

Тема 1. *Введение в курс.
Линейное пространство. N-
мерные векторы и действия
над ними*

Лекция 1

Элементы векторной
алгебры (матричного
анализа).

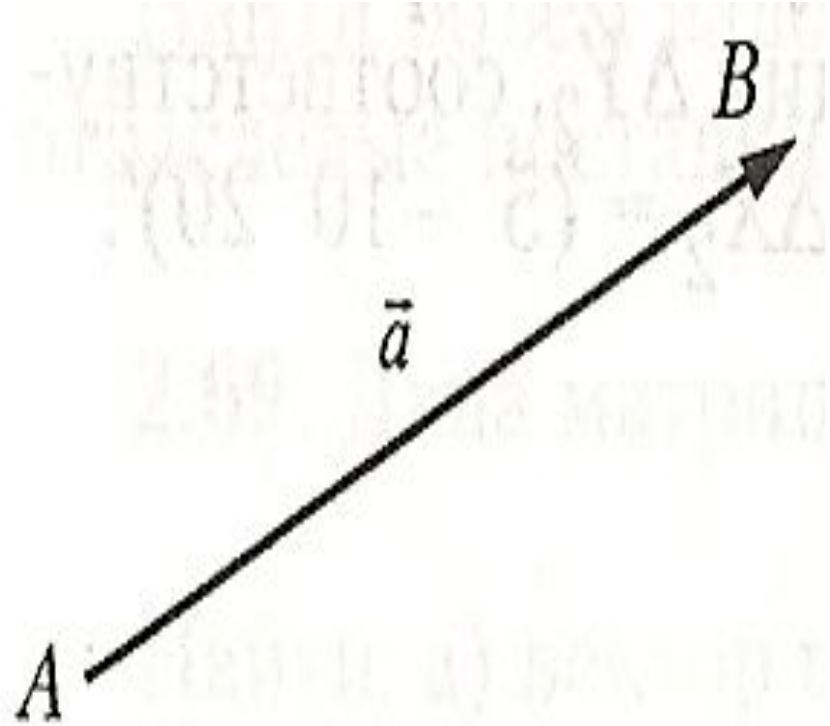
Векторы

Математика— **точная наука** в экономике и менеджменте, исследовавшая **количественные отношения** и **экономические формы**; более современное понимание: это наука об отношениях между **объектами**, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, — именно тех, которые в качестве **аксиом** положены в основание той или иной математической теории.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. *Вектором называется направленный отрезок \mathbf{a} с начальной точкой A и конечной точкой B (который можно перемещать параллельно самому себе).*

Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой либо выделяться жирным шрифтом, например



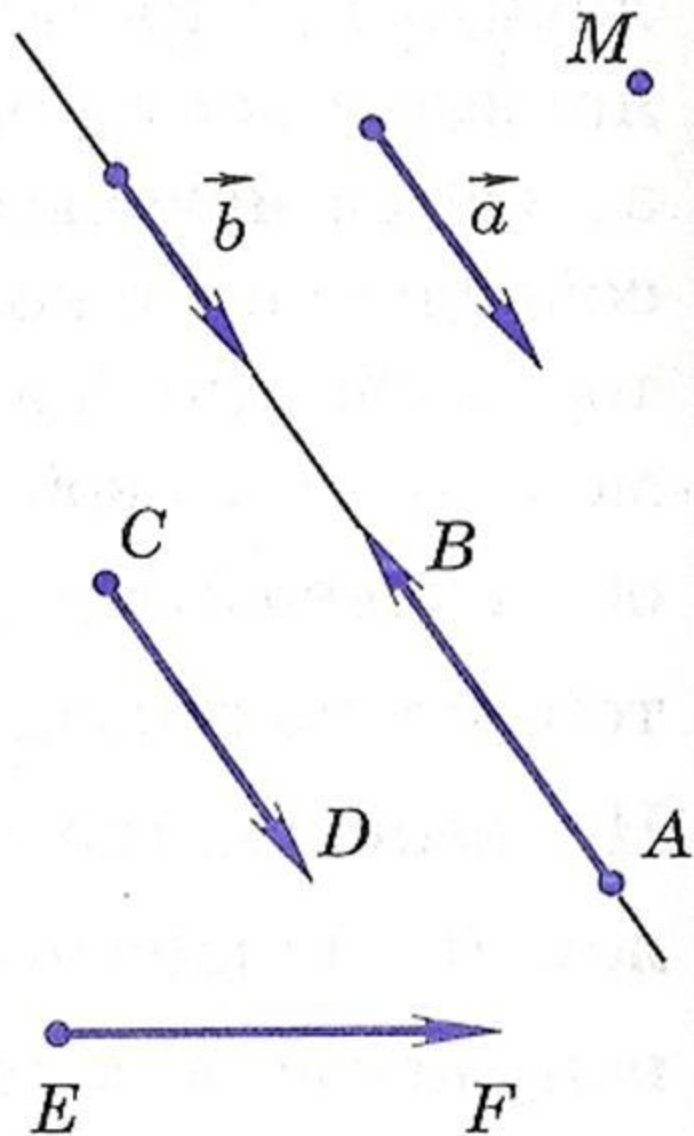
$$\mathbf{a} = AB, \vec{a} = \overline{AB} \quad \text{или} \quad \overline{a} = \overline{AB}.$$

Определение. *Длиной (нормой или модулем)*

$|\overrightarrow{AB}|$ **вектора** \overrightarrow{AB}

называется число, равное длине отрезка AB , изображающего вектор.

Определение. *Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются **коллинеарными**.*



Определение. Если

начало и конец
вектора совпадают,

например \overrightarrow{AA} , то
такой вектор

называют **нулевым** и
обозначают $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$

Длина нулевого
вектора равна нулю:

$|\vec{0}| = 0$. Поскольку

направление нулевого
вектора произвольно,

то он коллинеарен
любому вектору.

