по норме пространства E следует сходимость этой последовательности по норме пространства F.

Замечание 2. Говорят, что пространство E плотно в пространстве H, если замыкание E по норме H совпадает с H, то есть для любой точки $a \in H$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к a по норме H.

Предположим также, что задано отображение $f: E \to F$, такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \ \forall h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в ГП H).

Отображение $f: E \to F$ называется *градиентом функционала* V и обозначается $grad V$.

В этом случае говорят, что функционал V обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств $\{E, F, H\}$.

Пример. Пусть $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, то есть V – функция n переменных. Тогда значение производной Фреше функции V в точке $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ на векторе $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)^T$ имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)h_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)h_n = < f(x), h >,$$

где $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = grad\, V.$

где $f(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = grad\, V.$

Итак, в данном случае «новое» определение градиента равносильно «старому» (из матем. анализа).

Заметим также, что в этом случае $E = F = H = \mathbb{R}^n$.

Определение. Точка $x_0 \in E$ называется *критической точкой* функционала V, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = < f(x_0), h > = 0$$

для любого $h \in E$.

Лемма. Точка $x_0 \in E$ является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0.$

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Необходимость. Если x_0 – критическая точка функционала V, то $< f(x_0), h > = 0$ при всех $h \in E.$

В силу плотности E в H, существует последовательность $\{h_n\} \subset E$, сходящаяся к $f(x_0) \in F$ по норме H.

Учитывая, что $< f(x_0), h_n > = 0$ при любом n, и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\|f(x_0)\|_H^2 = < f(x_0), f(x_0) > = \left| < f(x_0), f(x_0) > - < f(x_0), h_n > \right| =$$

$$= \left| < f(x_0), f(x_0) - h_n > \right| \leq \left\| f(x_0) \right\|_H \cdot \left\| f(x_0) - h_n \right\|_H \to 0$$

при $n \to \infty$.

Так как число $\|f(x_0)\|_H^2$ от n не зависит, то $\|f(x_0)\|_H^2 = 0$. Таким образом, $f(x_0) = 0$.

Лемма доказана.

§ 9. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах $H = L_2[0,1]$, E, F – вещественные банаховы линейные пространства, E линейно и непрерывно вложено в F, F линейно и непрерывно вложено в H.

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > = \frac{1}{2}\int_0^1 (Ax)x\,dt,$$

где $x \in E$, $A : E \to F$ – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется *симметрическим*, если $< Ax, y > = < x, Ay > \ \forall\, x, y \in E$).

Вычислим градиент функционала V.

Рассмотрим приращение функционала V:

$$V(x+h) - V(x) = \frac{1}{2} < A(x+h), x+h > - \frac{1}{2} < Ax, x > =$$

$$= \frac{1}{2} < Ax, h > + \frac{1}{2} < Ah, x > + \frac{1}{2} < Ah, h >.$$

Рассмотрим приращение функционала V:

$$V(x+h)-V(x) = \frac{1}{2}<A(x+h),\, x+h> - \frac{1}{2}<Ax,\, x> =$$

$$= \frac{1}{2}<Ax,\, h> + \frac{1}{2}<Ah,\, x> + \frac{1}{2}<Ah,\, h>.$$

В силу симметричности оператора A, $<Ah,\, x> = <h, Ax> = <Ax,\, h>$.

Следовательно, $V(x+h)-V(x) = <Ax,\, h> + \frac{1}{2}<Ah,\, h>.$

Таким образом, $grad V(x) = Ax$, если $<Ah,\, h> = o(\|h\|_E)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим: $\left| < Ah, h > \right| \le \left\| Ah \right\|_H \cdot \left\| h \right\|_H$.

Следовательно, $\dfrac{\left| < Ah, h > \right|}{\left\| h \right\|_E} \le \left\| Ah \right\|_H \cdot \dfrac{\left\| h \right\|_H}{\left\| h \right\|_E} \le k_1 \cdot k_2 \cdot \left\| Ah \right\|_H \le$

$\le k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \left\| Ah \right\|_F \le k_1 \cdot k_2^2 \cdot \left\| A \right\| \cdot \left\| h \right\|_E \to 0$ при $\left\| h \right\|_E \to 0$,

так как $\left\| h \right\|_F \le k_1 \left\| h \right\|_E$, $\left\| h \right\|_H \le k_2 \left\| h \right\|_F$

(в силу непрерывности вложений E в F и F в H).

