Тема 1. *Введение в курс. Линейное пространство. N-мерные векторы и действия .над ними*

Лекция 1

Элементы векторной алгебры (матричного анализа).

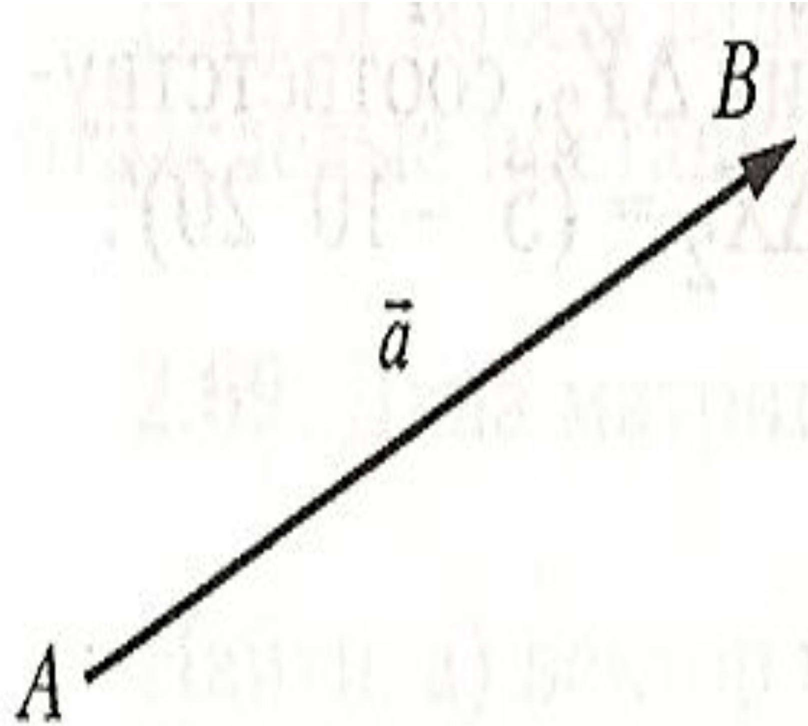
Векторы

Математика— **точная наука** в экономике и менеджменте, исследовавшая **количественные отношения** и **экономические формы**; более современное понимание: это наука об отношениях между **объектами**, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, — именно тех, которые в качестве **аксиом** положены в основание той или иной математической теории.

Основные понятия

Определение. ***Вектором*** *называется направленный отрезок* ***a*** *с начальной точкой* ***A*** *и конечной точкой* ***B*** *(который можно перемещать параллельно самому себе).*

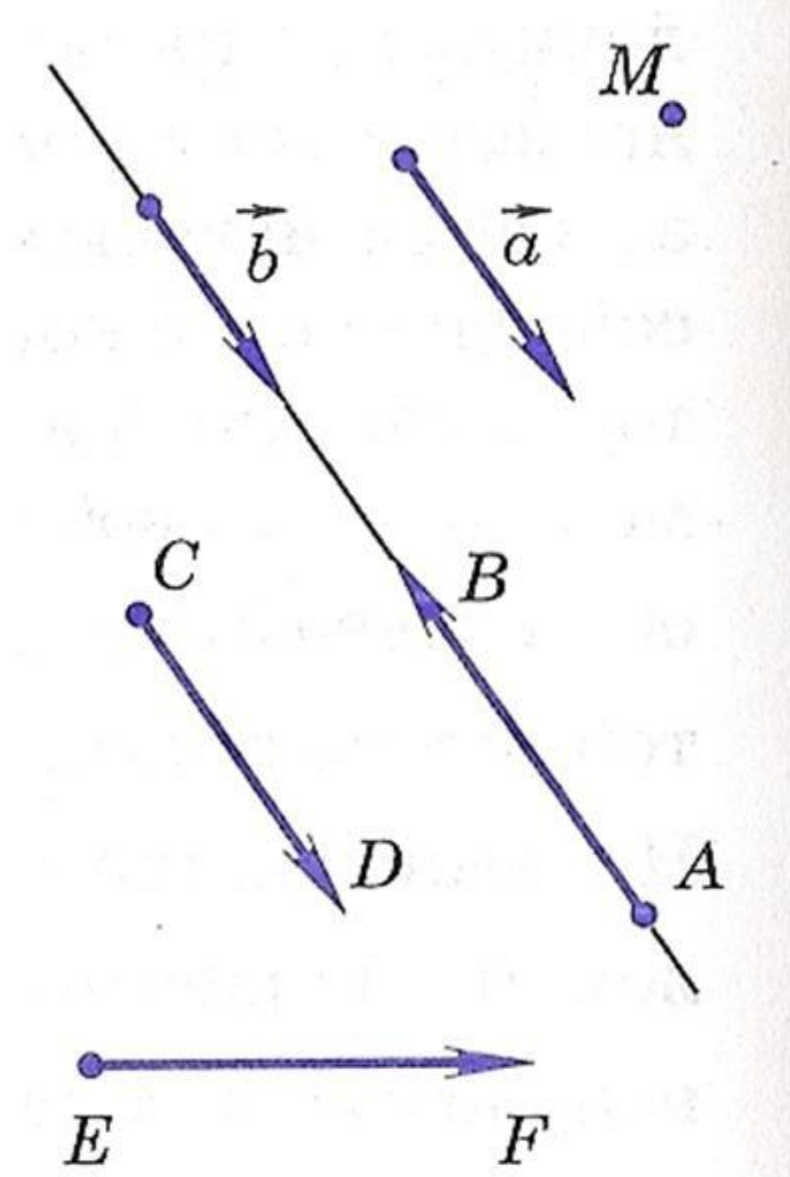
Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой либо выделяться жирным шрифтом, например



$$\mathbf{a} = AB,\ \vec{a} = \overrightarrow{AB} \text{ или } \bar{a} = \overline{AB}.$$

Определение. ***Длиной (нормой или модулем)*** $|\overrightarrow{AB}|$ ***вектора*** $\overrightarrow{AB}$ *называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор.*

Определение. *Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются* ***коллинеарными***.