Определение.

Произведение вектора \vec{a}

на число λ называется

вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, имеющий

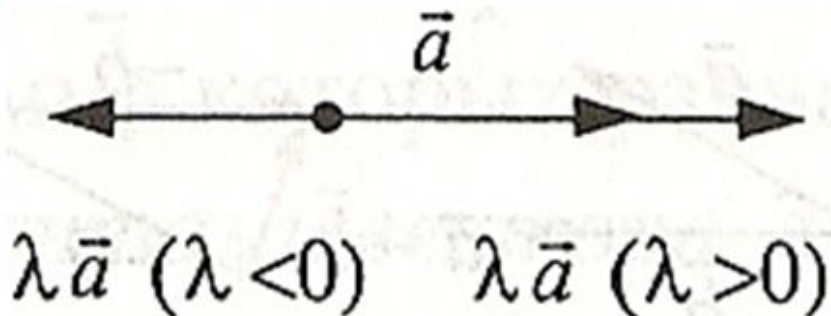
длину $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$,

направление которого
совпадает с \vec{a} ,

если $\lambda > 0$, и

противоположно ему,

если $\lambda < 0$.



Определение.

Противоположным вектором называется произведение вектора \vec{a} на число (-1) , т.е.

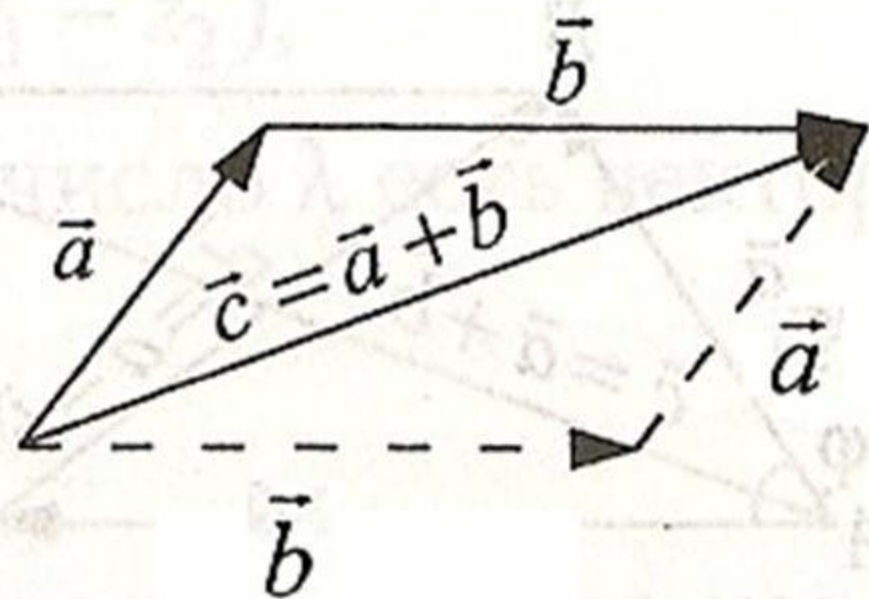
$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

Очевидно, что вектор \vec{c} в этом случае представляет диагональ параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , как на сторонах (**правило параллелограмма**)

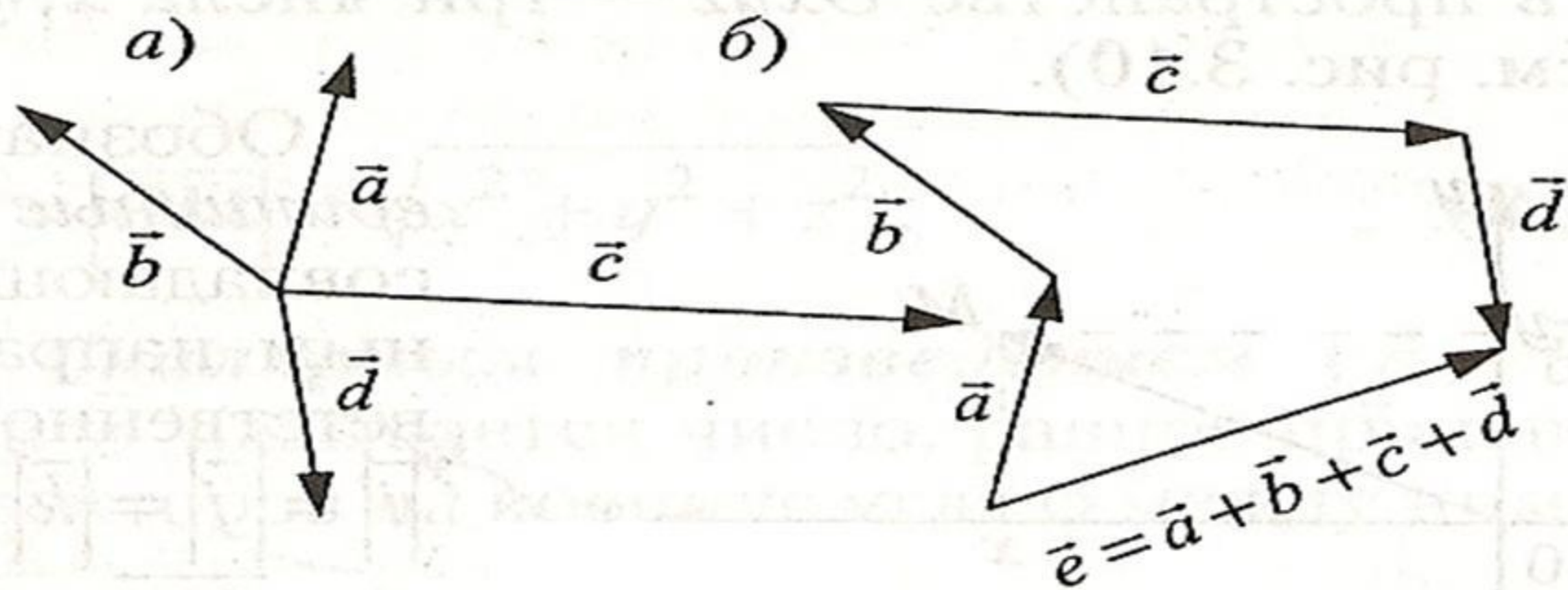
Определение. Суммой двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

