

График квадратичной функции,  
содержащей переменную под знаком  
абсолютной величины.

*Знание только тогда  
знание, когда оно приобретено  
усилиями  
своей мысли, а не памятью.*

*Л. Н. Толстой.*

## **Основные определения и свойства**

Функция, определяемая формулой  $y=ax^2+bx+c$ , где  $x$  и  $y$  переменные, а параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  – любые действительные числа, причём  $a \neq 0$ , называется квадратичной.

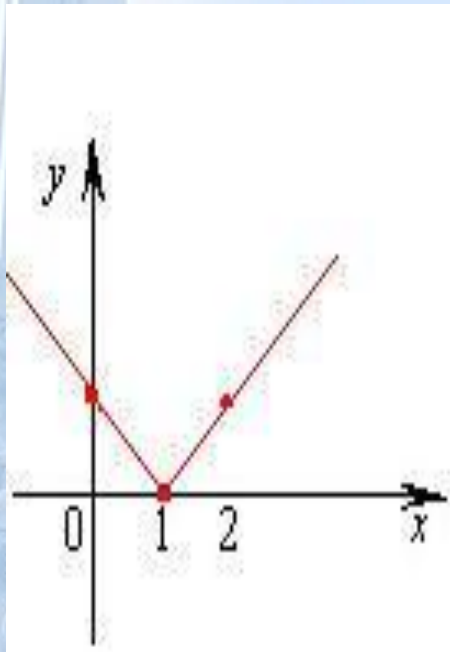
Абсолютной величиной неотрицательного числа называется само это число, абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему положительное число.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

**Свойства:**

1.  $|a| \geq 0$ ,
2.  $|a|^2 = a^2$ ,
3.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ,
4.  $|a/b| = |a|/|b|$ ,  $b \neq 0$

*Построение графика линейной функции, содержащей переменную под знаком модуля.*

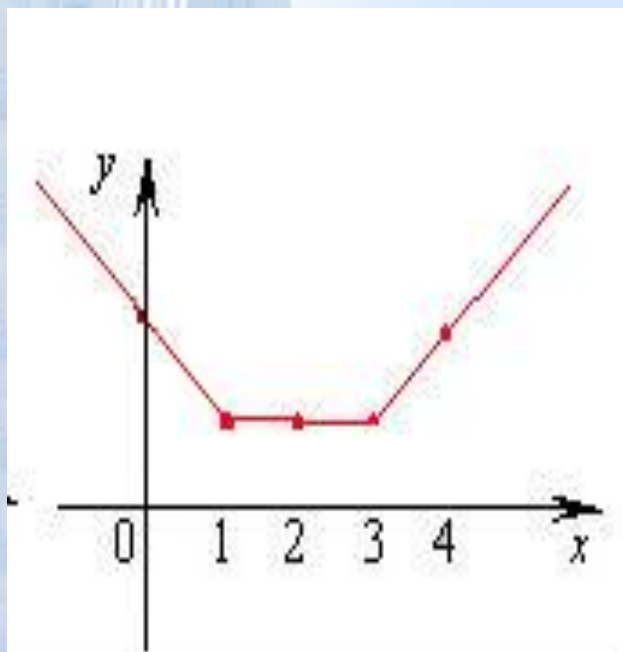


1)  $f(x) = |x-1|$ .

$x = 1$  - корень  
подмодульного  
выражения.

Возьмем  $x=0$ , ( $0 < 1$ ) и  
 $x=2$ , ( $2 > 1$ ).

Вычисляя функции в  
точках 1, 0 и 2, получаем  
график, состоящий из  
двух отрезков.



$$2) f(x) = |x-1| + |x-2|.$$

Вычисляя значение функции в точках 1, 2, 0 и 3, получаем график, состоящий из трех отрезков прямых.

# Построение графика квадратичной функции, содержащей переменную под знаком модуля

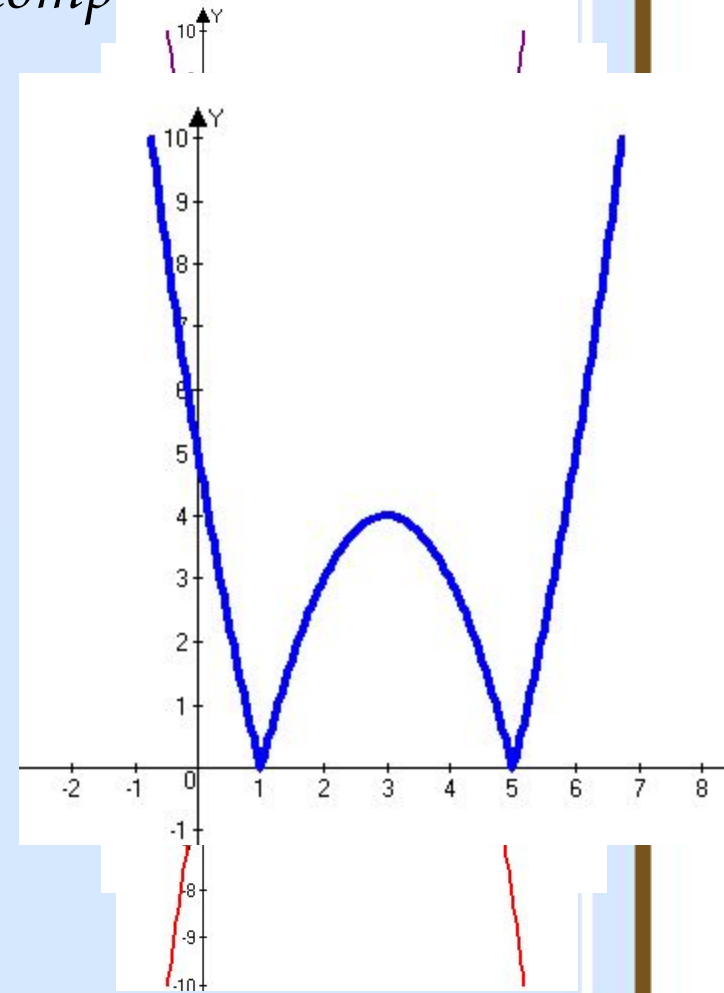
На примере функции  $y = x^2 - 6x + 5$  рассмотрим всевозможные случаи расположения модуля.