Определение. *Если начало и конец вектора совпадают, например $\overrightarrow{AA}$, то такой вектор называют* ***нулевым*** *и обозначают* $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$

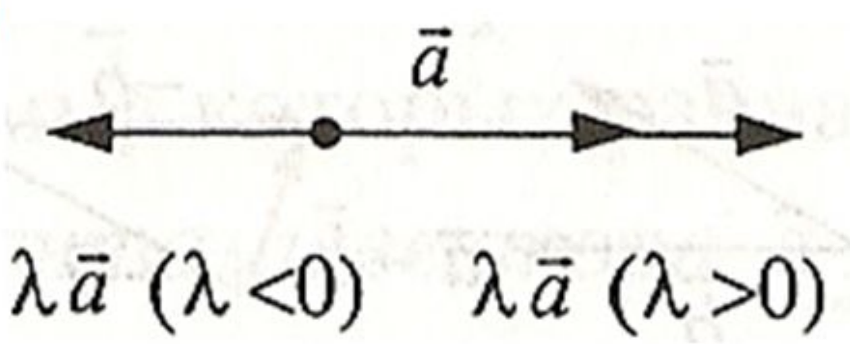
Длина нулевого вектора равна нулю: $|\vec{0}| = 0$. Поскольку направление нулевого вектора произвольно, то *он коллинеарен любому вектору.*

Определение.

Произведение вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ *называется вектор* $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ *, имеющий длину* $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ *, направление которого совпадает с* $\vec{a}$ *,*

если $\lambda > 0$, *и противоположно ему,*

если $\lambda < 0$.



Определение. ***Противоположным вектором*** *называется произведение вектора* $\vec{a}$ *на число* (-1), *т.е.*

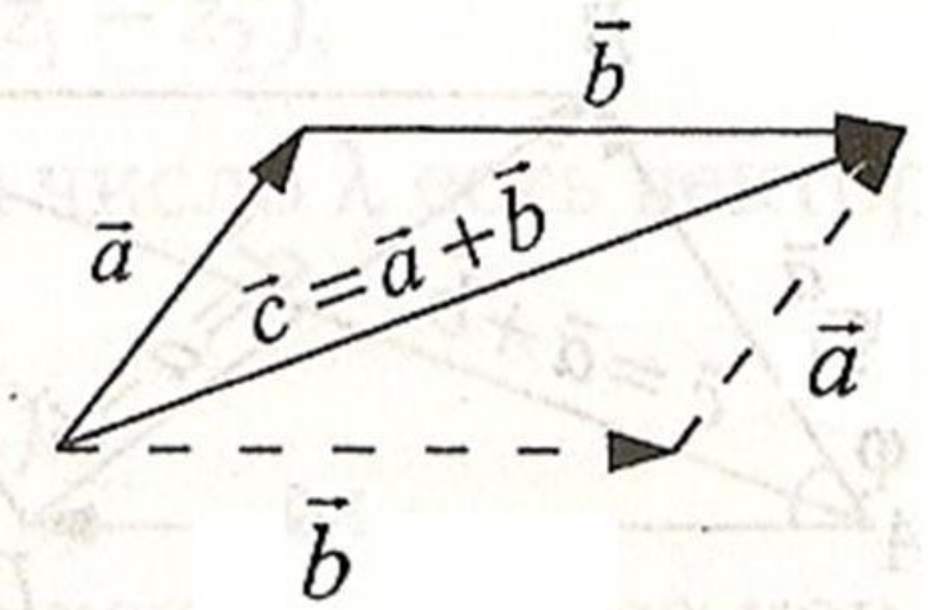
$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

Очевидно, что вектор $\vec{c}$ в этом случае представляет диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах (***правило параллелограмма***)

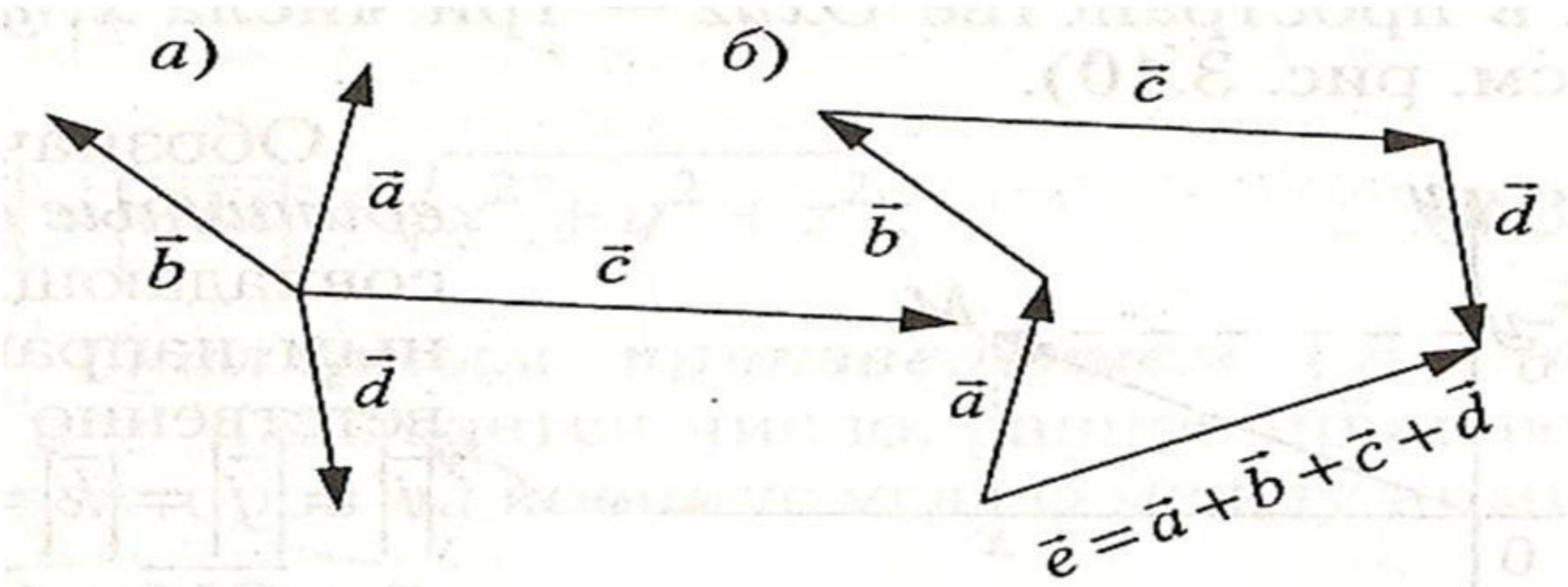
Определение. ***Суммой двух векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *называется вектор*