Итак, $< Ah, h > = o(\left\| h \right\|_E)$.

Следовательно, $grad\ V(x) = Ax$.

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$V(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

заданный на БП $E=\{x\in C^2[0,1]\,|\,x(0)=x(1)=0\}$, которое непрерывно вложено в БП $F=C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H=L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|\dot{x}(t)|+\max_{t\in[0,1]}|\ddot{x}(t)|,\qquad \|x\|_F=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2=\int_0^1 x^2(t)dt,\qquad <x,\,y>_H=\int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt.$$

Вычислим $grad\,V(x)$.

Используя равенство $\dot{x}\dot{x} + \ddot{x}x = (\dot{x}x)^{\cdot}$, получим:

$$V(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{x}x)^{\cdot} dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \ddot{x}x dt = (\dot{x}x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \ddot{x}x dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d^2 x}{dt^2} x dt = \frac{1}{2} < -\frac{d^2}{dt^2} x, x > .$$

Обозначим $-\dfrac{d^2}{dt^2} = A$.

Сравним нормы пространств E, F и $H = L_2[0,1]$.

1) $\|x\|_H^2 = \int\limits_0^1 x^2(t)dt \le \int\limits_0^1 \left(\max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| \right)^2 dt = \int\limits_0^1 \|x\|_F^2 dt = \|x\|_F^2$,

следовательно, $\|x\|_H \le \|x\|_F$.

2) Очевидно, что $\|x\|_F \le \|x\|_E$.

Из полученных неравенств вытекает непрерывность вложений E в F и F в H.

Нетрудно проверить симметричность оператора A (проверьте самостоятельно!).

Таким образом, этот пример является частным случаем примера 1.

Следовательно, $f(x) = grad\, V(x) = Ax = -\dfrac{d^2}{dt^2}x$ и

$$f'(x) = -\frac{d^2}{dt^2}\ .$$

Пример 3. Рассмотрим функционал

$$V(x)=\int_0^1 \varphi(x(t))dt,$$

заданный на БП $E=\{x\in C^2[0,1]\mid x(0)=x(1)=0\}$, где φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$. Пространство E непрерывно вложено в БП $F=C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H=L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|\dot{x}(t)| + \max_{t\in[0,1]}|\ddot{x}(t)|, \qquad \|x\|_F = \max_{t\in[0,1]}|x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t)\,dt, \qquad <x, y>_H = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt .$$

Вычислим $grad\,V$ в некоторой точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где $P_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \ \ \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n=1$ получим:

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+r_1(a), \tag{1}$$

где

$$r_1(a)=\frac{\varphi''(a+\theta h)}{2}\cdot h^2. \tag{2}$$

Рассмотрим приращение функционала V (с учетом (1) и (2)) :

$$V(a+h)-V(a)=\int_0^1\varphi(a+h)dt-\int_0^1\varphi(a)dt=$$

$$=\int_0^1(\varphi(a+h)-\varphi(a))dt=\int_0^1(\varphi'(a(t))h(t)+r_1(a(t)))dt=$$

$$V(a+h)-V(a)=\int_0^1\varphi(a+h)dt-\int_0^1\varphi(a)dt=$$

$$=\int_0^1(\varphi(a+h)-\varphi(a))dt=\int_0^1(\varphi'(a(t))h(t)+r_1(a(t)))dt=$$

$$=\int_0^1\varphi'(a(t))h(t)dt+\int_0^1 r_1(a(t))dt=<\varphi'(a),h>_H+\int_0^1 r_1(a(t))dt.$$

Докажем, что $\int_0^1 r_1(a(t))dt=o(\|h\|_E)$. Тогда, очевидно, $grad\,V(a)=\varphi'(a)$.

Итак, поскольку $\|h\|_E \to 0$, можно считать, что $\|h\|_E \le 1$.

Тогда получаем следующую оценку (при $\forall\,\theta \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$):

$$|\,a(t) + \theta \cdot h(t)\,| \le |\,a(t)\,| + |\,\theta\,| \cdot |\,h(t)\,| \le |\,a(t)\,| + |\,h(t)\,| \le$$

$$\le \|\,a\,\|_E + \|\,h\,\|_E \le \|\,a\,\|_E + 1.$$

Следовательно, значения функции $a(t) + \theta \cdot h(t)$, где $h(t)$ – достаточно малая (по норме) добавка, при $\forall t \in [0,1]$ и $\forall\,\theta \in (0,1)$ можно считать заключёнными в некотором отрезке $[-c,\, c]$.