1.  $y = |x^2 - 6x + 5|$
2.  $y = |x|^2 - 6x + 5$
3.  $y = x^2 - 6|x| + 5$
4.  $y = |x|^2 - 6|x| + 5$
5.  $y = |x^2 - 6x| + 5$
6.  $y = |x^2 - 6|x| + 5|$
7.  $y = x^2 - |6x + 5|$
8.  $|y| = x^2 - 6x + 5$

# Построим график функции $y = |x^2 - 6x + 5|$

Пользуясь определением модуля, рассмотрим два случая:

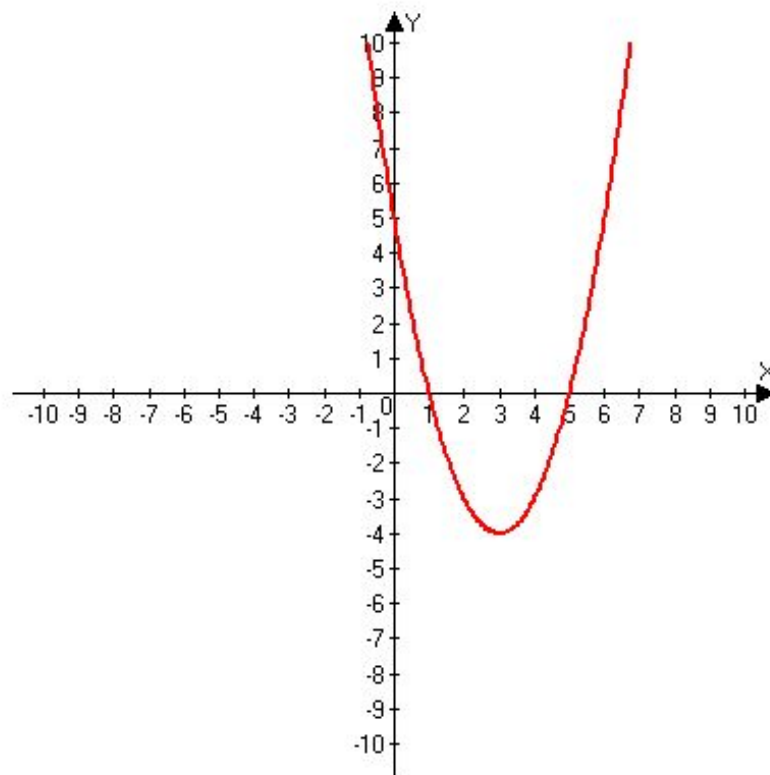
- 1)  $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ , тогда  $y = x^2 - 6x + 5$ . Выделим все точки параболы с неотрицательной ординатой
- 2)  $x^2 - 6x + 5 < 0$ , тогда  $y = -(x^2 - 6x + 5)$  или  $-x^2 + 6x - 5 > 0$ ,  $y = -x^2 + 6x - 5$ .





Рассмотрим график функции  $y = |x|^2 - 6x + 5$

Т.к.  $|x|^2 = x^2$ , то функция  $y = |x|^2 - 6x + 5$  совпадает с функцией  $y = x^2 - 6x + 5$ , а, значит, имеют один и тот же график.



# Рассмотрим график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$

Пользуясь определением модуля, рассмотрим два случая:

1) Пусть  $x \geq 0$ , тогда  $y = x^2 - 6x + 5$ .

Построим параболу  $y = x^2 - 6x + 5$  и обведём ту её часть, которая соответствует неотрицательным значениям  $x$ , т.е. часть, расположенную правее оси  $Oy$ .

2) Пусть  $x < 0$ , тогда  $y = x^2 + 6x + 5$ .

В той же координатной плоскости построим параболу  $y = x^2 + 6x + 5$  и обведём ту её часть, которая соответствует отрицательным значениям  $x$ , т.е. часть, расположенную левее оси  $Oy$ . Обведённые части парабол вместе образуют

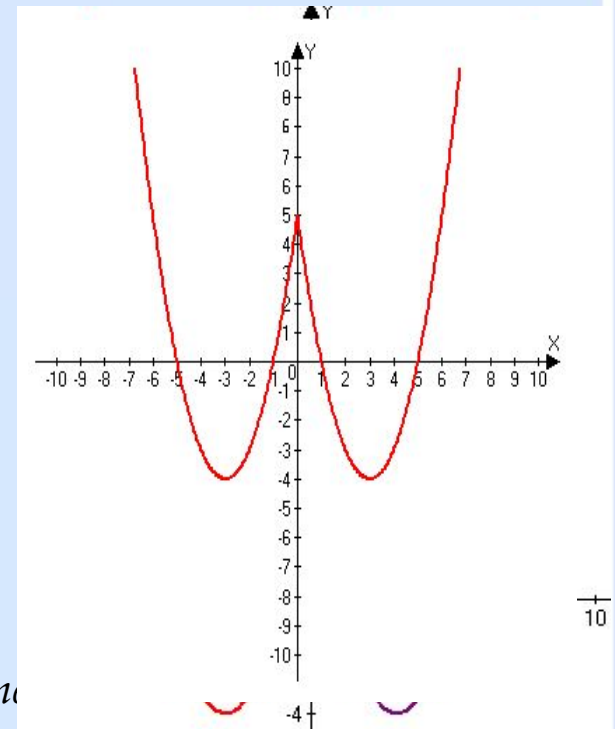


График функции  $y = x^2 - 6|x| + 5$



Рассмотрим график функции  
 $y = |x|^2 - 6|x| + 5$ .