направленный из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} (**правило треугольника**)

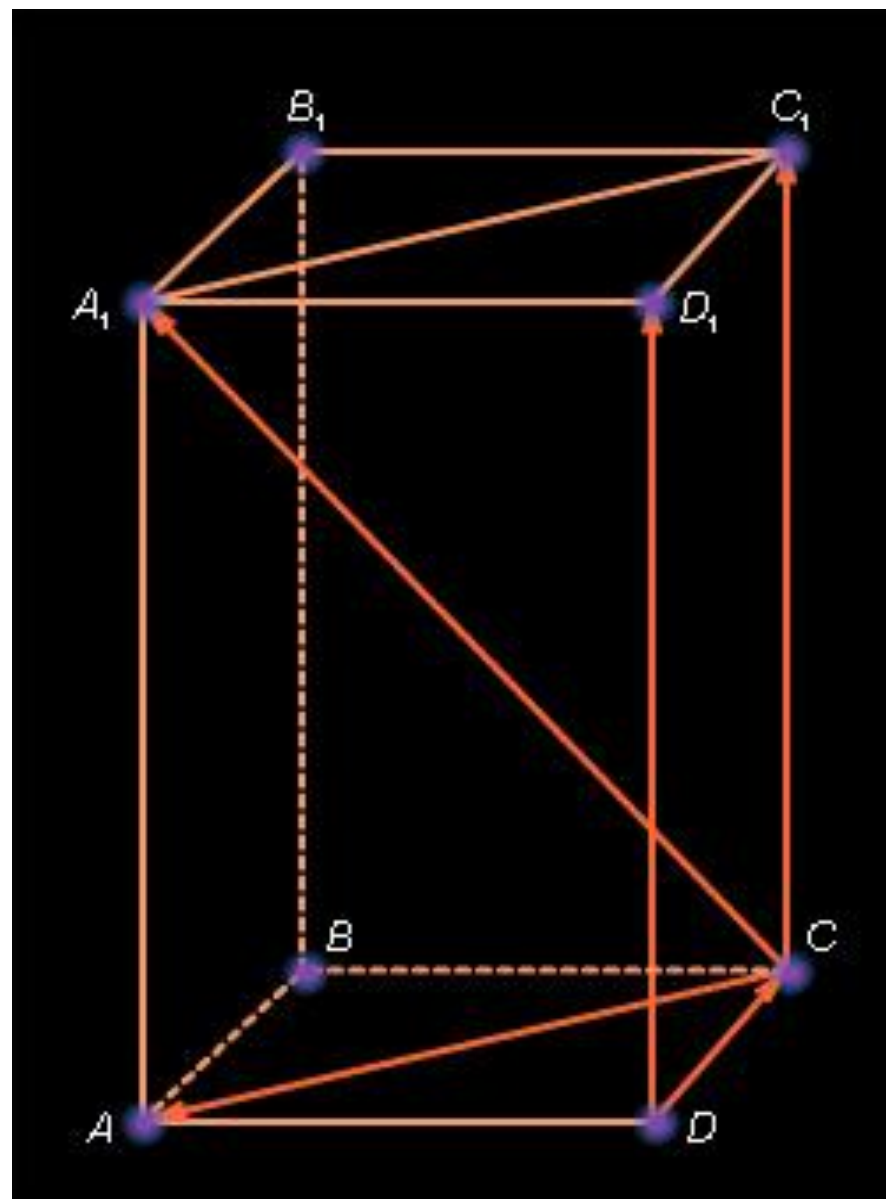


Аналогично определяется сумма нескольких векторов. Так, например, сумма четырех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ есть вектор $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, начало которого совпадает с началом вектора \vec{a} , а конец – с концом вектора \vec{d} (**правило многоугольника**)