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

направленный из начала вектора $\vec{a}$ *в конец вектора* $\vec{b}$ (***правило треугольника***)

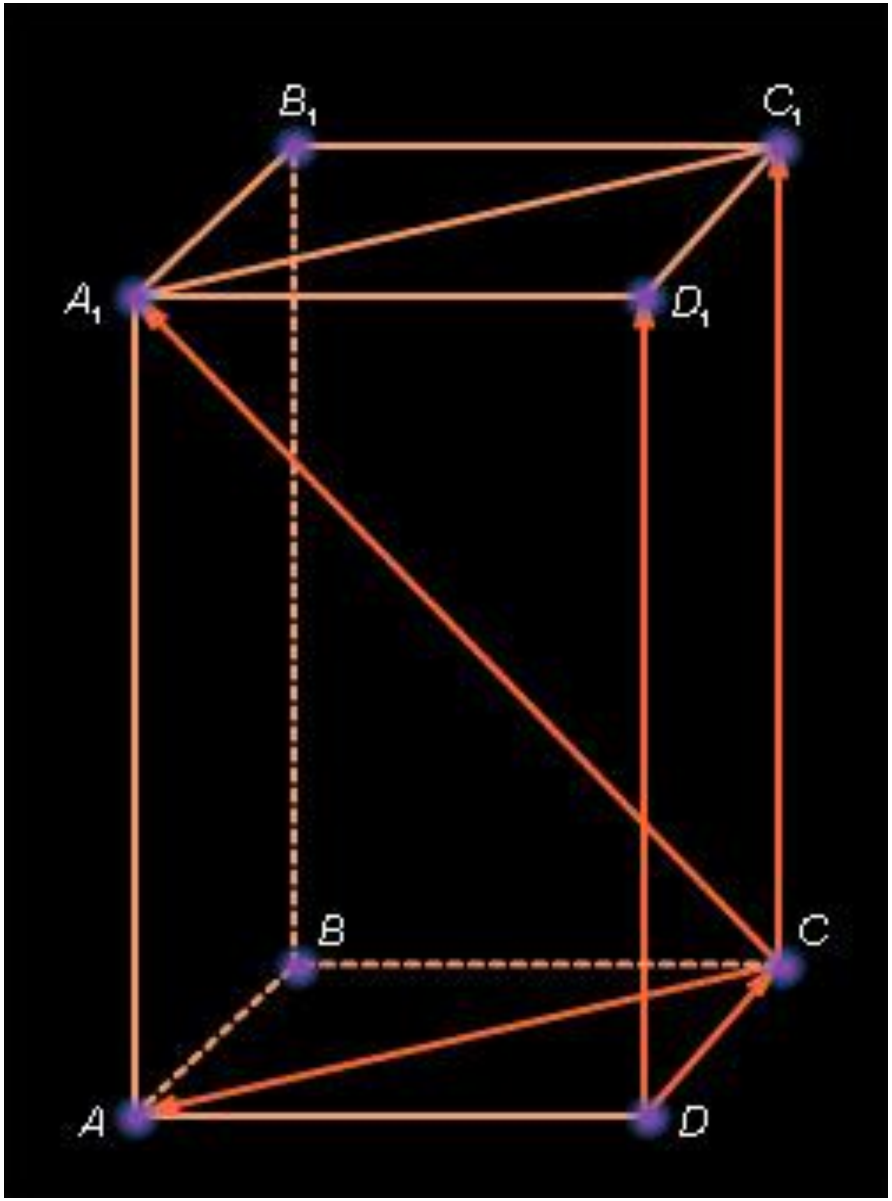


Аналогично определяется сумма нескольких векторов. Так, например, сумма четырех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ есть вектор $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{d}$ (***правило многоугольника***)