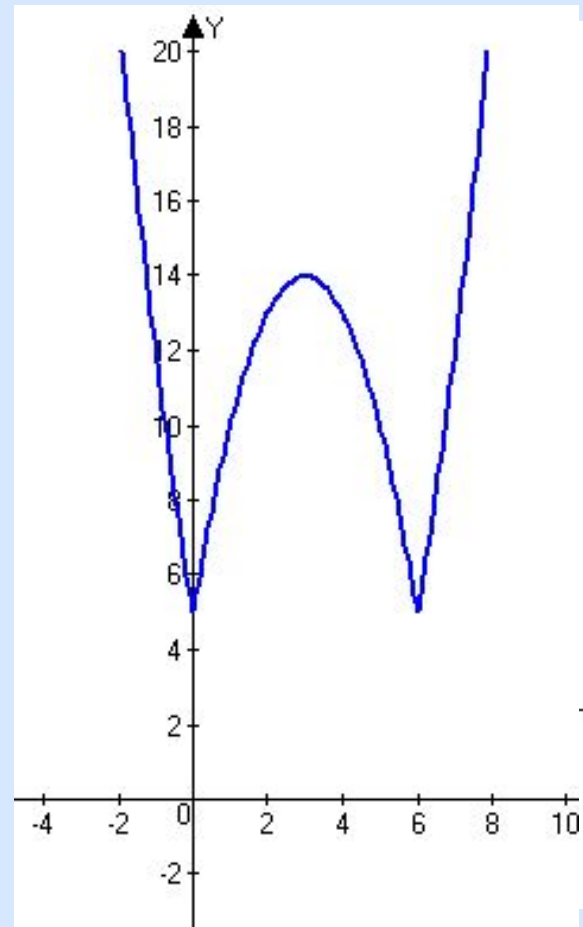
Т.к.  $|x|^2 = x^2$ , то функция  $y = |x|^2 - 6|x| + 5$   
совпадает с функцией  $y = x^2 - 6|x| + 5$   
(см пред. пример)

Построим график функции  $y = |x^2 - 6x| + 5$

1)  $y = x^2 - 6x$

2)  $y = |x^2 - 6x|$

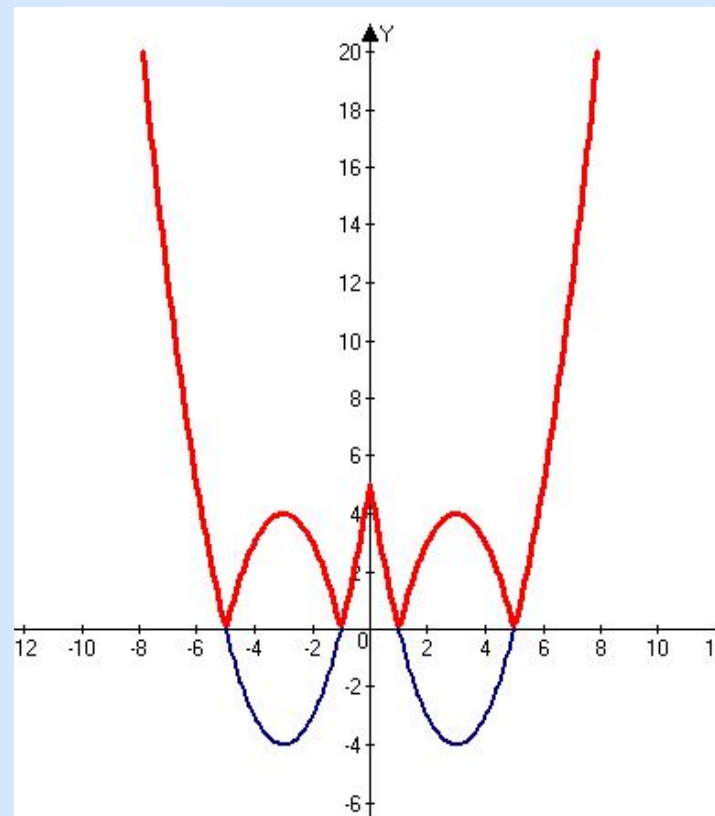
3)  $y = |x^2 - 6x| + 5$



Построим график функции  $y = |x^2 - 6|x| + 5|$ .

1)  $y = x^2 - 6|x| + 5$  (рассмотрено в 10 слайде)

2)  $y = |x^2 - 6|x| + 5|$



Построим график функции  $y = x^2 - |6x + 5|$ .

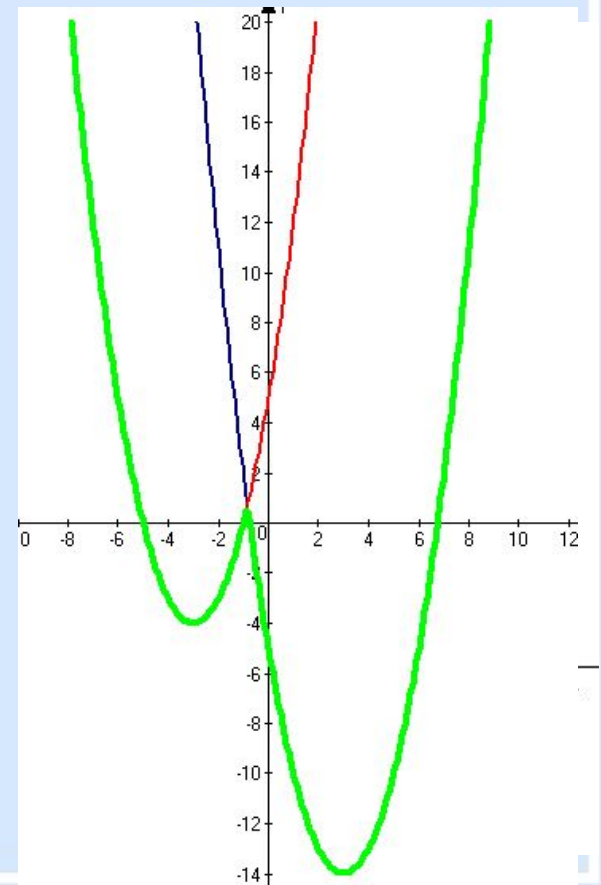
1) Найдем нули функции:  $y = 6x + 5$ ,  $6x + 5 = 0$ ,  $x = -5/6$ .

