14.05.20.

Тема:
Скалярное произведение векторов.
Решение задач на вычисление скалярного произведения векторов.
.

Видео для усвоения материала:

https://videouroki.net/video/28-skaliarnoie-proizviedieniie-viektorov.html

https://www.youtube.com/watch?v=hnldMyAhIJc

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Теоретическая часть.
Прочитать. Выучить определения, теоремы (то, что выделено жирным шрифтом.)

§ 2 Скалярное произведение векторов

50 Угол между векторами

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 133). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что **угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен** α. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен $0°$. Если угол между векторами равен $90°$, то векторы называются **перпендикулярными**. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

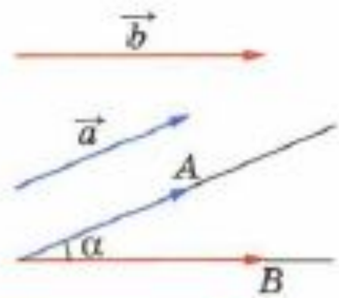

Рис. 133

На рисунке 134 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы: $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = 120°$, $\widehat{\vec{a}\vec{d}} = 60°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}} = 0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{c}} = 180°$. На этом рисунке $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.

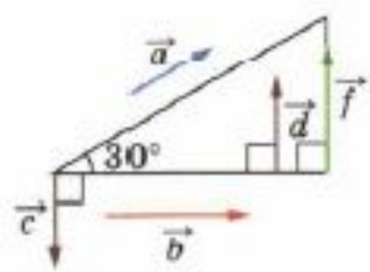

Рис. 134

51 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

Как и в планиметрии, справедливы следующие утверждения:

скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;

скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов: **скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ выражается формулой $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.** Это утверждение доказывается точно так же, как в планиметрии.

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\,\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (1)$$

В самом деле, так как

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha,$$

то

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Подставив сюда выражения для $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу **(1)**.

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1°. $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$, причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2°. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ (переместительный закон).

3°. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (распределительный закон).

4°. $k(\vec{a}\,\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$ (сочетательный закон).

Утверждения 1°—4° доказываются точно так же, как в планиметрии.

Нетрудно доказать, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d}$ (см. задачу 458).

Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой a, если он лежит либо на прямой a, либо на прямой, параллельной a.

На рисунке 135 вектор $\overrightarrow{AB}$ является направляющим вектором прямой a.

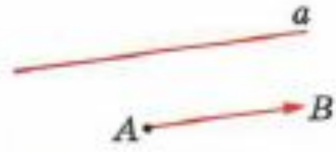

Рис. 135

Задача 1

Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

Решение

Пусть $\vec{p}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{q}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — направляющие векторы прямых a и b. Обозначим буквой φ искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти $\cos\varphi$, так как значение $\cos\varphi$ позволяет найти угол φ.

Введем обозначение: $\theta = \widehat{\vec{p}\,\vec{q}}$. Тогда либо $\varphi = \theta$, если $\theta \leqslant 90°$ (рис. 136, *а*), либо $\varphi = 180° - \theta$, если $\theta > 90°$ (рис. 136, *б*).

Поэтому либо $\cos\varphi = \cos\theta$, либо $\cos\varphi = -\cos\theta$. В любом случае $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$, а так как $\varphi \leqslant 90°$, то $\cos\varphi \geqslant 0$, и, следовательно, $\cos\varphi = |\cos\theta|$. Используя формулу (1) п. 51, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2)$$

Задача 2

Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости.

Решение

Пусть $\vec{p}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ — направляющий вектор прямой a, $\vec{n}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости α. Это означает, что прямая, на которой лежит вектор $\vec{n}$, перпендикулярна к плоскости α. Обозначим буквой φ искомый угол между прямой a и плоскостью α, а буквой θ — угол $\widehat{\vec{p}\,\vec{n}}$.

Пользуясь рисунком 137, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Поэтому для $\sin\varphi$ получается такое же выражение, как и в правой части равенства (2). Зная $\sin\varphi$ и учитывая, что $\varphi \leqslant 90°$, можно найти угол φ.

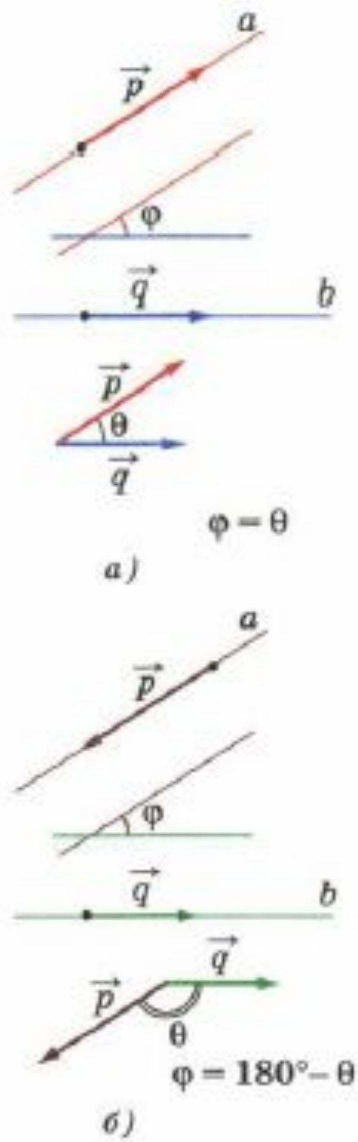

Рис. 136

Практическая часть.

444 Даны векторы $\vec{a}\,\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\,\{-1;\ 1;\ 1\}$ и $\vec{c}\,\{5;\ 6;\ 2\}$. Вычислите $\vec{a}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{b}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\,\vec{b}}$.

445 Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$. Вычислите: а) $\vec{a}\,\vec{b}$; б) $\vec{a}\,\vec{i}$; в) $\vec{b}\,\vec{j}$; г) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{k}$; д) $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$.

446 Даны векторы $\vec{a}\,\{3;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\,\{-5;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{c}\,\{-1;\ -2;\ 1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.