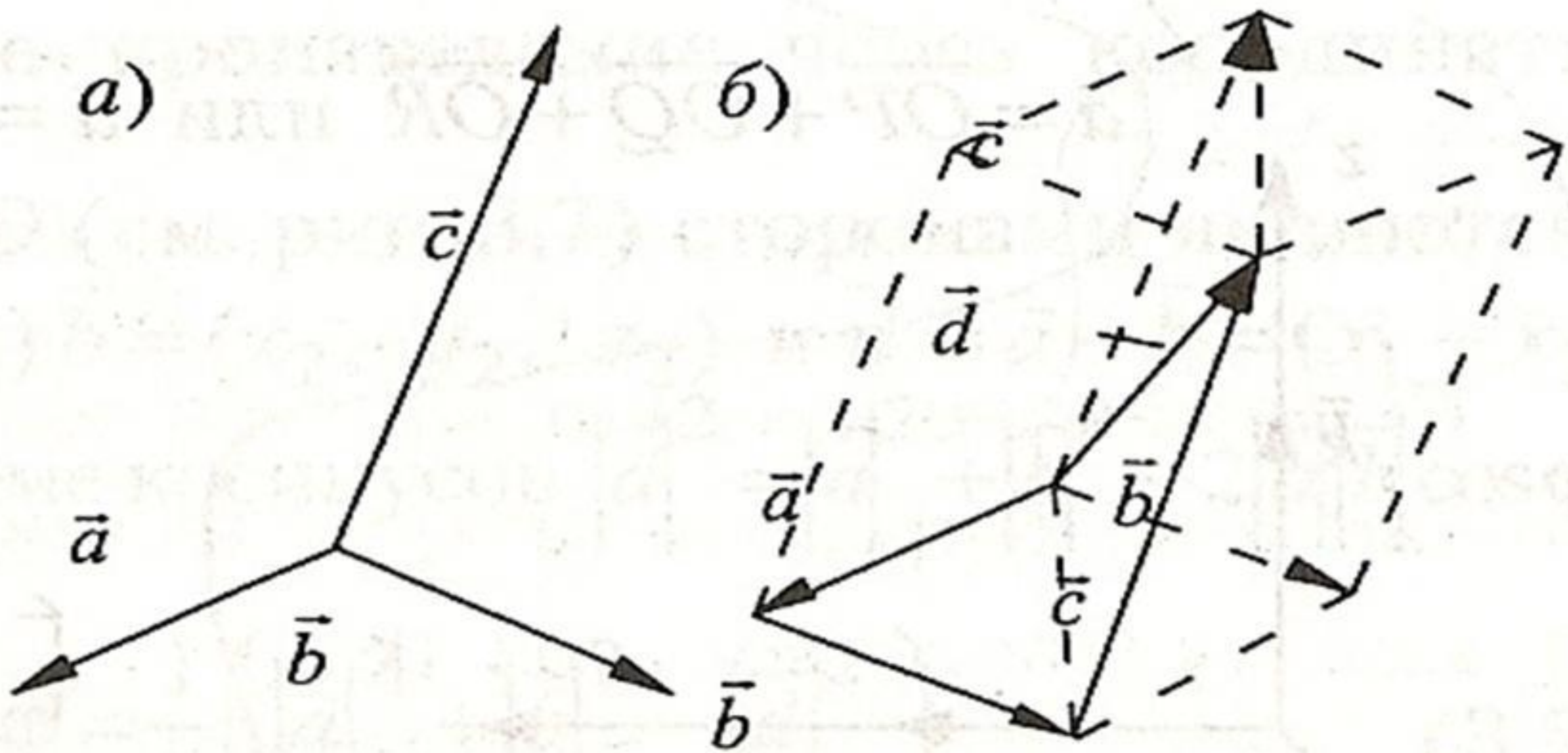


Определение.

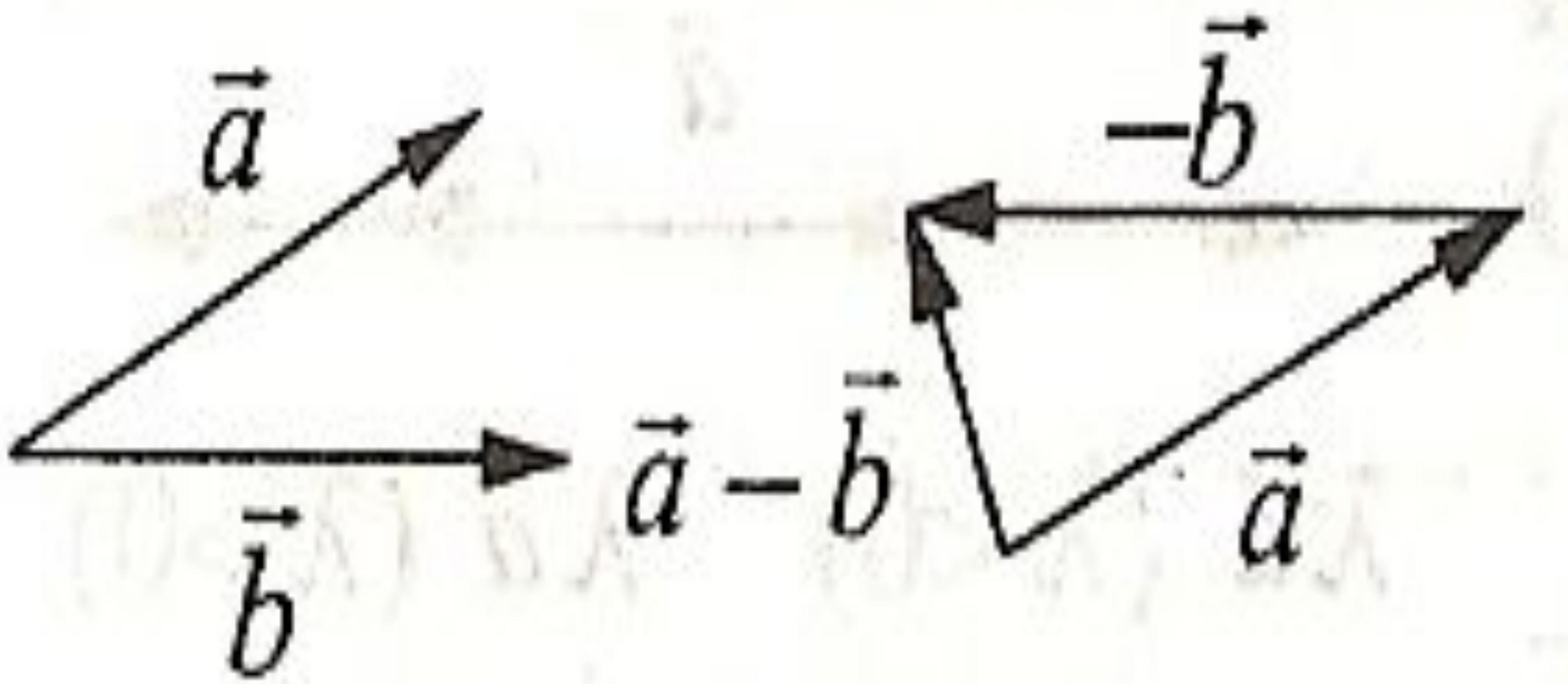
Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называются ***компланарными***