Функция φ'' непрерывна на $\mathbb{R}^1$ и, следовательно, ограничена на любом отрезке, поэтому существует такая константа k, что $|\varphi''(x)| \le k$ для любого $x \in [-c, c]$. Отсюда следует, что $|\varphi''(a(t) + \theta h(t))| \le k \quad \forall \theta \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$.

Используя последнее неравенство и равенство (2), установим следующие соотношения:

$$\left|\int_0^1 r_1(a(t))dt\right| \le \int_0^1 |r_1(a(t))|\,dt = \int_0^1 \left|\frac{\varphi''(a+\theta h)}{2} \cdot h^2\right| dt \le \frac{k}{2}\int_0^1 h^2(t)dt \le$$

$$\le \frac{k}{2}\int_0^1 \left(\max_{t\in[0,1]}|h(t)|\right)^2 dt = \frac{k}{2}\|h\|_F^2 \le \frac{k}{2}\|h\|_E^2.$$

$$\left|\int_0^1 r_1(a(t))dt\right| \le \int_0^1 | r_1(a(t)) | \, dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a+\theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \le \frac{k}{2}\int_0^1 h^2(t)dt \le$$

$$\le \frac{k}{2}\int_0^1 \left(\max_{t\in[0,1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2}\|h\|_F^2 \le \frac{k}{2}\|h\|_E^2 .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left|\int_0^1 r_1(a(t))dt\right|}{\|h\|_E} \le \frac{k}{2}\cdot\|h\|_E \to 0 \text{ при } \|h\|_E \to 0,$$

то есть $\int_0^1 r_1(a(t))dt = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $grad\, V(a) = \varphi'(a)$.

Пример 4. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2 + \lambda x}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dt,$$

где $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$, $H = L_2[0,1]$, λ – параметр, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Представим функционал в виде суммы

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

где $V_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2 dt$, $V_2(x) = \int_0^1 \frac{\lambda x}{2} dt$, $V_3(x) = \int_0^1 \frac{x^4}{4} dt$.

Очевидно, что

$$f(x) = grad V(x) = \sum_{i=1}^{3} grad V_i(x) = -\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{\lambda}{2} + x^3$$

(см. примеры 2 и 3).

Задача 9.1. Пусть φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$. Отображение f действует из БП $E = C^2[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения f.

§ 10. Производные высших порядков

Рассмотрим отображение $f : U \to F$ (E, F – ЛНП-ва, U – открытое множество в E). Пусть для любой точки $x \in U$ существует производная Фреше $f'(x) : E \to F$, то есть определено операторное отображение $f' : U \to L(E,F)$ (f действует из U в ЛНП $F_1 = L(E,F)$ и переводит $x \in U$ в ЛОО $f'(x)$, являющийся элементом пространства F_1).

Предположим, что отображение $f' : U \to F_1$ также дифференцируемо по Фреше на множестве U, то есть для любой точки $x \in U$ существует производная Фреше $(f')'(x) : E \to F_1$. ЛОО $(f')'(x)$ называется ***второй производной*** отображения f (в точке x) и обозначается $f''(x)$.

Рассмотрим операторное отображение $f'' : U \to L(E, F_1)$, переводящее $x \in U$ в ЛОО $f''(x)$, являющийся элементом пространства $F_2 = L(E, F_1)$. Если отображение f'' дифференцируемо по Фреше на множестве U, то для любой точки $x \in U$ определен ЛОО $f'''(x) = (f'')'(x)$, называемый ***третьей производной*** отображения f (в точке x).

Очевидно, что оператор $f'''(x)$ является элементом пространства

$$F_3 = L(E,F_2) = L(E,L(E,F_1)) = L(E,L(E,L(E,F))).$$

Итак, можно определить производную любого порядка: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x),\ n \in \mathbb{N}.$

§ 11. Вторая производная как билинейное отображение

1. Билинейные отображения.

Пусть E и F — ЛНП-ва (веществ-е), $B : E \times E \longrightarrow F$ — отображение.

Опр. 1. Отобр-е B называется билинейным, если $\forall h, k, h_1, h_2, k_1, k_2 \in E$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k)$,

2) $B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2)$.

Опр. 2. Билинейное от-е B наз-ся симметричным, если $\forall h, k \in E$ $B(h, k) = B(k, h)$.