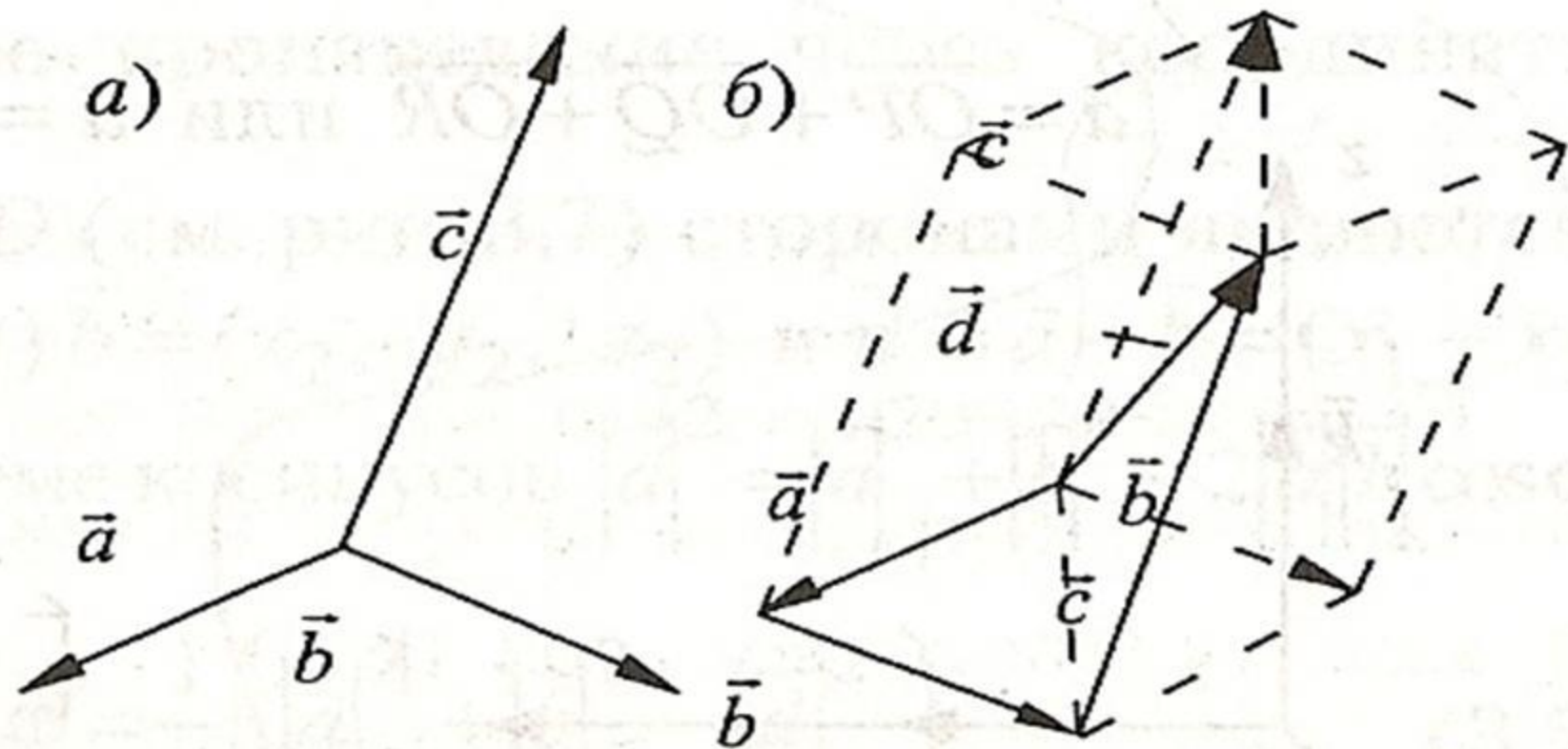


Определение.

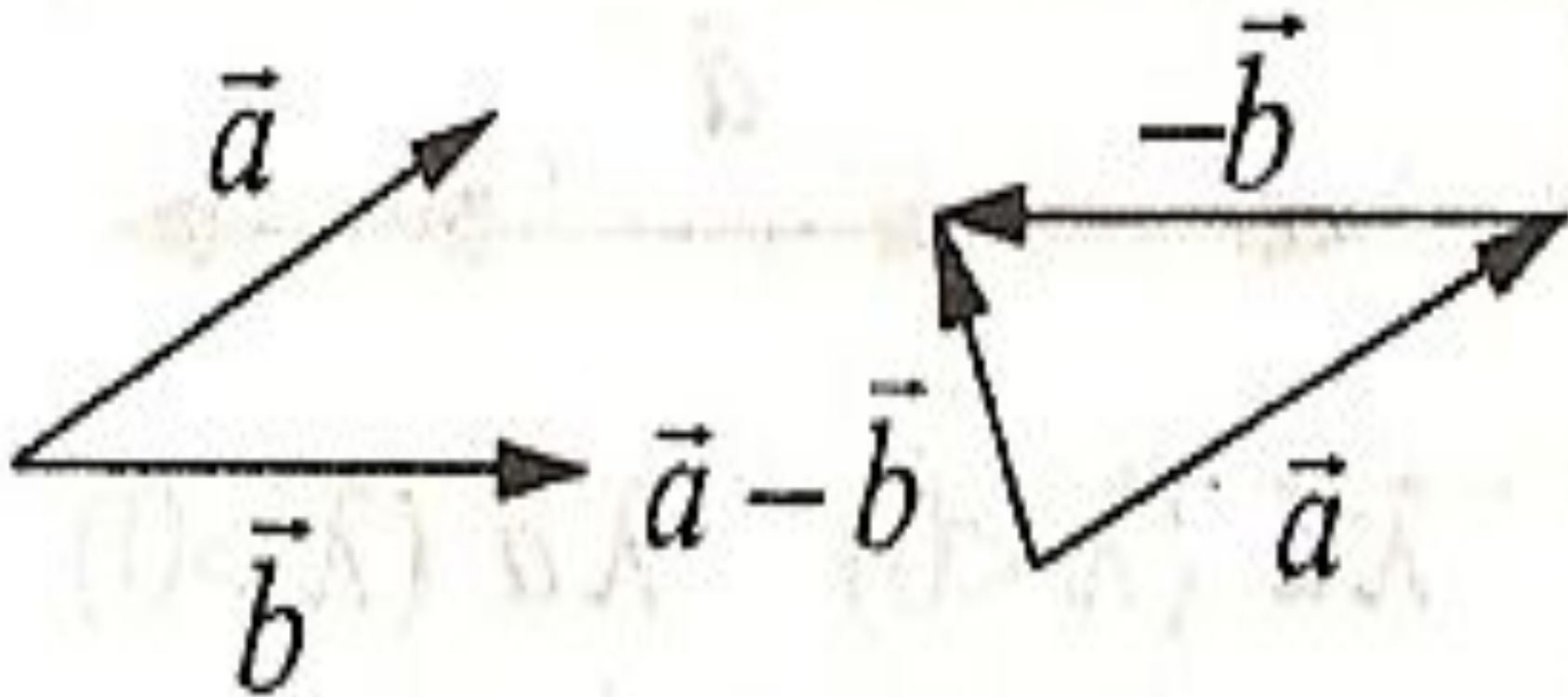
*Векторы,
лежащие в одной
плоскости или
параллельных
плоскостях,
называются
компланарными*