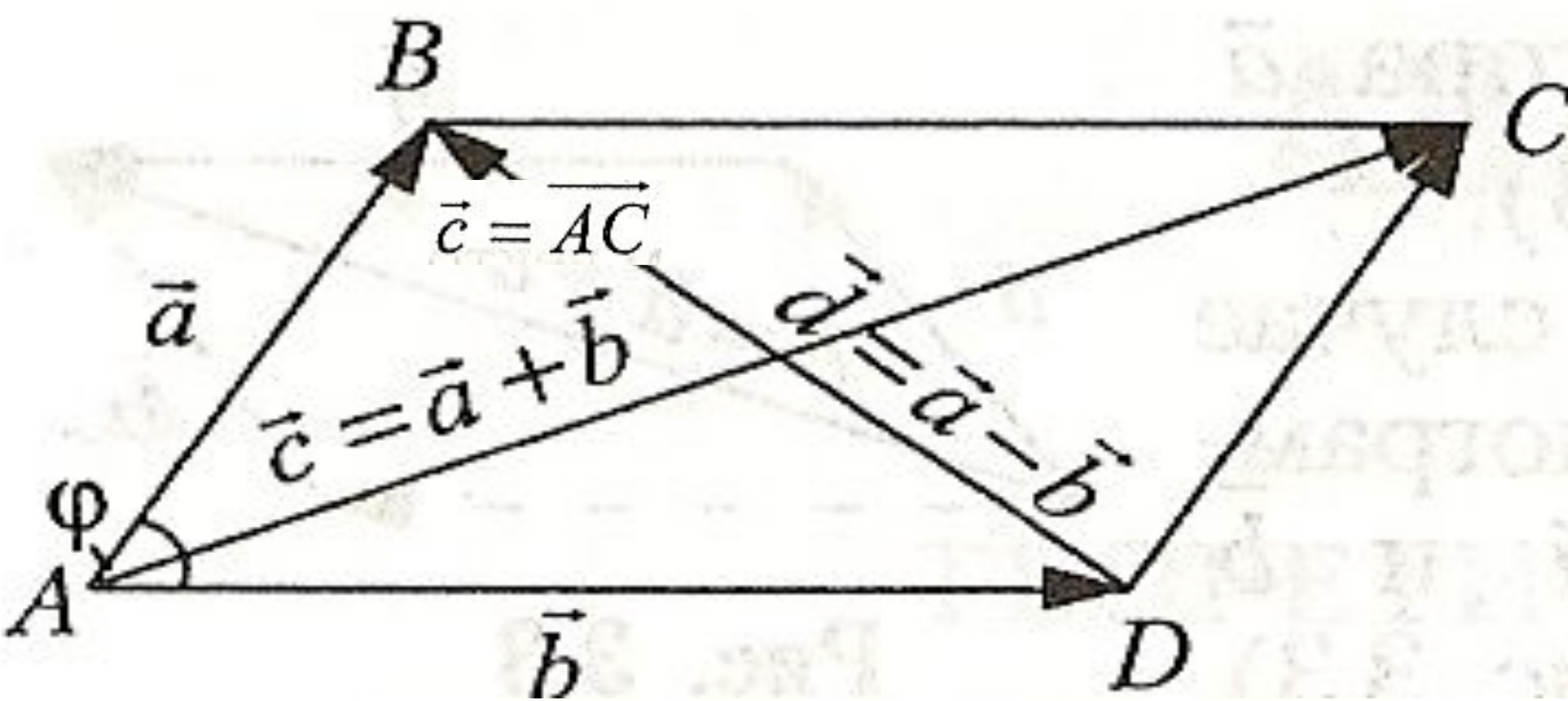
Вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, определенный таким образом, представляет диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, не лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях (***правило параллелепипеда***)



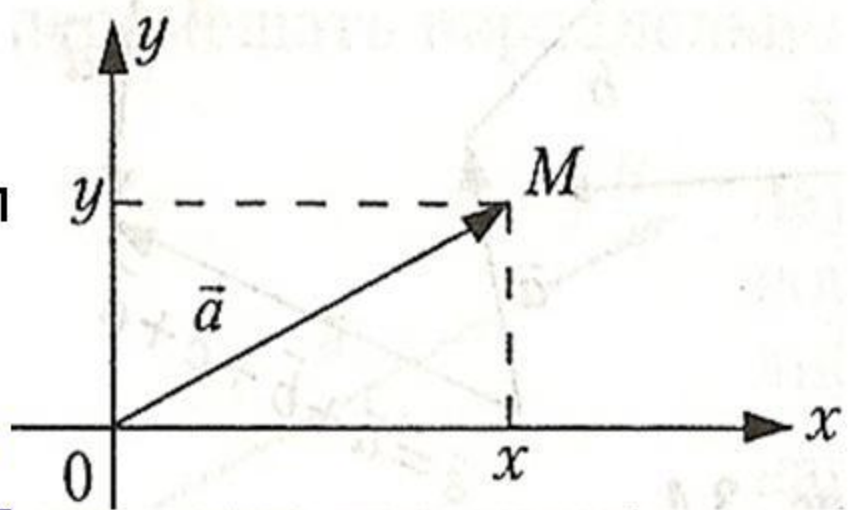
Определение. ***Разностью двух векторов*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется сумма вектора* $\vec{a}$ *и вектора* $-\vec{b}$, *противоположного* $\vec{b}$.



В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$, одна диагональ – вектор $\vec{c} = \vec{AC}$ – представляет сумму векторов, а другая диагональ – вектор $\vec{d} = \vec{DB}$ – их разность.