2) Рассмотрим два случая:

1)  $6x + 5 \geq 0$ , т.е.  $x \geq -5/6$ , тогда функция примет вид  $y = x^2 - 6x - 5$ .

2)  $6x + 5 < 0$ , т.е.  $x < -5/6$ , тогда функция принимает вид  $y = x^2 + 6x + 5$ .

3) Построили график функции  $y = x^2 - |6x + 5|$ .

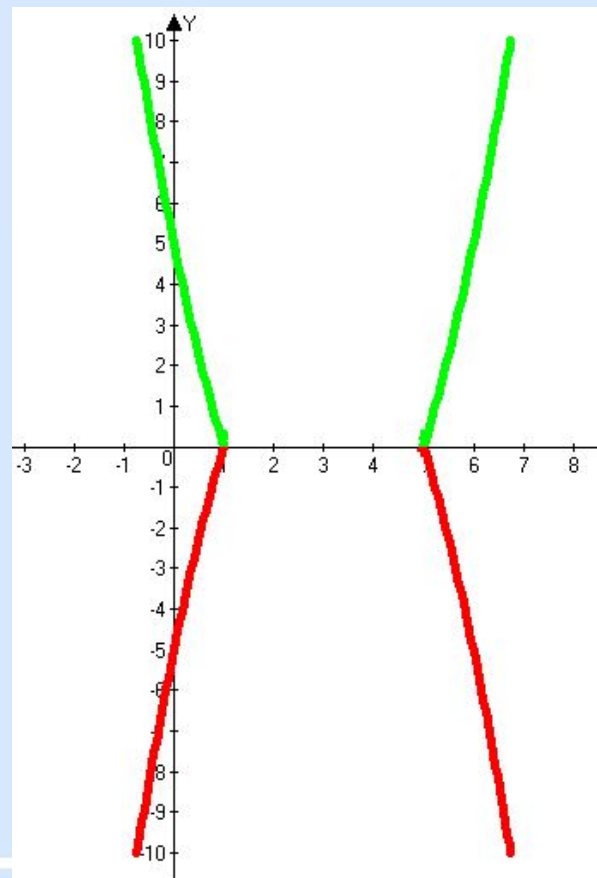


Равенство  $|y| = x^2 - 6x + 5$  не задает функции т. к. при  $x^2 - 6x + 5 > 0$  имеем 2 значения  $y$ , соответствующих данному значению  $x$ , а при  $x^2 - 6x + 5 < 0$ , ни одного такого значения. График данного уравнения строится так:

Отбрасываем ту часть графика, которая лежит ниже оси  $Ox$ , а оставшуюся часть симметрично отображаем относительно оси  $Ox$ .

- 1) При  $x^2 - 6x + 5 > 0$ ,  $y = x^2 - 6x + 5$
- 2) при  $x^2 - 6x + 5 < 0$ ,  $y = -(x^2 - 6x + 5)$
- 3) Построили график функции

$$|y| = x^2 - 6x + 5$$





## Выводы:

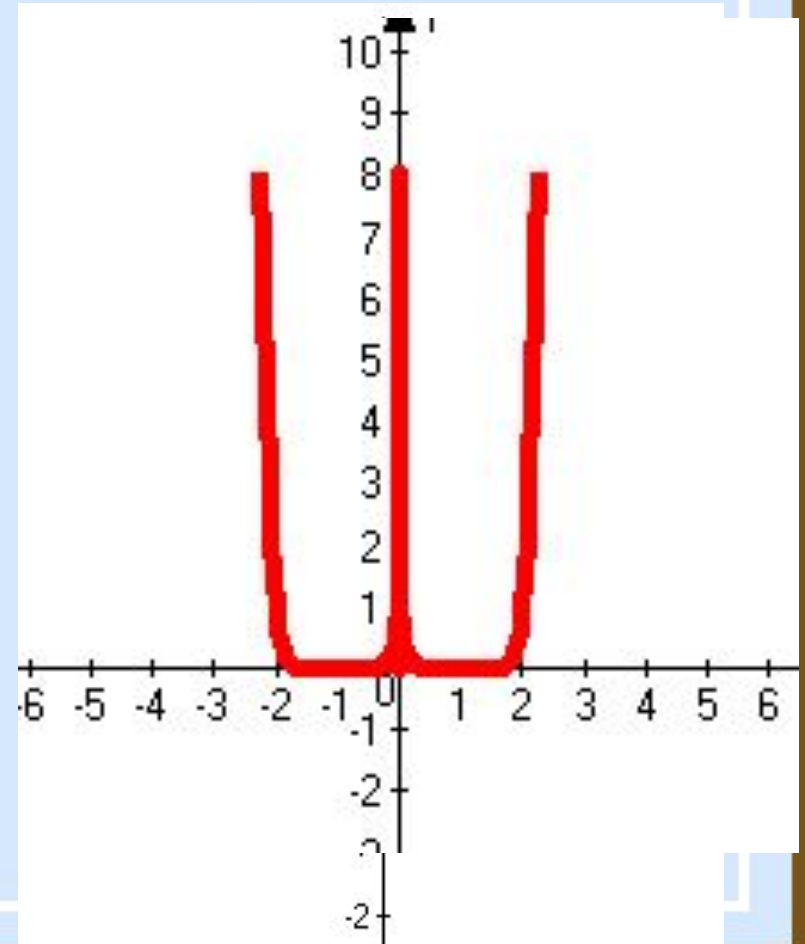
- 1) Для построения графика функции  $y = |f(x)|$ , надо сохранить ту часть графика функции  $y = f(x)$ , точки которой находятся на оси  $Ox$  или выше оси  $Ox$ , и симметрично отразить относительно оси  $Ox$  ту часть графика функции  $y = f(x)$ , которая расположена ниже оси  $Ox$ .
- 2) Для построения графика  $y = f(|x|)$  надо сохранить ту часть графика функции  $y = f(|x|)$ , точки которой на оси  $Oy$  или справа от неё и симметрично отразить эту часть графика относительно оси  $Oy$ .
- 3) Чтобы построить график уравнения  $|y| = f(x)$  нужно: Отбросить ту часть графика, которая лежит ниже оси  $Ox$ , а оставшуюся часть симметрично отобразить относительно оси  $Ox$ .