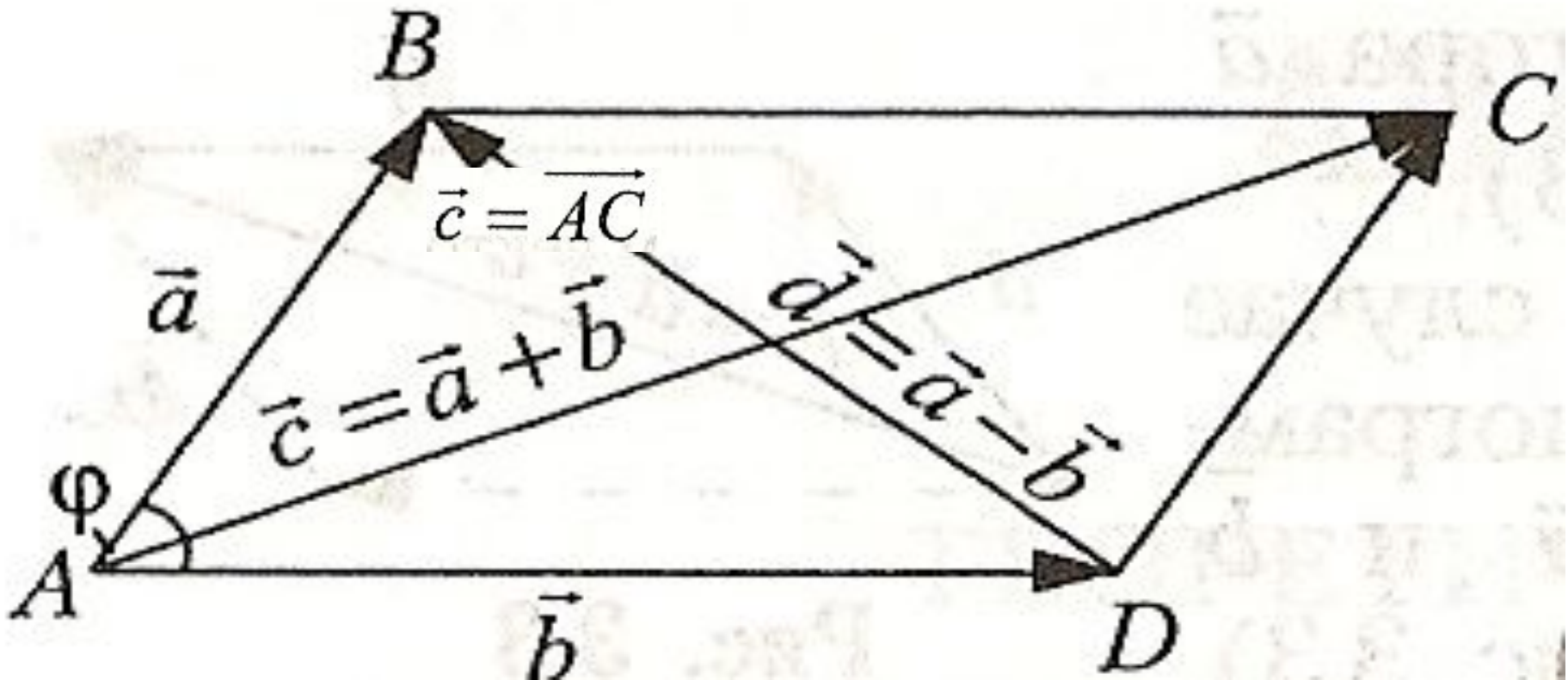
Вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, определенный таким образом, представляет диагональ параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , не лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях (**правило параллелепипеда**)



Определение. Разностью двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется сумма вектора \vec{a} и вектора $-\vec{b}$ противоположного \vec{b} .



В параллелограмме, построенном на векторах \vec{a} и \vec{b} , одна диагональ \vec{c} – представляет сумму векторов \vec{a} и \vec{b} , а другая диагональ \vec{d} – их разность.



Если перенести вектор параллельно самому себе и поместить его начало с начал координат, то можно сформулировать

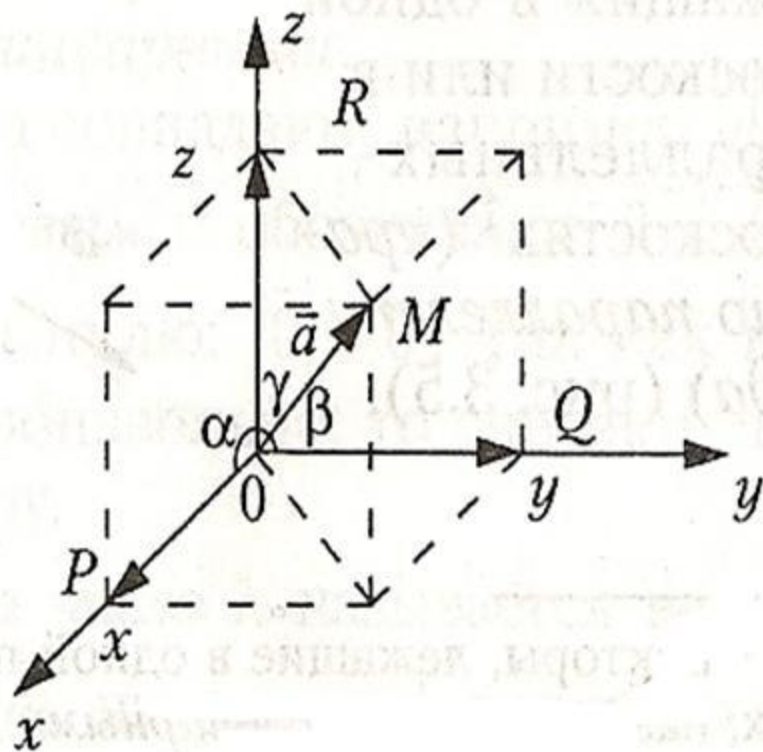
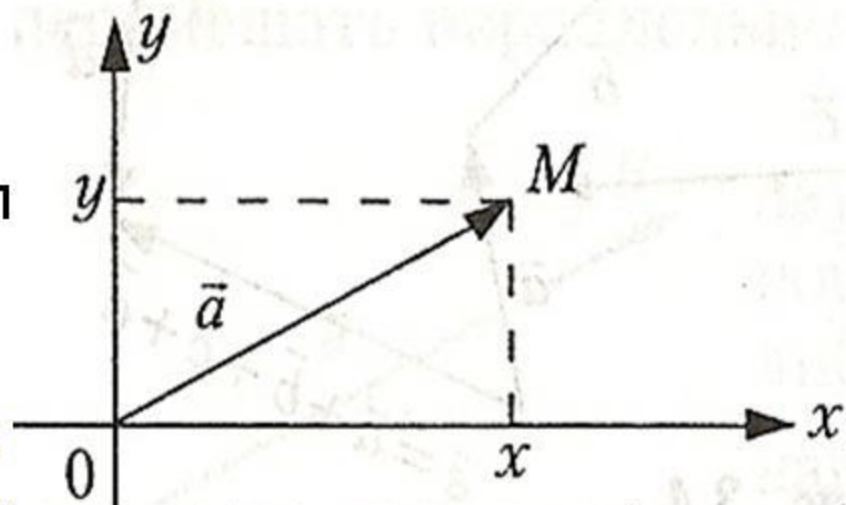
Определение. Координатами вектора \vec{a} называются координаты его конца.