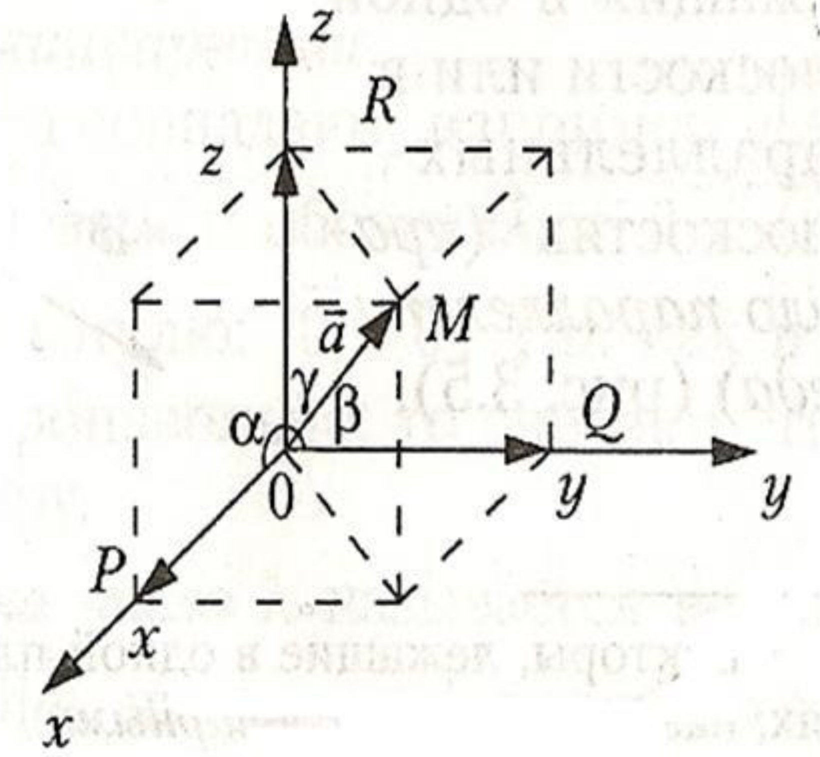
Если перенести вектор параллельно самому себе и поместить его начало с начал координат, то можно сформулировать



Определение. ***Координатами вектора*** $\vec{a}$ ***называются координаты его конца.***

Например, координаты вектора

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$$

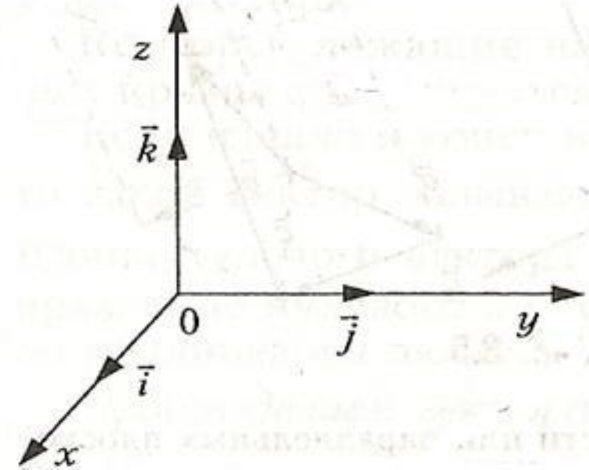


на плоскости Oxy являются два числа x и y ($\vec{a} = (x, y)$),

а в пространстве $Oxyz$ – три числа x, y, z ($\vec{a} = (x, y, z)$)

Обозначим через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$,

единичные векторы , или орты, совпадающие с положительным направлением осей соответственно Ox, Oy, Oz; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$



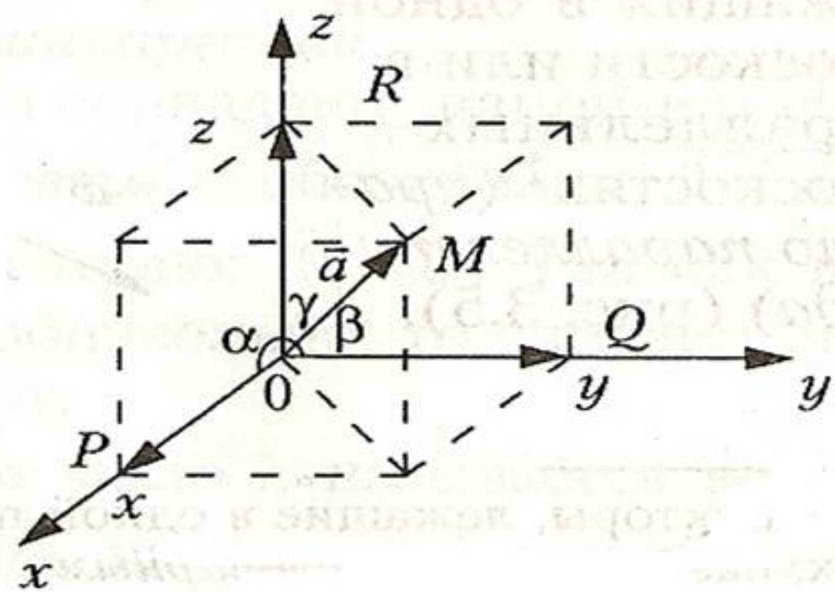
Тогда вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$

может быть представлен в виде

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

или

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



Определение. **Формула** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. *называется разложением вектора* $\vec{a}$ *по векторам* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Векторы $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$,, *сумма которых равна вектору* $\vec{a}$.

$\vec{a} = (x, y, z)$ *, называются* ***компонентами вектора***

Отметим, что сумма и разность векторов $\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ являются соответственно векторы

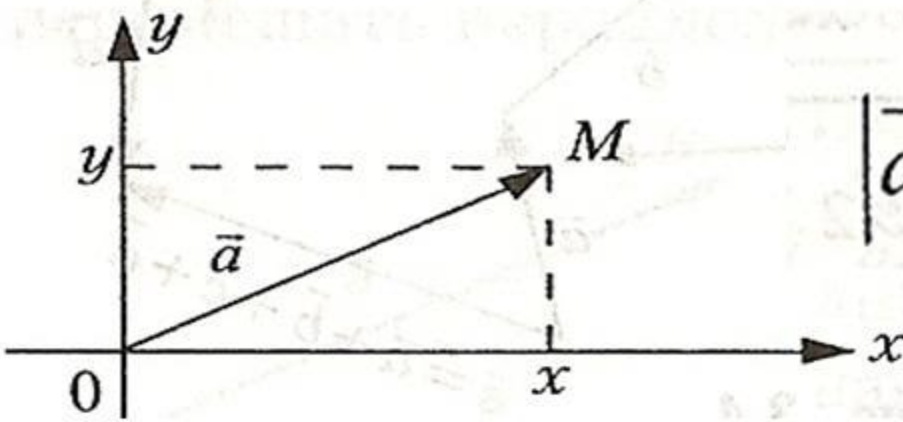
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2),$$