1.  $y=(|x|-1)^4$ ,  $\text{zde } -3 \leq x \leq 3$

1.

2.  $x=0$ ,  $\text{zde } 0 \leq y \leq 8$



2.

$-2|x|^2+8, \text{ zde } -2 \leq x \leq 2$

$y=4, \text{ zde } -2 \leq x \leq 2$

1)  $y=2|x|^2$

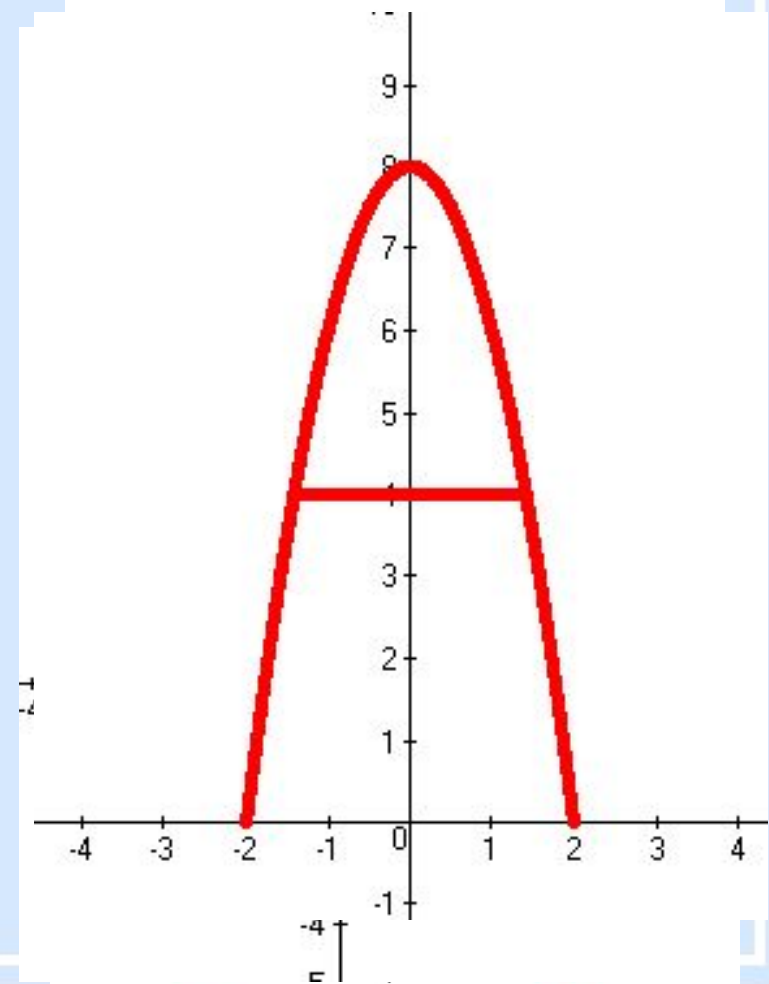
2)  $y=-2|x|^2$

3)  $y=-2|x|^2+8$

$-2 \leq x \leq 2$

4)  $y=4, \text{ zde}$

$-1,4 \leq x \leq 1,4$



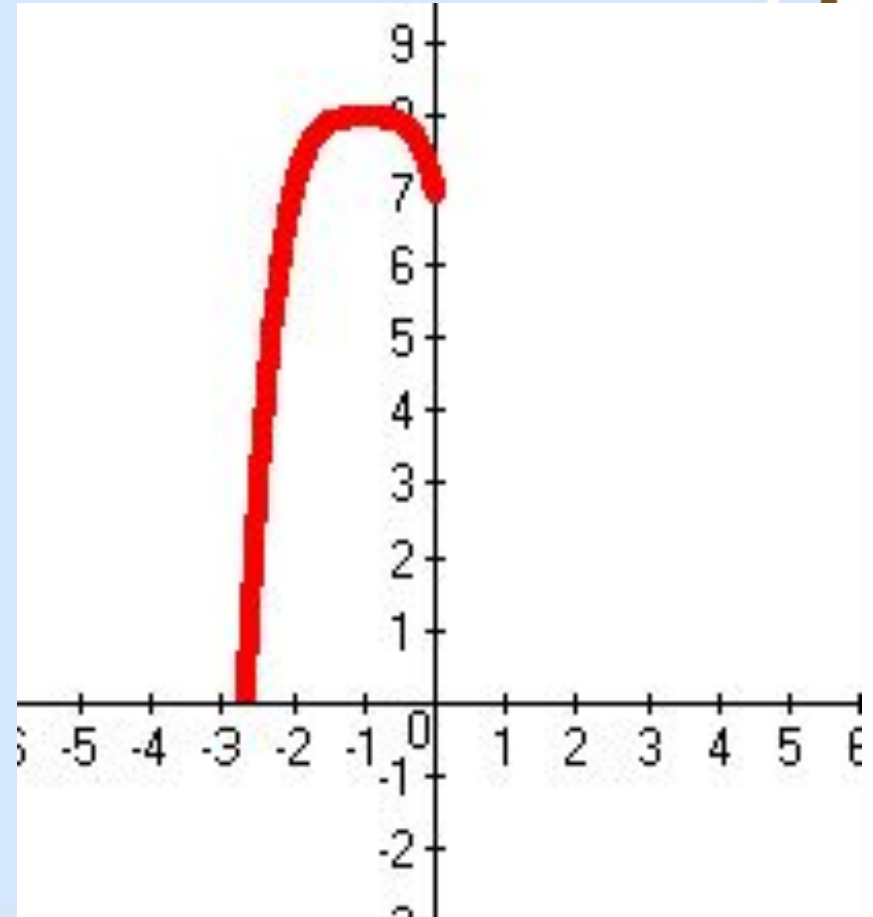
$$y = -(|x| - 1)^4 + 8, \text{ где } -3 \leq x \leq 0$$

3.