Например, координаты вектора

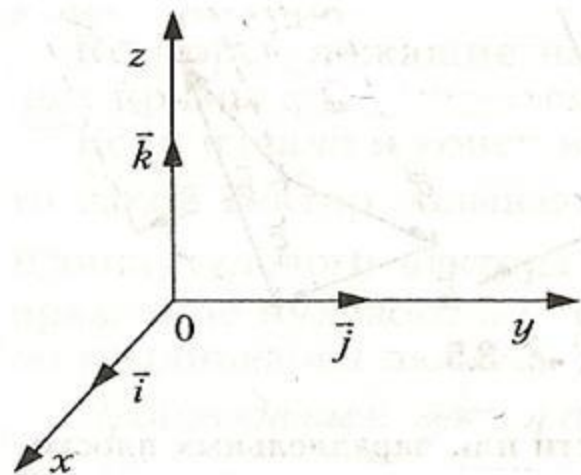
$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$$

на плоскости Oxy являются два числа x и y ($\vec{a} = (x, y)$),

а в пространстве $Oxyz$ – три числа x, y, z ($\vec{a} = (x, y, z)$)



Обозначим через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$,
единичные векторы, или **орты**,
 совпадающие с положительным
 направлением осей соответственно
 Ox, Oy, Oz ; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

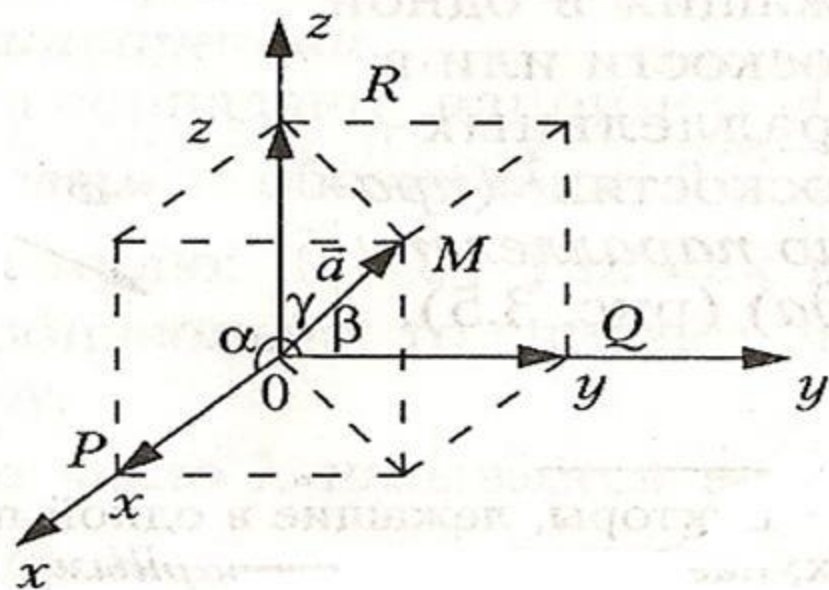


Тогда вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$
 может быть представлен в виде

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

или

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



Определение. Формула $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ называется разложением вектора \vec{a} по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Векторы $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$, сумма которых равна вектору \vec{a} .

$\vec{a} = (x, y, z)$, называются компонентами вектора

Отметим, что сумма и разность векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ являются соответственно векторы

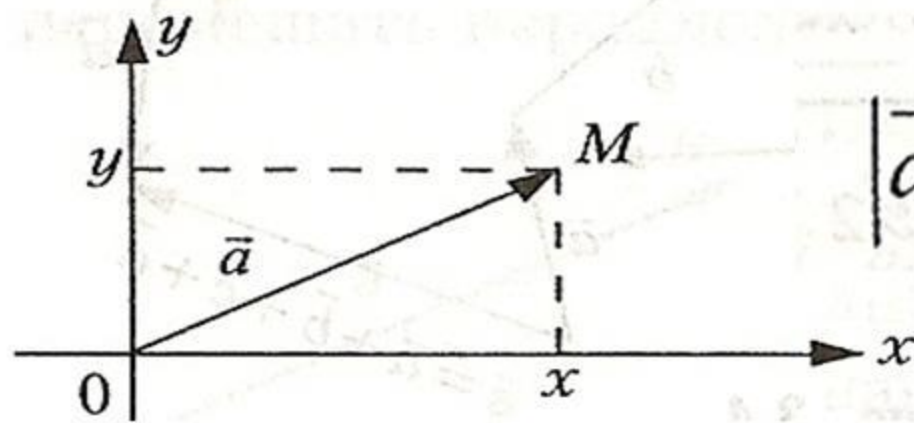
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