2. Производная второго порядка.

Пусть E и F – ЛНП-ва (веществ-е), $\mathcal{U}$ – открытое множ-во в E, $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ – отображение.
Пусть отображ-е f дважды непрерывно дифференцируемо (по Фреше) на мн-ве $\mathcal{U}$, т.е. $\forall x \in \mathcal{U}$ $\exists$-ют $f'(x)$ и $f''(x)$, причем $f''(x)$ непрерывна по x на $\mathcal{U}$ как операторное отображение
$f'' : x \longmapsto f''(x)$ $\left(f'' : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)) \right)$.

Рассмотрим отображение $B : E \times E \rightarrow F$,
$B(h,k) = [f''(x)h]k = [Ah]k$, где $A = f''(x) : E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$
– ЛОО, элемент $x \in \mathcal{U}$ – фиксирован.

Проверим условия 1) и 2) из опр. 1.

1) $B(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = [\underset{\text{ЛОО}}{A}(\alpha h_1 + \beta h_2)]k = [\alpha \cdot \underbrace{Ah_1}_{\substack{\text{ЛОО} \\ (\text{из } E \text{ в } F)}} + \beta \cdot \underbrace{Ah_2}_{\text{ЛОО}}]k =$

$= [\alpha \cdot Ah_1]k + [\beta \cdot Ah_2]k =$

$= \alpha \cdot [Ah_1] \cdot k + \beta \cdot [Ah_2]k = \alpha \cdot B(h_1, k) + \beta \cdot B(h_2, k).$

2) $B(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \underbrace{[Ah]}_{\text{ЛОО из } E \text{ в } F}(\alpha k_1 + \beta k_2) =$

$= \alpha \cdot [Ah]k_1 + \beta \cdot [Ah]k_2 = \alpha \cdot B(h, k_1) + \beta \cdot B(h, k_2).$

Итак, <u>$B(h, k) = [Ah]k$ – билинейное отобр-е.</u>

Покажем, что $B(h,k)$ — <u>симметричное</u> бил. от-е

Зафиксируем произвольные $h, k \in E$ и рассмотрим $\ell \in F^*$ (пока произвольный).

Рассмотрим функцию $\varphi(t,s) = \ell[f(x+th+sk)]$, $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^1$. Вычислим частные производные функции φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,s) = \ell[f'(x+th+sk)h]$$

$(\ell'(y) = \ell$, т.к. ℓ — лин. ф-л; $(x+th+sk)'_t = h)$;

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,s)\right] = \ell[(f''(x+th+sk)k)h];$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t,s)\right] = \ell[(f''(x+th+sk)h)k].$$

Пр-е $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s}(t,s)$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(t,s)$ непрерывны (как композиции непрерывных отображений) $\Rightarrow$

Пр-е $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(t,s)$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}(t,s)$ непрерывны (как композиции непрерывных отображений) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти производные равны (по теореме из мат. анализа).

Тогда при $t=s=0$ имеем:

$$\ell[(f''(x)k)h] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}(0,0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}(0,0) = \ell[(f''(x)h)k] \quad (*)$$

Уточним вид ф-ла ℓ.

<u>Следствие из теоремы Хана-Банаха:</u>

для всякого $y \in F$ $(y \neq \theta)$ $\exists$ ЛОФ $\ell \in F^*$:

1) $\ell(y) = \|y\|$ и 2) $\|\ell\| = 1$.

Пусть $y = (f''(x)k)h - (f''(x)h)k \in F$. <u>П: $y \neq \theta$.</u>

Тогда из $(*)$ $\Rightarrow$ $\|y\| = \ell(y) = 0$ $\Rightarrow$ <u>$y = \theta$</u>.

Получили противоречие. След-но, $y = \theta$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{(f''(x)k)h = (f''(x)h)k \Rightarrow B(k,h) = B(h,k)}.$$

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Итак, мы доказали след-ю теорему.

<u>**Теорема**</u>. Если отобр-е $f: U \to F$ дважды непрерывно дифференцируемо на множ-ве U, то вторая производная $f''(x)$ при $\forall x \in U$ представляет собой симметричное билинейное отображение.

Пусть $h=k$. Выражение $\underline{[f''(x)h]h \overset{\text{обозн.}}{=} d^2 f(x,h)}$ наз-ся <u>вторым дифференциалом отобр-я f в т. x</u>.