А произведением вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть вектор

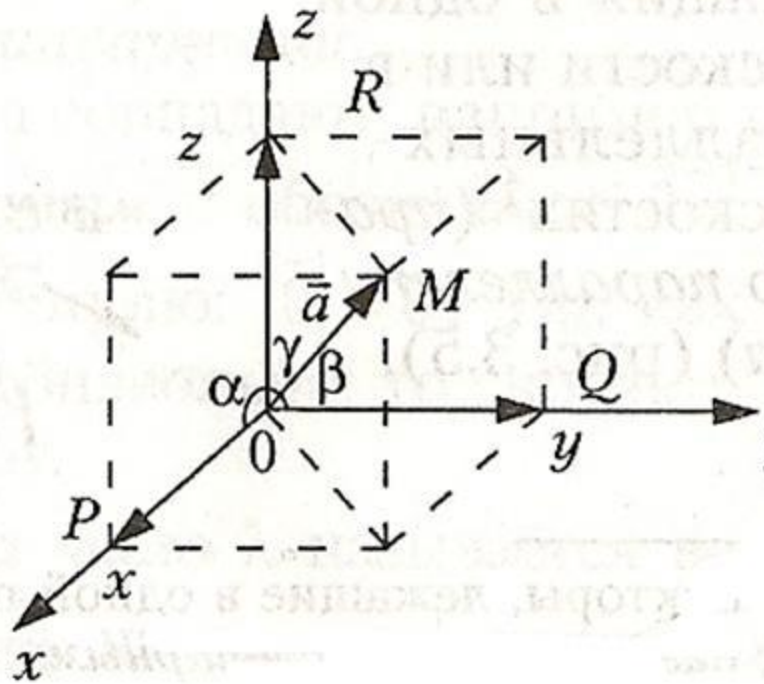
$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1).$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:



$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Определение. ***Скалярным произведением*** *двух векторов* $\vec{a}$, *и* $\vec{b}$ *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла* φ *между ними:*

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi.$$

Определение. ***Скалярным произведением*** *двух векторов* $\vec{a}$, *и* $\vec{b}$ *равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов*

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Если $\vec{a} = \vec{b}$ и угол $\varphi = 0$, т.е. $\cos\varphi = 1$, то *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*.

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

Расстояние ***d*** *между двумя точками плоскости* $A(x_1, y_1)$ *и* $B(x_2, y_2)$ *есть длина вектора* $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$.

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Угол между векторами и определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности или ортогональности двух векторов $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ является равенство нулю их скалярного произведения $\vec{a}\vec{b}=0$ или

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Условие коллинеарности или параллельности двух векторов $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

является $\vec{b}=k\vec{a}$ или $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}$.

Пример

Даны векторы $\vec{a} = (3; -7; 2)$ и $\vec{b} = (9; -3; -5)$

Найти:

- Вектор $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$;
- Длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$;
- Скалярный квадрат вектора $\vec{d}$;
- Скалярное произведение векторов $(\vec{c}, \vec{d})$
- Угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Найти векторы $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a}$ *и* $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$

Пусть даны векторы

$$\vec{a} = (3;\ -7;\ 2) \text{ и } \vec{b} = (9;\ -3;\ -5).$$

Тогда

$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} = (2 \cdot 3;\ 2 \cdot (-7);\ 2 \cdot 2) = (6;\ -14;\ 4);$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (9 - 3;\ -3 - (-7);\ -5 - 2) = (6;\ 4;\ -7).$$

Ответ: $\vec{c} = (6;\ -14;\ 4);\ \vec{d} = (6;\ 4;\ -7).$

Найти длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$

Пусть даны векторы

$$\vec{d} = (6;\ 4;\ -7)\ и\ \vec{c} = (6;\ -14;\ 4).$$

Тогда

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{6^2 + (-14)^2 + 4^2} = 2\sqrt{62};$$

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{101}.$$

Ответ : $\left|\vec{c}\right| = 2\sqrt{62};\ \left|\vec{d}\right| = \sqrt{101}.$

Найти скалярный квадрат вектора $\vec{d}$

Заметим, что

$$\vec{d}^{\,2} = \left|\vec{d}\right|^2 = \left(\sqrt{101}\right)^2 = 101.$$

Ответ: $\vec{d}^{\,2} = 101.$

Найти скалярное произведение векторов

$$\vec{c} \cdot \vec{d}$$

Пусть даны векторы

$$\vec{d} = (6;\ 4;\ -7) \text{ и } \vec{c} = (6;\ -14;\ 4).$$

Тогда

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 6 \cdot 6 + (-14) \cdot 4 + 4 \cdot (-7) =$$

$$= 36 - 56 - 28 = -48$$

$$\text{Ответ: } \vec{c} \cdot \vec{d} = -48.$$

Пусть даны векторы

$$\vec{d} = (6;\ 4;\ -7) \text{ и } \vec{c} = (6;\ -14;\ 4).$$

Найти угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$

Тогда

$$\cos\left(\widehat{\vec{d};\vec{c}}\right) = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|} = \frac{-48}{2\sqrt{62}\cdot\sqrt{101}} = -\frac{24}{\sqrt{6262}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{\vec{d};\vec{c}}\right) = \arccos\left(-\frac{24}{\sqrt{6262}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{6262}}\right)$$

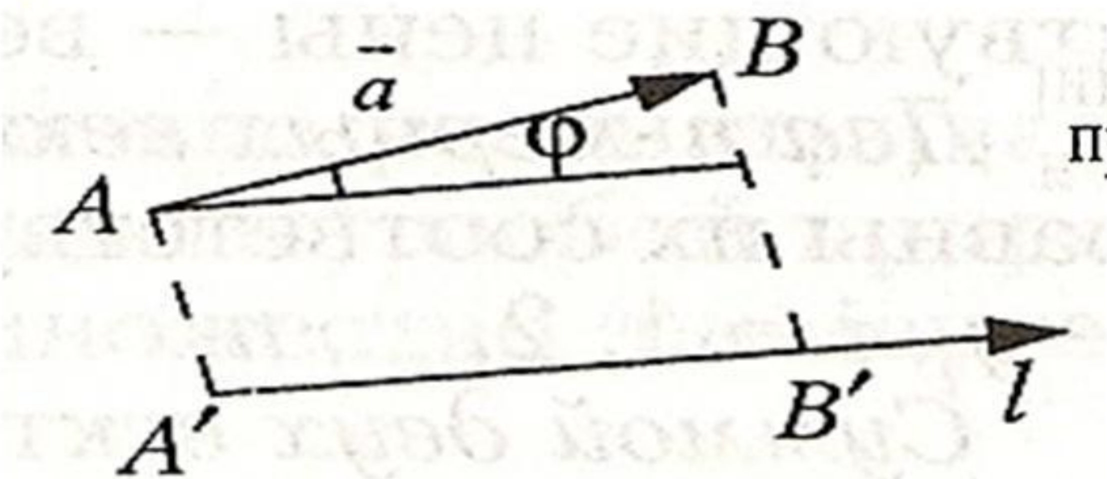
Ответ: $\left(\widehat{\vec{d};\vec{c}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{6262}}\right).$