1)  $y = (|x| - 1)^4, \text{ где } -3 \leq x \leq 0$

2)  $y = -(|x| - 1)^4, \text{ где } -3 \leq x \leq 0$

3)  $y = -(|x| - 1)^4 + 8, \text{ где } -3 \leq x \leq 0$



$$y = x^2 + (|y-4| - 2)^2 = 4, \text{ unde } 0 \leq y \leq 8, x=0$$

4.

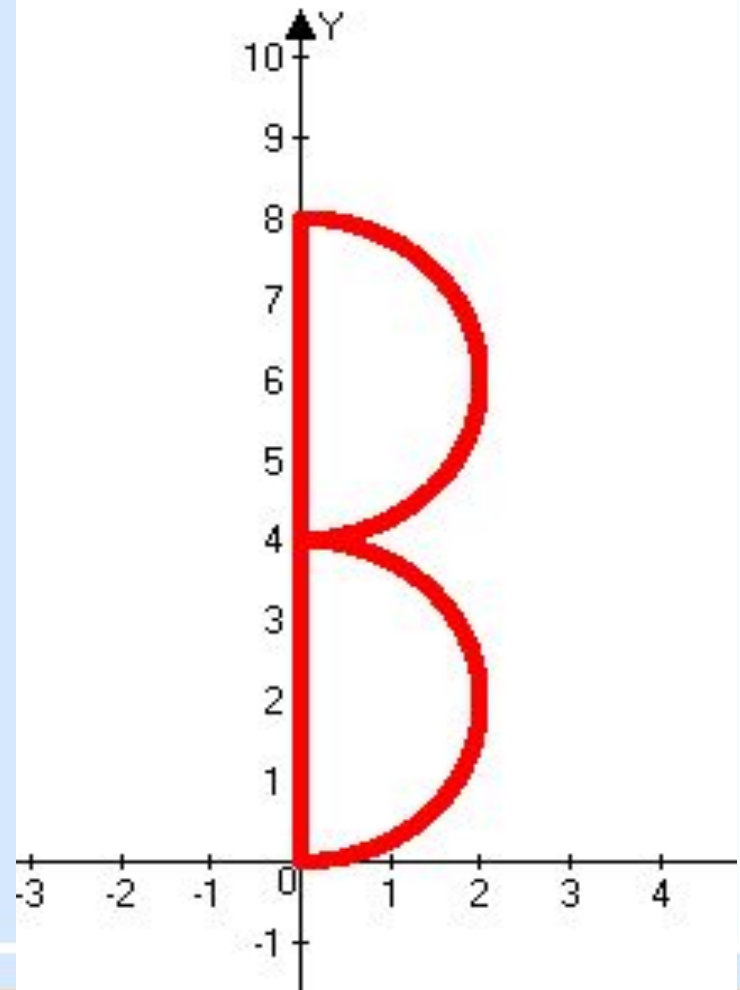
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$1) y = \pm \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$$

$$2) y = \pm \sqrt{4 - x^2} + 6$$

$$3) y = \pm \sqrt{4 - x^2} + 2$$

$$4) x = 0, 0 \leq y \leq 8$$



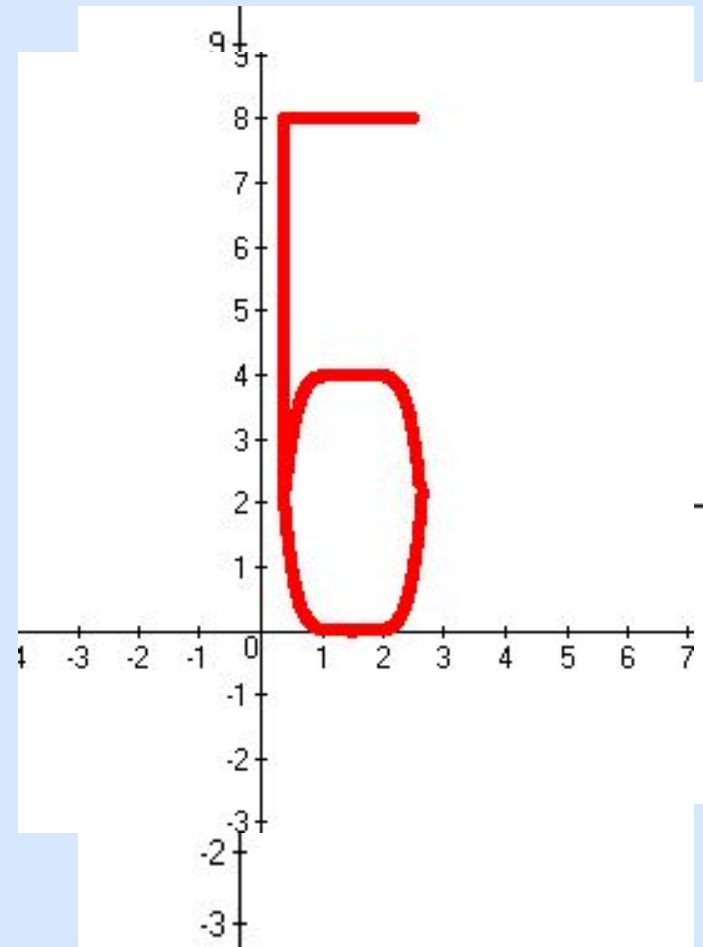
1)  $y = -(x-1.5)^6 + 4, 0,4$   
 $\leq x \leq 2,6$