А произведением вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть вектор

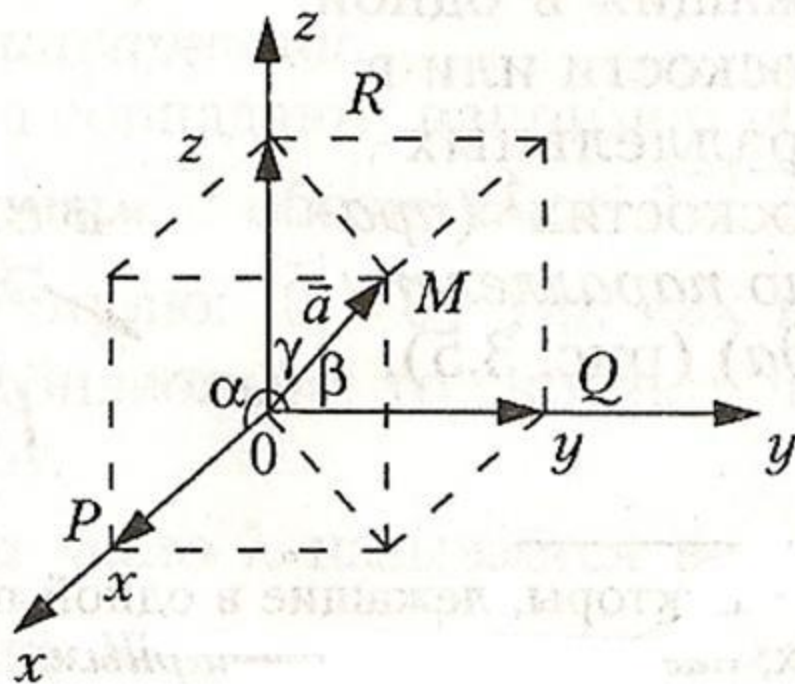
$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:



$$|\vec{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Определение. Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Определение. Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Если $\vec{a} = \vec{b}$ и угол $\varphi = 0$, т.е. $\cos\varphi = 1$,
то скалярный квадрат вектора равен
квадрату его длины.

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

Расстояние d между двумя точками
плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ есть длина
вектора $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

$$d = \sqrt{|\vec{AB}|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} определяется

формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности или ортогональности двух векторов

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

является равенство нулю их

скалярного произведения $\vec{a}\vec{b} = 0$ или

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Условие коллинеарности или параллельности двух векторов

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

является $\vec{b} = k\vec{a}$ или $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$.

Пример

Даны векторы $\vec{a} = (3; -7; 2)$ и $\vec{b} = (9; -3; -5)$

Найти:

- Вектор $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$;
- Длины векторов \vec{c} и \vec{d} ;
- Скалярный квадрат вектора \vec{d} ; (\vec{c}, \vec{d})
- Скалярное произведение векторов
- Угол между векторами \vec{c} и \vec{d} .

Найти векторы $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$

Пусть даны векторы

$$\vec{a} = (3; -7; 2) \text{ и } \vec{b} = (9; -3; -5).$$

Тогда

$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} = (2 \cdot 3; 2 \cdot (-7); 2 \cdot 2) = (6; -14; 4);$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (9 - 3; -3 - (-7); -5 - 2) = (6; 4; -7).$$

$$\text{Ответ: } \vec{c} = (6; -14; 4); \vec{d} = (6; 4; -7).$$

Пусть даны векторы

$$\vec{d} = (6; 4; -7) \text{ и } \vec{c} = (6; -14; 4).$$

Тогда

$$|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + (-14)^2 + 4^2} = 2\sqrt{62};$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{101}.$$

Ответ: $|\vec{c}| = 2\sqrt{62}; |\vec{d}| = \sqrt{101}.$

Найти
длины
векторов

\vec{c} и \vec{d}

Найти скалярный квадрат
вектора

Заметим, что

$$\vec{d}^2 = \left| \vec{d} \right|^2 = \left(\sqrt{101} \right)^2 = 101.$$

Ответ : $\vec{d}^2 = 101.$

\vec{d}

Найти скалярное
произведение
векторов

$$\vec{c} \cdot \vec{d}$$

Пусть даны векторы

$$\vec{d} = (6; 4; -7) \text{ и } \vec{c} = (6; -14; 4).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= 6 \cdot 6 + (-14) \cdot 4 + 4 \cdot (-7) = \\ &= 36 - 56 - 28 = -48 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \vec{c} \cdot \vec{d} = -48.$$

Пусть даны векторы

$$\vec{d} = (6; 4; -7) \text{ и } \vec{c} = (6; -14; 4).$$

Тогда

$$\cos \left(\overset{\wedge}{\vec{d}; \vec{c}} \right) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{-48}{2\sqrt{62} \cdot \sqrt{101}} = -\frac{24}{\sqrt{6262}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overset{\wedge}{\vec{d}; \vec{c}} \right) = \arccos \left(-\frac{24}{\sqrt{6262}} \right) = \pi - \arccos \left(\frac{24}{\sqrt{6262}} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\overset{\wedge}{\vec{d}; \vec{c}} \right) = \pi - \arccos \left(\frac{24}{\sqrt{6262}} \right).$$