Определение. *Проекцией* $\text{пр}_l \vec{a}$ *вектора* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *на ось* l *называется величина направленного отрезка*

$A'B'$

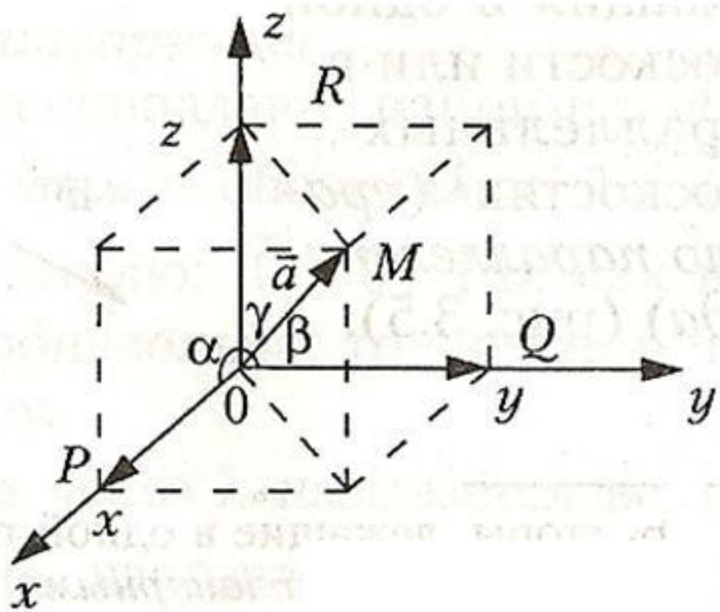
(где $AA' \perp l,\ BB' \perp l$ *), т.е. число, равное длине отрезка* $A'B'$, *взятое со знаком «+», если*

направление $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *совпадает с направлением оси* l, *и со знаком «-», если эти направления противоположны.*



$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Определение. ***Направляющими косинусами вектора*** $\vec{a} = (x, y, z)$ называются косинусы углов *α, β, γ, образуемых вектором* $\vec{a}$ *с осями координат. Угол α – угол между вектором* $\vec{a} = (x, y, z)$ *и единичным вектором (ортом)* $\vec{i} = (1; 0; 0)$. *По формуле*



$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{i})}{|\vec{a}||\vec{i}|}$$

(аналогично определяются cosβ и cos γ)

или $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

При этом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Понятие n-мерного пространства

Определение. ***n-мерным вектором*** *называется упорядоченная совокупность* ***n*** *действительных чисел, записанных в виде* $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, *где* x_i *– i-я компонента вектора.*

Понятие ***n***-мерного вектора широко используется в экономике.

Пример. Некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а соответствующие им цены – вектором $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$.

Замечание. Компоненты ***n***-мерного вектора обозначают одной буквой, но с разными индексами (в отличие от **2**-хмерных или **3**-хмерных векторов), а сам вектор – той же буквой (без номеров и стрелки), выделенной жирным шрифтом.

Определение. ***Два n-мерных вектора равны*** *тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е.* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$*, если* $x_i = y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$

Определение. ***Суммой двух n-мерных векторов*** *называется вектор* $z = x + y$, *компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых векторов, т.е.* $z_i = x_i + y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Определение. ***Произведением вектора*** x ***на действительное число*** λ *называется вектор*

$u = \lambda \cdot x$ *компоненты, которого равны произведению* λ на соответствующие компоненты вектора x.

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют свойствам:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ – коммутативный закон;
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \mathbf{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \mathbf{z})$ – ассоциативный закон;
3. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{x} = \alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{x})$ – ассоциативный закон относительно числового множителя;
4. $\alpha\cdot(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\cdot\boldsymbol{x} + \alpha\cdot\boldsymbol{y}$ – дистрибутивный закон относительно суммы векторов;
5. $(\alpha + \beta)\cdot\boldsymbol{x} = \alpha\cdot\boldsymbol{x} + \beta\cdot\boldsymbol{x}$ – дистрибутивный закон относительно числовых множителей;
6. существует нулевой вектор $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$ такой, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора (закон нулевого вектора);
7. для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует противоположный вектор $(-\boldsymbol{x})$ такой, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Theta}$;
8. $1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ (особая роль числового множителя 1)

Определение. *Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным восьми законам (аксиомам), называется* ***векторным (линейным) пространством.***

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение математики как науки. Ее предмет и метод. Как используется математические методы в экономике и менеджменте.
2. Что такое линейное векторное пространство. Какими свойствами оно обладает?
3. Дайте определение n- мерного вектора.
4. Определение действий над векторами и свойства этих операций.
5. Дайте определение скалярного произведения векторов. Сформулируйте его свойства.

Задания для самостоятельной работы:

- Найти единичный вектор **е**, совпадающий по направлению с вектором $\boldsymbol{a} = (3, -4, 12)$.
- Решить уравнение $3\boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = 0$, где

  $\boldsymbol{a} = (5, 3, 7)$, $\boldsymbol{b} = (4, 3, 20)$.
- Найти скалярное произведение векторов

  $\boldsymbol{a} = (2, -3, 1, 5, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, 4, 5, 2, 6)$.