2)  $y = (x-1.5)^6,$   
 $0,35 \leq x \leq 2,64$

3)  $x = 0,35, 2 \leq y \leq 8$

4)  $y = 8, 0,35 \leq x \leq 2,5$

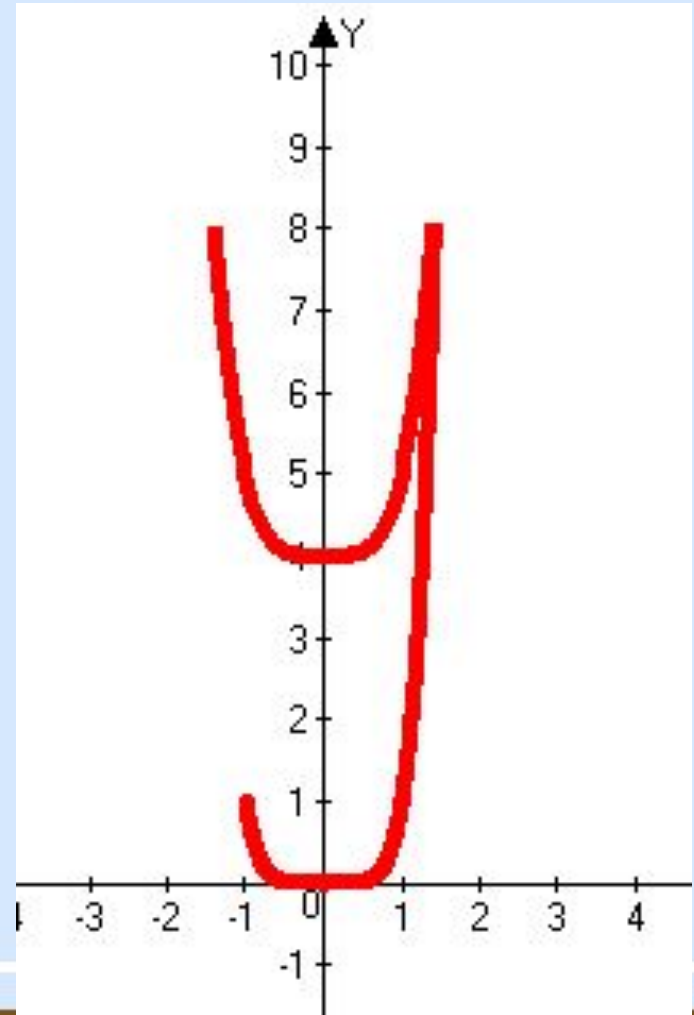
5.



1.  $y = x^4 + 4, -2 \leq x \leq 2$

2.  $y = x^6, -1 \leq x \leq 2$

6.





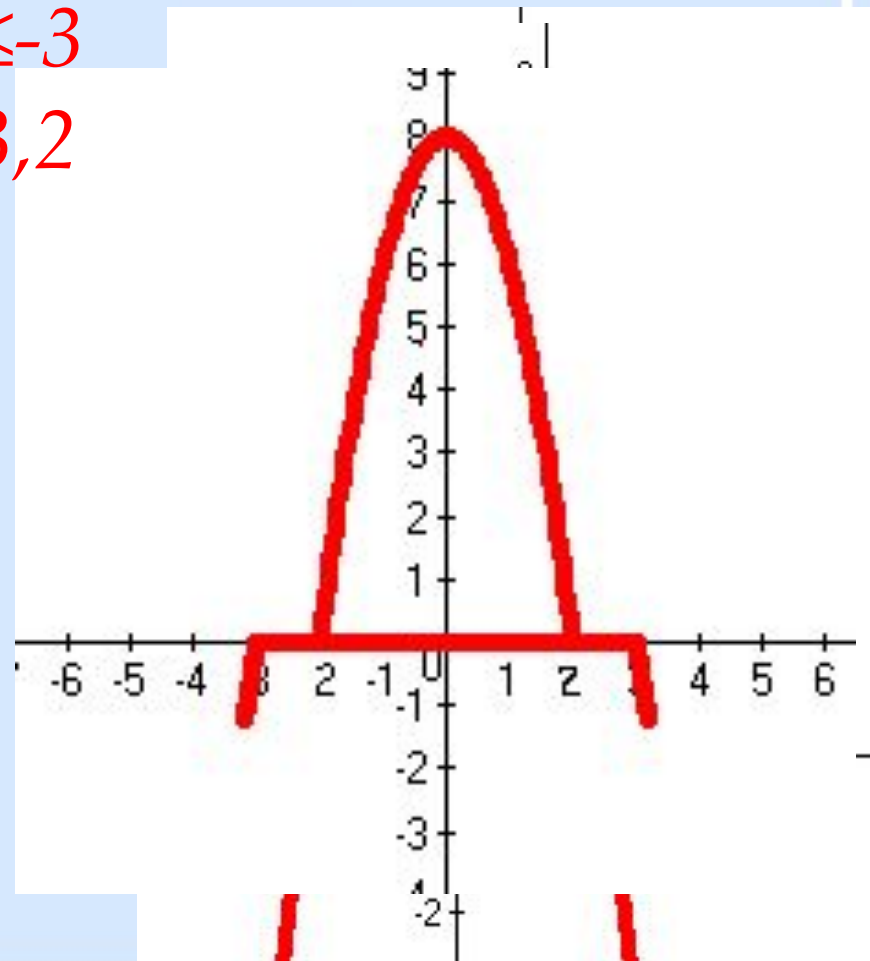
1)  $y = -2|x|^2 + 8$

2)  $y = 0, -3 \leq x \leq 3$

3)  $y = -x^2 + 9, -3,2 \leq x \leq -3$

4)  $y = -x^2 + 9, 3 \leq x \leq 3,2$

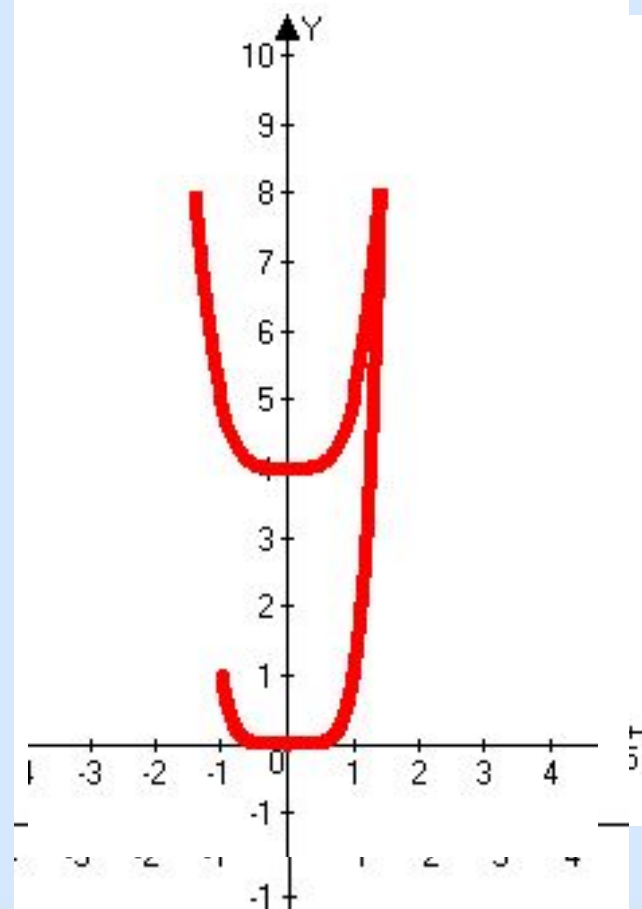
7.