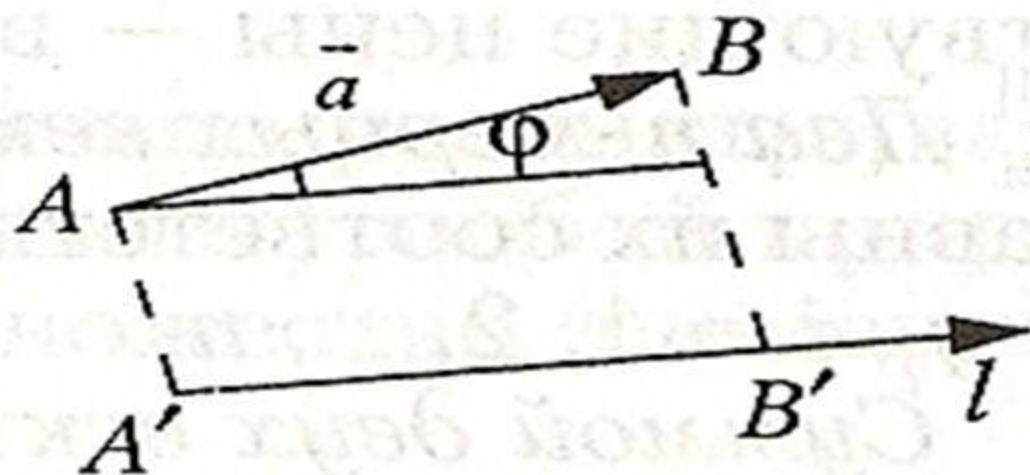
Найти угол между
векторами

\vec{c} и \vec{d}

Определение. Проекцией $\text{пр}_l \vec{a}$ вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на ось l называется величина направленного отрезка $A'B'$

(где $AA' \perp l, BB' \perp l$), т.е. число, равное длине отрезка $A'B'$, взятое со знаком «+», если

направление $\vec{a} = \overline{AB}$ совпадает с направлением оси l , и со знаком «-», если эти направления противоположны.



$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Определение. *Направляющими косинусами*

вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ *называются косинусы углов*

α, β, γ , *образуемых*

вектором \vec{a} *с осями*

координат. Угол α *– угол*

между вектором $\vec{a} = (x, y, z)$

и единичным вектором

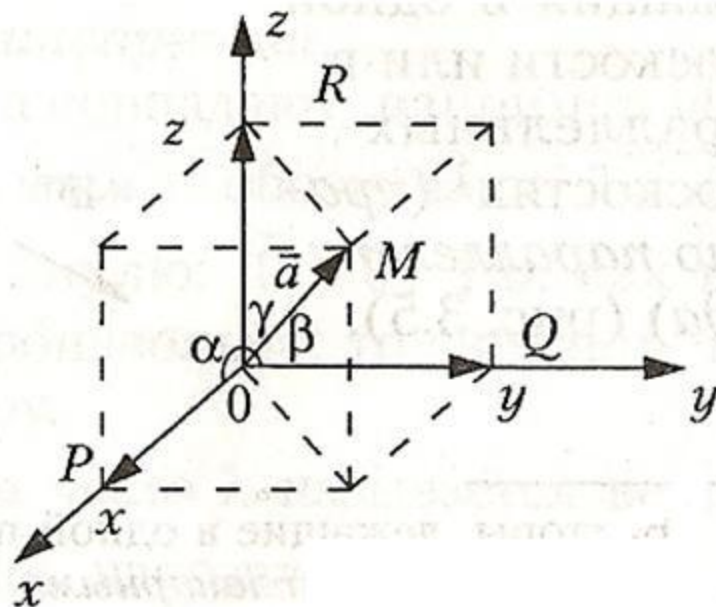
(ортом) $\vec{i} = (1; 0; 0)$. *По формуле*

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{i})}{|\vec{a}| |\vec{i}|}$$

(аналогично определяются $\cos \beta$ *и* $\cos \gamma$ *)*

или
$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

При этом
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$



Понятие n -мерного пространства

Определение. n -мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записанных в виде $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – i -я компонента вектора.

Понятие n -мерного вектора широко используется в экономике.

Пример. Некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а соответствующие им цены – вектором $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Замечание. Компоненты n -мерного вектора обозначают одной буквой, но с разными индексами (в отличие от 2-хмерных или 3-хмерных векторов), а сам вектор – той же буквой (без номеров и стрелки), выделенной жирным шрифтом.

Определение. *Два n -мерных вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, если $x_i = y_i$ ($i=1,2,\dots,n$)*

Определение. Суммой двух n -мерных векторов называется вектор $z = x + y$, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых векторов, т.е. $z_i = x_i + y_i$ ($i=1,2,\dots,n$).

Определение. Произведением вектора x на действительное число λ называется вектор $u = \lambda \cdot x$ компоненты, которого равны произведению λ на соответствующие компоненты вектора x .

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют свойствам:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ – коммутативный закон;
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ – ассоциативный закон;
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})$ – ассоциативный закон относительно числового множителя;
4. $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$ – дистрибутивный закон относительно суммы векторов;
5. $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$ – дистрибутивный закон относительно числовых множителей;
6. существует нулевой вектор $\mathbf{\Theta} = (0, 0, \dots, 0)$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{\Theta} = \mathbf{x}$ для любого вектора (закон нулевого вектора);
7. для любого вектора \mathbf{x} существует противоположный вектор $(-\mathbf{x})$ такой, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{\Theta}$;
8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для любого вектора \mathbf{x} (особая роль числового множителя 1)

Определение. Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным восьми законам (аксиомам), называется **векторным (линейным) пространством**.

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение математики как науки. Ее предмет и метод. Как используются математические методы в экономике и менеджменте.
2. Что такое линейное векторное пространство. Какими свойствами оно обладает?
3. Дайте определение n - мерного вектора.
4. Определение действий над векторами и свойства этих операций.
5. Дайте определение скалярного произведения векторов. Сформулируйте его свойства.

Задания для самостоятельной работы:

- Найти единичный вектор \mathbf{e} , совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{a} = (3, -4, 12)$.
- Решить уравнение $3\mathbf{x} - 7\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 0$, где $\mathbf{a} = (5, 3, 7)$, $\mathbf{b} = (4, 3, 20)$.
- Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = (2, -3, 1, 5, 0)$, $\mathbf{b} = (3, 4, 5, 2, 6)$.