1.  $y = x^4 + 4, -2 \leq x \leq 2$

2.  $y = x^6, -1 \leq x \leq 2$

8.

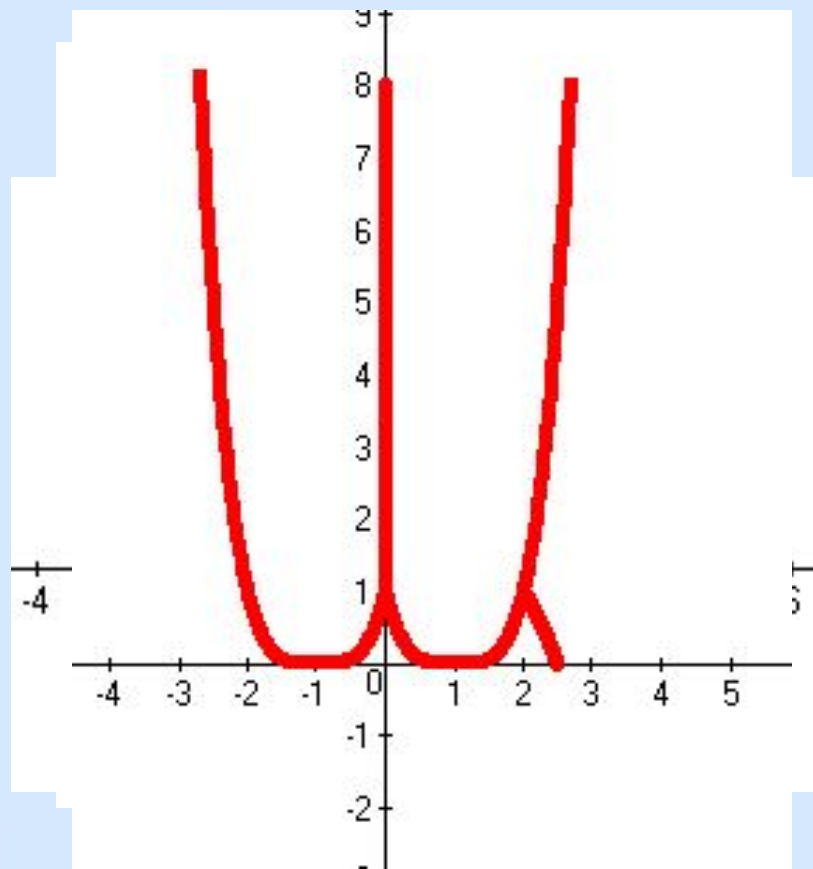


1)  $y=(|x|-1)^4, -3 \leq x \leq 3$

2)  $x=0, 0 \leq y \leq 8$

3)  $y= x^2+ 2,5x, 2 \leq x \leq 2,5$

9.

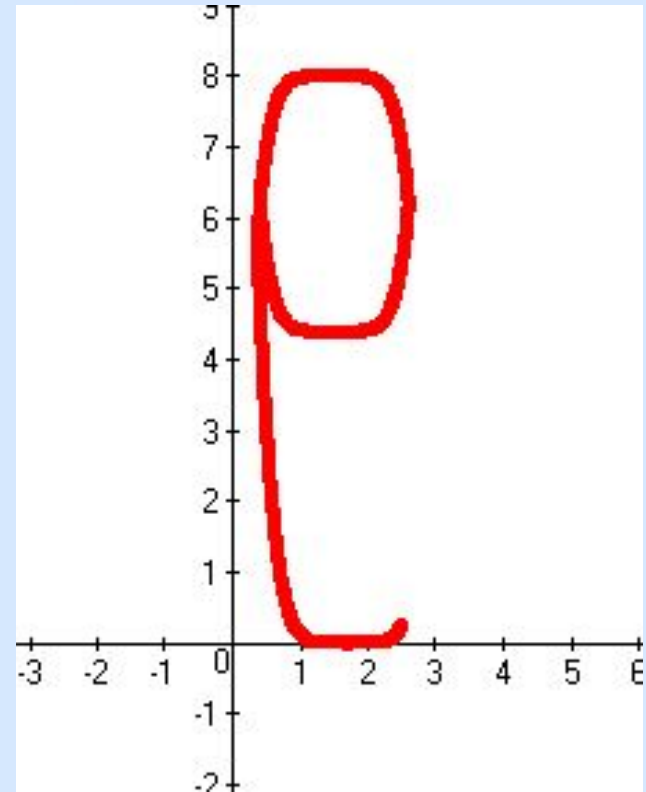


$$1) y = -(x-5)^6 + 8, \quad 0,4 \leq y \leq 2,6$$

$$2) y = (x-5)^6 + 4,4, \quad 0,4 \leq y \leq 2,6$$

$$3) y = (x-1,7)^6, \quad 0,35 \leq x \leq 2,5$$

10.



$$1) y = -(x-5)^6 + 8, \quad 0,4 \leq y \leq 2,6$$

$$2) y = (x-5)^6 + 4,4, \quad 0,4 \leq y \leq 2,6$$

$$3) y = (x-1,7)^6, \quad 0,35 \leq x \leq 2,5$$

11.

